Аналитические и численные методы исследования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на однородных пространствах.

И.В. Киреев

Рассмотрим векторное евклидово пространство $\boldsymbol{R}^m$ столбцов из вещественных чисел

$$\boldsymbol{R}^m = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ \ldots, \ x_m)^T\right\},$$

(здесь “ T ” - операция транспонирования) на котором действие линейного представления [1] матричной группы Ли $\mathcal{T}$ сводится к умножению матрицы $T \in \mathcal{T}$ размерности $m \times m$ на столбец $\boldsymbol{x}$. Тогда [2] найдётся такая числовая невырожденная матрица J размерности m, что связная группа $\mathcal{T}$ будет однозначно определяться соотношениями:

$$T^{-1} = J^{-1}T^T J, \quad \det(T) = 1. \tag{1}$$

Через $\mathcal{G}$ будем обозначать алгебру Ли [2] матричной группы Ли $\mathcal{T}$: для $\forall\, G \in \mathcal{G}$

$$JG + G^T J = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что если $G(t) \in \mathcal{G}$ при $t \in [t_l, t_r]$ и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = G(t)\boldsymbol{x}(t), \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m \tag{3}$$

на отрезке $[t_l, t_r]$ существует фундаментальная матрица решений $T(t)$, то она принадлежит группе $\mathcal{T}$.

С другой стороны, группа Ли $\mathcal{T}$, рассматриваемая как группа движений, порождает [1, 2] однородное пространство $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$, вложенное в $\boldsymbol{R}^m$. В силу (1) система уравнений (3) переводит начальную точку $\boldsymbol{x}(t_l) \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ в некоторую другую точку того же пространства. Поэтому систему (3) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений на однородном пространстве $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$. Примером подобных систем являются гамильтоновы системы дифференциальных уравнений.

Традиционное упрощение [3] исходной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (3) заключается в переходе от неё посредством линейного преобразования

$$\boldsymbol{x}(t) = T(t)\boldsymbol{y}(t), \tag{4}$$

(здесь $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$) к системе

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = F(t)\boldsymbol{y}(t), \tag{5}$$

матрица которой имеет с вычислительной точки зрения более простую структуру. Если $T(t) \in \mathcal{T}$, то преобразование (4) переводит систему (3) в систему (5) с матрицей

$$F(t) = T^{-1}(t)\Big(G(t)T(t) - \frac{d}{dt}T(t)\Big). \tag{6}$$

Задачу определения преобразования $T(t) \in \mathcal{T}$, переводящего систему (3) в систему (5), матрица которой имеет блочно-диагональную структуру

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix},$$

называют задачей нормализации [4]. Её решение позволяет перейти от исходной системы дифференциальных уравнений к другой, допускающей аналитическое решение.

Пусть алгебра матриц $\mathcal{G}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^d \oplus \mathcal{G}^c, \tag{7}$$

где $\mathcal{G}^d$ – подалгебра блочно-диагональных матриц типа G^d, а $\mathcal{G}^c$ – подпространство матриц вида G^c :

$$G^d = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}, \quad G^c = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} \\ G_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Это разложение порождено блочно-диагональным видом матрицы $F(t)$; все матричные блоки с индексами $_{11}$ и $_{22}$ имеют размерность $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно, $m_1 + m_2 = m$; блоки с индексами $_{12}$ и $_{21}$ имеют размерность $m_1 \times m_2$ и $m_2 \times m_1$.

Матрицу $T(t)$ будем искать как преобразование Кэли [5] матрицы $C(t) \in \mathcal{G}^c$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \frac{E_m + C(t)}{E_m - C(t)}; \tag{8}$$

здесь E_m– единичная матрица порядка m. Блочная структура матрицы $C(t)$ выбрана специальным образом, по аналогии с подобными построениями из монографии [3]; предполагается, что все собственные значения блоков C_{12} и C_{21} по модулю меньше единицы.

Полагая, что матрицы $G(t)$ и $T(t)$ имеют блочную структуру того же типа, что и матрицы $F(t)$ и $C(t)$,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = G^d + G^c,\ T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

из (8) получаем

$$\begin{aligned} T_{11}(t) &= \left[E_{m_1} + C_{12}(t)C_{21}(t)\right]\left[E_{m_2} - C_{12}(t)C_{21}(t)\right]^{-1}; \\ T_{12}(t) &= 2C_{12}(t)\left[E_{m_2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right]^{-1}; \\ T_{21}(t) &= 2C_{21}(t)\left[E_{m_1} - C_{12}(t)C_{21}(t)\right]^{-1}; \\ T_{22}(t) &= \left[E_{m_2} + C_{21}(t)C_{12}(t)\right]\left[E_{m_2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Матричное же соотношение (6) после несложных алгебраических преобразований распадается на две группы:

$$\begin{aligned} F_{11} &= -T_{11}^{-1}\frac{d}{dt}T_{11} + T_{11}^{-1}G_{11}T_{11} + T_{11}^{-1}G_{12}T_{21}, \\ F_{22} &= -T_{22}^{-1}\frac{d}{dt}T_{22} + T_{22}^{-1}G_{22}T_{22} + T_{22}^{-1}G_{21}T_{12}, \end{aligned} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X_{12} &= G_{12} + G_{11}X_{12} - X_{12}G_{22} - X_{12}G_{21}X_{12}, \\ \frac{d}{dt}X_{21} &= G_{21} + G_{22}X_{21} - X_{21}G_{11} - X_{21}G_{12}X_{21}, \end{aligned} \tag{12}$$

где матрицы X_{12} и X_{21} следующим образом связаны с матрицей T :

$$T_{12} = X_{12}T_{22}, \qquad T_{21} = X_{21}T_{11}. \tag{13}$$

Учитывая равенства (10), в последних соотношениях перейдём от блоков матрицы T к блокам матрицы C:

$$\begin{aligned} 2C_{12}(t) &= X_{12}(t)\big(E_{m_2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\big); \\ 2C_{21}(t) &= \big(E_{m_2} - C_{21}(t)C_{12}(t)\big)X_{21}(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Считая матрицы X_{12} и X_{21} известными, эти выражения можно рассматривать как систему матричных уравнений относительно блоков C_{12} и C_{21}. Если все собственные значения матриц X_{12} и X_{21} по модулю меньше единицы, то можно показать [6], что у этой системы существуют решения. Одно из них имеет вид

$$\begin{aligned} C_{12}(t) &= X_{12}(t)\big[E_{m_2} + X_{22}(t)\big]^{-1}, \\ C_{21}(t) &= \big[E_{m_2} + X_{22}(t)\big]^{-1}X_{21}(t), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} X_{11}(t) &= \sqrt{E_{m_1} - X_{12}(t)X_{21}(t)}\,, \\ X_{22}(t) &= \sqrt{E_{m_2} - X_{21}(t)X_{12}(t)}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь выражение $\sqrt{E_m - X}$ обозначает сходящийся степенной ряд

$$\sqrt{E_m - X} = E_m - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 - \ldots - \frac{(2k-3)!!}{2^k k!}X^k - \ldots. \tag{17}$$

Такой выбор производящей функции гарантирует невырожденность матриц $E_{m_1} + X_{11}(t)$ и $E_{m_2} + X_{22}(t)$.

Подставляя (15) в (10), получим выражение матриц $T_{11}(t)$ и $T_{22}(t)$ через матрицы $X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$:

$$T_{11}(t) = \big[X_{11}(t)\big]^{-1},\ T_{22}(t) = \big[X_{22}(t)\big]^{-1}. \tag{18}$$

Соотношения (13) и (18) позволяют выразить блоки матрицы $T(t)$ через решения $X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$ уравнений (12). В результате приходим к утверждению

Теорема 1. *Пусть $X_{12}(t)$ и $X_{21}(t)$ – решения системы* (12) *на отрезке $[t_l, t_r]$ такие, что все их собственные значения по модулю меньше единицы. Тогда матрица $T(t)$, определяемая соотношениями* (16), (18) *и* (13) *порождает преобразование* (4), *переводящее систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* (3) *в систему* (5) *с блочно-диагональной матрицей $F(t)$* (11). *Если же для исходной алгебры $\mathcal{G}$ имеет место разложение* (7) *и хотя бы в одной из точек промежутка $[t_l, t_r]$ матрица $T(t)$ принадлежит группе $\mathcal{T}$, то матрица преобразованной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений принадлежит алгебре $\mathcal{G}$.*

Как было отмечено выше, оператор сдвига $T(t)$ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на однородном пространстве $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ принадлежит группе $\mathcal{T}$. Поэтому *численную схему решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на* $\mathcal{M}_\mathcal{T}$, *будем называть* $\mathcal{T}-$*консервативной* ($\mathcal{T}-$*схемой), если для построенной по этой схеме аппроксимации оператора сдвига справедливо соотношение* (1) *в тех узлах сетки, в которых вычисляется решение.*

Таким образом, аппроксимацию в силу $\mathcal{T}-$схемы оператора сдвига дифференциальной системы на однородном пространстве $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ можно интерпретировать как оператор сдвига некоторой другой системы дифференциальных уравнений на $\mathcal{M}_\mathcal{T}$, фундаментальная матрица которой может быть эффективно вычислена.

Пусть на отрезке $[t_l, t_r]$ требуется найти решение линейной системы

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = G(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t), \quad G \in \mathcal{G},\ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{R}^m, \tag{19}$$

удовлетворяющее на концах отрезка однородным краевым условиям

$$B_l\boldsymbol{x}(t_l) + B_r\boldsymbol{x}(t_r) = \mathbf{0}. \tag{20}$$

Частным случаем краевой задачи (19)–(20) является задача Коши для системы (19), когда $B_r = 0$, а $B_l = E_m$ – единичная матрица размерности m.

Будем предполагать, что

а) B_l и B_r – $n \times m$ матрицы такие, что ранг блочной матрицы $(B_l B_r)$ равен m;

б) решение краевой задачи (19)–(20) существует и единственно для любой вектор-функции $\boldsymbol{g}(t)$ с интегрируемым квадратом евклидовой нормы, то есть для любой $\boldsymbol{g}(t) \in L_2^m$.

Тогда, в силу предположения б) и известных теорем вложения [7], можно говорить об интегральном операторе $\mathcal{B}_G$, $\mathcal{B}_G : \boldsymbol{g}(t) \mapsto \boldsymbol{x}(t)$, ставящем в соответсвие любой вектор-функции $\boldsymbol{g}(t) \in L_2^m$ решение краевой задачи ((19), (20). При этом из предположения б) следует, что оператор $\mathcal{B}_G$, рассматриваемый как оператор из L_2^m в L_2^m, ограничен некоторой константой $C_G > 0$:

$$\parallel \boldsymbol{x} \parallel \leq C_G \parallel \boldsymbol{g} \parallel, \tag{21}$$

где $\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2 = \int\limits_{t_l}^{t_r} \big(x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_m^2(t)\big)dt.$

Наряду с однородной краевой задачей для системы (19) рассмотрим однородную краевую задачу для линейной системы с матрицей $F(t) \in \mathcal{G}$ и теми же матрицами B_l, B_r краевых условий. Предполагая, как и ранее, что соответствующая краевая задача однозначно разрешима, введём в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathcal{B}_F :\ L_2^m \to L_2^m,\ \ \parallel \mathcal{B}_F \parallel \leq C_F \tag{22}$$

следующим образом: если $\mathcal{B}_F :\ \boldsymbol{\chi}(t) \mapsto \boldsymbol{x}(t)$, то $\boldsymbol{x}(t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = F(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\chi}(t),\ \forall t \in [t_l, t_r];\ B_l\boldsymbol{x}(t_l) + B_r\boldsymbol{x}(t_r) = \mathbf{0}.$$

Выражая отсюда производную

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = F(t)\mathcal{B}_F\big(\boldsymbol{\chi}\big) + \boldsymbol{\chi}(t)$$

и подставляя это выражение в систему (19), приходим к интегральному уравнению

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \big[G(t) - F(t)\big]\mathcal{B}_F\big(\boldsymbol{\chi}\big) + \boldsymbol{g}(t); \;\; \boldsymbol{\chi} \in L_2^m, \tag{23}$$

которое эквивалентно исходной дифференциальной краевой задаче для системы (19) с краевыми условиями (20).

Для построения численной $\mathcal{T}-$схемы решения краевых задач для системы (19) воспользуемся проекционным методом. При этом целесообразно использовать не дифференциальную постановку задачи (19), а итегральную (23).

Разобьём узлами $t_0 = t_l, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = t_r$ исходный отрезок $[t_l, t_r]$ изменения независимой переменной t на n промежутков.

На каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определено пространство $L_{2,k}^m$ m-мерных вектор-функций, квадрат евклидовой нормы которых интегрируем по нему; полагаем, что $L_{2,k}^m$ вложено в L_2^m, т.е.

$$L_{2,k}^m = \big\{\boldsymbol{l}(t) \in L_2^m : \boldsymbol{l}(t) = \mathbf{0}, \text{ при } t \notin [t_{k-1}, t_k]\big\}.$$

Очевидно, что $L_2^m = L_{2,1}^m \oplus L_{2,2}^m \oplus \ldots \oplus L_{2,n}^m$ – прямая сумма.

Обозначим через L_k^A конечномерное подпространство пространства $L_{2,k}^m$, а через L^A – аппроксимирующее пространство, совпадающее с $L^A = L_1^A \bigoplus \ldots \bigoplus L_n^A$.

Тогда, если $\mathcal{L}_k : L_{2,k}^m \to L_k^A$ – ортогональный проектор пространства$L_{2,k}^m$ на подпространство L_k^A, а $\mathcal{L} : L_2^m \to L^A$ – ортогональный в L_2^m проектор пространства L_2^m на подпространство L^A, совпадающий на каждом из подпространств $L_{2,k}^m$ с операторами $\mathcal{L}_k$, то в качестве приближения $\boldsymbol{\gamma}(t) \in L^A$ к решению $\boldsymbol{\chi}(t)$ операторного уравнения (23) берем решение конечномерной системы уравнений

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathcal{L}\Big\{\big[G(t) - F(t)\big](\mathcal{L} \circ \mathcal{B}_F)\{\boldsymbol{\gamma}(t)\} + \boldsymbol{f}(t)\Big\}, \tag{24}$$

где $\mathcal{B}_F\{\boldsymbol{\gamma}(t)\}$ определено в (22). Возникает вычислительная схема решения интегральной, а стало быть и исходной, краевой задачи. Отличие предлагаемой проекционной вычислительной схемы решения интегрального уравнения (23) от классической [7]

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathcal{L}\Big\{\big[G(t) - F(t)\big]\mathcal{B}_F\{\boldsymbol{\gamma}(t)\} + \boldsymbol{f}(t)\Big\},$$

заключается в наличии дополнительного проектора $\mathcal{L}$ на аппроксимирующее пространство L^A: вместо $\mathcal{B}_F\{\boldsymbol{\gamma}(t)\}$ модифицированная схема содержит $(\mathcal{L} \circ \mathcal{B}_F)\{\boldsymbol{\gamma}(t)\}$. Предложенная вычислительная схема обладает рядом дополнительных свойств, отсутствующих у классического проекционного метода; имеет место

Теорема 2. *Вычислительная схема* (24) *решения краевой задачи (20) для системы* (19) *является* $\mathcal{T}-$*схемой относительно узлов* $t_1, \ldots, t_n$. *Если же аппроксимирующее пространство* L_k^A *содержит постоянные на отрезках* $[t_{k-1}, t_k]$ *функции, а любая достаточно гладкая функция может быть приближена на* k*-ом отрезке в норме* $\mathbf{C}$ *элементами пространства* L_k^A *с асимптотическим при* $(t_k - t_{k-1}) \to 0$ *порядком* m_k, *то погрешность аппроксимации схемы* (24) *на точном решении в каждом из узлов* t_k *имеет асимптотический порядок не менее чем* $\min\limits_k\{2m_k + 1\}$. *Если же выполнено и ограничение* $B_l J^{-1} B_l^T = B_r J^{-1} B_r^T$, *для* *матриц* B_l *и* B_r *из краевых условий* (20), *то вычислительная схема* (24) *порождает систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой может быть представлена в виде* $A = E_{n_1} + A_1 A_2$, *где* $I_J A_1 + A_1^T I_J = 0$, $I_J A_2 + A_2^T I_J = 0$, $n_1 = m \times (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$, *а* $I_J = J \otimes E_{n_2}$, $n_2 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Рассмотренные выше аналитическая и численная схемы приближённого анализа оказались очень эффективными для исследования жестких гамильтоновых линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительной симметрией. В гамильтоновом случае утверждения теорем 1 и 2 могут быть значительно усилены и детализированы [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00523.

Список литературы

[1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения.* — М.: Наука, 1979.

[2] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и стмметрические пространства.* — М.: Мир, 1964.

[3] Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1968.

[4] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* — М.: Наука, 1989.

[5] Белман Р. *Введение в теорию матриц.* — М.: Наука, 1976.

[6] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1988.

[7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* — М.: Наука, 1977.

[8] Киреев И.В. *Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных оболочек вращения.* Автореферат канд. диссертации. — Новосибирск, 1997.

Киреев Игорь Валерьевич
Адрес: Россия, 660036, Красноярск, Академгородок, ИВМ
тел.: 49–47–39,
факс:
e-mail: kiv@icm.krasn.ru