Дискретная математика

том 15 выпуск 2 * 2003

УДК 512.54

О порождающих тройках инволюций больших спорадических групп

© 2003 г. А. В. Тимофеенко

За исключением групп Бэби-Монстр B, Монстр M, группы Маклафлина McL и групп Матье M_{11}, M_{22}, M_{23} в каждой конечной простой спорадической группе указаны порождающие ее три инволюции, две из которых перестановочны. Если G — одна из групп M_{12}, M_{24}, HS, J_1, J_2, J_3, то найдены все такие пары чисел p, q, $p \leqslant q$, что $p = |ik|$, $q = |jk|$ для некоторых порождающих группу G инволюций i, j, k с условием $|ij| = 2$.

Указанные выше тройки инволюций обнаружены с помощью системы компьютерной алгебры GAP. Напомним, что в тройке инволюций, которые порождают одну из групп McL, M_{11}, M_{22}, M_{23}, любые две инволюции не перестановочны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02–01–00078.

1. Введение

Напомним [1], что к настоящему времени все конечные простые группы описаны. Они разделены на бесконечные серии знакопеременных групп и групп лиева типа, а также на серию из 26 исключительных (спорадических) групп. Большинство спорадических групп открыто сравнительно недавно (после 1964 г.) и требует объяснения своей исключительности. Беспрецедентность объема текста классификационного доказательства (до 20 000 журнальных страниц) выдвигает на первый план поиск нового доказательства, а также изучение самих конечных простых групп. В частности, с 1980 г. в Коуровской тетради [2] стоит проблема В. Д. Мазурова (проблема 7.30):

> какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Для бесконечных серий простых конечных групп ответ на этот вопрос нашел Я. Н. Нужин в цикле работ (см. [3] и библиографию в ней). Ответ оказался отрицательным только для знакопеременных групп A_6, A_7, A_8 и ряда линейных групп размерностей, меньших 5. В случаях положительного ответа искомые инволюции указаны в явном виде. Кроме того, Я. Н. Нужин поставил более общий вопрос:

> какие конечные простые группы являются гомоморфными образами группы Кокстера
> $$\mathrm{gr}(a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, acac, (ab)^p, (bc)^q)$$
> при фиксированных показателях p и q, особенно для $p, q \leqslant 6$?

Известно, что проблемой В. Д. Мазурова для спорадических групп занимался Б. Л. Абашеев [2]. Он доказал существование требуемых инволюций в каждой спорадической группе за исключением групп

$$M_{11}, \quad M_{22}, \quad M_{23}, \quad McL \tag{1}$$

и группы Монстр M. Для последней группы положительное решение проблемы В. Д. Мазурова нашел С. Нортон [2]. Результаты Б. Л. Абашеева и С. Нортона не опубликованы, а из сообщений в [2] следует, что существование в группе порождающих ее трех инволюций, две из которых перестановочны, доказано ими без явного построения самих инволюций.

В работе [4] автора доказано, что в тройке инволюций, которые порождают группу списка (1), любые два элемента не перестановочны. А для 14 спорадических групп там явно указаны порождающие их тройки инволюций, две из которых коммутируют.

В настоящей работе аналогичный результат получен еще для шести спорадических групп

$$J_4, \quad Co_1, \quad Fi'_{24}, \quad HN, \quad Th, \quad Ly. \tag{2}$$

Как и в [4], порождающие тройки инволюций строятся с помощью системы компьютерной алгебры GAP (см. `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`). Однако высокая степень подстановочного либо матричного представления каждой из этих групп потребовала создания новых алгоритмов поиска инволюций. Некоторые из них анонсированы в [5, 6].

Таким образом, вопрос о явном указании нужных инволюций остается открытым только для самых больших (и по количеству элементов и по степени представления) спорадических групп-монстров B и M. Компьютерные вычисления даже в группе Бэби-Монстр B упираются в значительные затраты времени.

Теорема 1. *За исключением групп Бэби-Монстр B, Монстр M, группы Маклафлина McL и групп Матье M_{11}, M_{22}, M_{23} в каждой конечной простой спорадической группе указаны порождающие ее три инволюции, две из которых перестановочны. Более того, если G — одна из групп*

$$M_{12}, \quad M_{24}, \quad HS, \quad J_1, \quad J_2, \quad J_3, \tag{3}$$

то найдены все пары (p, q) чисел p, q, $p \leqslant q$, такие, что $p = |ik|$, $q = |jk|$ для некоторых порождающих группу G инволюций i, j, k с условием $|ij| = 2$.

Отметим также, что интерес к порождающим тройкам инволюций в конечных простых группах вызван и запросами приложений. Одним из них является построение однородных графов (в которых любые две вершины инцидентны равному числу ребер). Указанные в теореме инволюции помещены в виде подстановок и матриц на сайте `http://icm.krasn.ru` 22 августа 2000 г. как файл стандартного GAP-формата.

2. Схема доказательства теоремы

Будем пользоваться терминологией и обозначениями из [7].

Автор искал нужные для теоремы инволюции с помощью системы компьютерной алгебры GAP. Отсутствующие в этой системе спорадические группы можно найти в электронном атласе Вилсона представлений конечных групп (см. Wilson R., `http://www.mat.bham.ac.uk/atlas/`).

Для каждой группы G определим множество

$$C_2(G) = \{(|ac|, |cb|) \mid G = \mathrm{gr}(a, b, c), |a| = |b| = |c| = |ab| = 2, |ac| \leqslant |cb|\}.$$

Например, для группы G списка (1) множество $C_2(G)$ пустое, а если

$$(p, q) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 4)\}, \quad (p, q) \in C_2(G),$$

то группа G не является простой.

Для доказательства теоремы достаточно построить для каждой группы G из (3) множество $C_2(G)$ и найти в 20 спорадических простых конечных группах порождающие их тройки инволюций, две из которых перестановочны. Поскольку эти тройки расположены на упоминавшемся выше сайте Красноярского алгебраического семинара (см. `http://icm.krasn.ru/seminar/seminar.html`), остается проверить перестановочность двух инволюций в каждой из этих троек и выяснить, будет ли такая тройка инволюций порождать соответствующую группу.

Доказательство теоремы фактически ведется отдельно для каждой спорадической группы. С другой стороны, удалось обойтись по-существу тремя алгоритмами. Разобьем 20 нужных нам групп теоремы на три подмножества и для каждого подмножества опишем алгоритм поиска порождающих группу троек инволюций.

Первое подмножество состоит из групп

$$\{M_{12}, M_{24}, HS, J_1, J_2, J_3\}.$$

Для каждой такой группы G строим все классы ее сопряженных инволюций. В группе G их не более двух. Затем с точностью до сопряженности перебираем все тройки инволюций, сохраняя те из них, которые порождают исследуемую группу и дают новые пары для множества $C_2(G)$. Увеличению скорости вычислений служит отказ от попадающих в максимальную подгруппу троек инволюций. Таким перебором было выяснено [4], что группы списка (1) не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Второе подмножество состоит из групп

$$\{ON, Fi_{23}, Fi'_{24}, HN, Co_3, He, Ru, Suz, Co_1, Co_2, F_{22}\}$$

(в построении множества HN принимал участие А. И. Макосий, а множества Ru — Е. И. Кузнецов).

В каждой группе G из данного множества инволюции находятся с помощью случайного выбора в классе сопряженных инволюций либо группы, либо ее максимальной подгруппы небольшого порядка. Проверка на порождаемость группы G найденной тройкой инволюций происходит без участия теоретико-вероятностных алгоритмов.

Третье множество состоит из групп

$$\{J_4, Ly, Th\}.$$

В этих группах напрямую не удается проверить, порождают ли три найденные инволюции соответствующую спорадическую группу G. Приходится опираться на описание ее максимальных подгрупп. В одной из них так выбираются инволюции i, j, что в максимальных подгруппах группы G, содержащих элементы порядка $|ij|$ нет элементов некоторого порядка n. Тогда ищем такую инволюцию k, что группа $\mathrm{gr}(i, j, k)$ обладает элементом порядка n. Следовательно, $\mathrm{gr}(i, j, k) = G$, и если $ki = ik$ или $jk = kj$, то i, j, k — искомая тройка инволюций.

Для групп

$$M_{12}, M_{24}, HS, J_1, J_2, Co_2, Co_3, Fi_{22}, Fi_{23}, Ru, ON, He, Suz \tag{4}$$

теорема доказана в [4].

После публикации [4] список спорадических групп, в которых указаны три порождающие их инволюции, пополнен группами (2), поэтому именно для них перечисленные выше алгоритмы и будут описаны подробнее.

Доказательство теоремы начнем с группы J_3.

3. Третья группа Янко J_3

Порождающие группу J_3 подстановки a, b берем из электронного атласа Вилсона. В виде групповых слов алфавита $\{a, b\}$ этот атлас содержит порождающие элементы максимальной в J_3 подгруппы H_1. Строим множество B всех инволюций группы H_1. Оказалось, что $|B| = 323$. Поскольку все инволюции группы J_3 сопряжены и $|a| = 2$, множество C всех инволюций группы J_3 получаем из класса a^{J_3} ее сопряженных инволюций. Переставим элементы множества C так, чтобы первые ее 323 элемента составляли множество B. Теперь фиксируем первую в C инволюцию i. Вторая, обозначим ее через j, пробегает все инволюции из C, начиная со второй и заканчивая предпоследней. Для каждой такой инволюции j находим порядок $|ij|$ и выбор третьей инволюции k осуществляем так. Сначала берем в качестве k следующую за j инволюцию в C, а если $j \in B$, то k — 324-я инволюция списка B. Затем находим порядки $|ik|$, $|jk|$. Если оба эти числа и число $|ij|$ отличны от двойки, то в качестве k берем следующую в списке C инволюцию. Если двойка встречается, то составляем пары порядков произведений — кандидаты для попадания в множество $C_2(J_3)$. Наконец, если среди этих кандидатов хотя бы один еще не был обнаружен, то проверяем справедливость равенства $|\mathrm{gr}(i, j, k)| = |J_3|$. Если ответ положительный, то i, j, k — искомые инволюции, а в множестве $C_2(J_3)$ указаны неизвестные элементы (один, два или три). Оказалось, что

$$\begin{aligned} C_2(J_3) = \{&(3, 10),\ (3, 12),\ (3, 15),\ (3, 17),\ (4, 9),\ (4, 10),\ (4, 15),\\ &(5, 6),\ (5, 8),\ (5, 9),\ (5, 10),\ (5, 12),\ (5, 15),\ (5, 17),\\ &(6, 6),\ (6, 8),\ (6, 9),\ (6, 10),\ (6, 12),\ (6, 15),\ (6, 17),\\ &(8, 9),\ (8, 10),\ (8, 12),\ (8, 15),\ (8, 17),\\ &(9, 9),\ (9, 10),\ (9, 12),\ (9, 15),\ (9, 17),\\ &(10, 10),\ (10, 12),\ (10, 15),\ (10, 17),\\ &(12, 12),\ (12, 15),\ (12, 17),\ (15, 15),\ (15, 17),\ (17, 17)\}. \end{aligned}$$

4. Четвертая группа Янко J_4

Как известно (см., например, электронный атлас Вилсона), в группе J_4 представитель только одного класса сопряженных максимальных подгрупп обладает элементом порядка 43. Он является группой Фробениуса $H_{12} = (e) \leftthreetimes (f)$, причем $|e| = 43$, $|f| = 14$. В ее диэдральной подгруппе $\mathrm{gr}(e, f^7)$ берем инволюции $i = f^7$ и $j = ei$. Понятно, что $|ij| = 43$, и если в централизаторе $C_{J_4}(i)$ взять инволюцию k, $k \neq i$, то $\mathrm{gr}(i, j, k) = J_4$. Итак, доказано существование в группе J_4 трех порождающих ее инволюций, две из которых перестановочны.

Опишем теперь алгоритм построения элементов i, j, k. Будем применять обозначения из атласа Вилсона, где матрицы a и b размерности 112×112 над полем $GF(2)$ названы стандартными порождающими группы J_4. Там же находим порождающие ее максимальную подгруппу H_{12} элементы h_1 и h_2 в виде групповых слов в алфавите $\{a, b\}$. Теперь подключаем систему компьютерной алгебры GAP. Оказывается, что $|h_1h_2| = 14$, $|h_1| = 2$. Возьмем $i = (h_2h_1)^7$, $j = h_1$ и проверим справедливость равенства $|ij| = 43$.

Строить централизатор $C_{J_4}(i)$ — задача неподъемная для доступных автору компьютеров. Поэтому находим все инволюции в какой-нибудь небольшой подгруппе и проверяем, нет ли среди них перестановочных с инволюцией i. В качестве небольшой подгруппы в атласе Вилсона берем десятую в порядке убывания порядков максимальную подгруппу H_{10} группы J_4. Подгруппа H_{10} задана там своими порождающими словами h'_{10} и h''_{10} в алфавите $\{a, b\}$, то есть матрицами. Попытаемся с помощью системы GAP найти в H_{10} все перестановочные с i инволюции.

Поскольку $H_{10} \simeq PSU_3(9)$, удобно пользоваться точным подстановочным представлением 28-й степени группы $PSU_3(9)$. Оно требует значительно меньших ресурсов машины, чем 112-мерное линейное представление. Становится возможным для каждой инволюции k_{10} из H_{10} найти ее запись групповым словом в алфавите $\{h'_{10}, h''_{10}\}$. Точнее, на базе подстановочного представления 28-й степени группы H_{10} система GAP строит еще одно представление группы H_{10}. Композиция двух этих точных представлений отображает матрицы h'_{10} и h''_{10} в абстрактные символы x_1 и x_2, а каждую инволюцию k_{10} из $C_{H_{10}}(i)$ — в групповое слово в алфавите $\{x_1, x_2\}$. Теперь символам x_1 и x_2 присваиваем матричные значения h'_{10} и h''_{10} соответственно, а считанная заново запись инволюции k_{10} произведением элементов x_1 и x_2 дает k_{10} в виде 112-мерной матрицы.

Вычислим порядок $|ik_{10}|$. Оказалось, что все такие порядки четные, но ни один из них не равен 2. Однако, каждая инволюция $(ik_{10})^{|ik_{10}|/2}$, обозначим ее посредством k, перестановочна с i и отлична от i. Порождающая группу J_4 тройка (i, j, k) инволюций, две из которых (i и k) перестановочны, построена.

Громоздкость матриц i, j, k не позволяет привести их здесь. Они могут быть найдены на упоминавшемся сайте Красноярского алгебраического семинара. С другой стороны, инволюции i, j, k представлены ниже произведениями порождающих группу J_4 стандартных матриц a и b из электронного атласа Вилсона:

$$j = (((ab)^3bb)^6)^{abab((ab)^3babb)^{26}},$$

$$i = ((((ababb)^2ab^3)^3)^{((ab)^3babb)^{33}(ab)^{22}} j)^7,$$

$$k = (ia^{b(ba)^8(ab)^{18}})^8.$$

Пусть

$$x = a^{b(ba)^8(ab)^{18}},$$
$$y = (ba)^{-24}(ab)^{16}(abababb)^4(ab)^{-16}(ba)^{24},$$
$$z = (((ababbababbab^3)^3)^{((ab)^3babb)^{33}(ab)^{22}}j)^7,$$

где a и b — стандартные порождающие группы J_4. Каждое из следующих произведений матриц x, y и z можно взять в качестве инволюции k в порождающей группу J_4 тройке инволюций i, j, k, две из которых перестановочны:

$$(xyxy^4xy^2xy^5xz)^{11},\quad (xz)^8,\quad (xyxyxyxyxy^2xyz)^{12},$$
$$(y^4xyxyxy^2xyxyxy^3z)^{12},\quad (yxy^3xy^2z)^{10},$$
$$(yxyxyxyxy^2xyxz)^{11},\quad (xyxy^3xy^2xz)^8,$$
$$(yxy^4xy^2xy^5z)^8,\quad (xyxyxyxy^4xy^4xyxyz)^8,\quad (xy^5xyxz)^{10},$$
$$(yxy^2xy^4xy^5z)^{12},\quad (y^5xyz)^{10},\quad (yxy^2xy^4xy^2xy^3z)^6,$$
$$(xyxyxyxy^2xyxyz)^6,\quad (xy^2xy^3xyxz)^{11},$$
$$(yxy^2xy^2xyxy^2xy^2xz)^8,\quad (y^5xyxyxy^2xyxyxy^2z)^5,$$
$$(yxyxyxy^2xyxyxz)^8,\quad (y^2xy^3xyz)^{11},\quad (y^3z)^8,$$
$$(yxy^3xy^5z)^{11},\quad (y^2xyxyxy^2xyxyxy^5z)^8,$$
$$(xyxy^2xy^2xyxy^2xy^2z)^{12},\quad (xyxyxy^4xy^4xyxyxyz)^5,$$
$$(xyxyxy^2xyxyxyz)^{11},\quad (y^3xyxy^5xy^3z)^{10},$$
$$(xy^2xy^2xyxy^2xy^2xyz)^{11},\quad (xy^3xz)^{11},$$
$$(xyxy^3xy^5xz)^3,\quad (xyxyxyxyxy^4xyxyz)^8,$$
$$(xy^2xyxy^2xy^2xyxy^2z)^6,\quad (yxyxy^4xy^4xyxyxyxz)^{11},$$
$$(yxyxy^2xyxyxyxz)^8,\quad (yxy^2xyxy^2xy^2xyxyz)^{12},$$
$$(y^2xyxy^2xy^2xyxy^2xz)^8,\quad (xy^3xyxy^2xy^3xy^3z)^6,$$
$$(y^2xy^2xyxy^2xy^2xyxz)^{11},\quad (xyxy^2xyxyxyxyz)^8,$$
$$(xyxyxy^3xy^2xy^5xz)^{12},\quad (xy^4xy^2xz)^{11},$$
$$(xyxy^5xz)^{10},\quad (y^2xyxy^3xy^2xy^4z)^{12},\quad (y^2xy^3xy^4z)^{10},$$
$$(xy^2xyxy^2xyxyxyxy^5z)^5,\quad (y^2xyxy^2xyxyxyxy^5z)^{12},$$
$$(yxy^2xyxyxyxyxz)^{11},\quad (yxyxy^3xy^2xy^5z)^{12},$$
$$(xy^2xy^4xy^2xy^4z)^{11},\quad (y^2xy^4xy^2xy^4z)^2,\quad (y^4xy^2z)^{10},$$
$$(yxy^5z)^{11},\quad (y^2xyxy^5xy^4z)^{11},\quad (xy^2xy^3xy^4xz)^{12},$$
$$(yxyxy^2xy^2xyxy^2xyz)^8,\quad (y^2xy^4z)^6,\quad (xy^5xy^2xy^3xyxyxz)^6,$$
$$(yxy^2xy^3xyxy^5z)^{11},\quad (xy^3xy^3z)^6,\quad (y^3xy^3z)^{12},$$
$$(y^4xyxy^3xy^2xy^2z)^{10},\quad (xy^2xy^4xz)^{12},\quad (y^3xy^4xy^2xy^3z)^5.$$

Вычисление пары ($|ij|$, $|jk|$) или ($|ijk|$, $|jk|$) для построенных выше инволюций i, j,

k с условиями $J_4 = \mathrm{gr}(i, j, k)$, $ik = ki$, приводит к следующему включению:

$$\begin{aligned} C_2(J_4) \supseteq \{&(4,11),\ (4,43),\ (8,12),\ (8,20),\ (8,30),\ (8,37),\ (8,43),\ (8,66),\ (10,10),\\ &(10,31),\ (10,43),\ (10,44),\ (10,66),\ (11,12),\ (11,43),\ (12,15),\\ &(12,16),\ (12,24),\ (12,30),\ (12,37),\ (12,43),\ (15,20),\ (15,24),\\ &(15,43),\ (16,16),\ (16,22),\ (16,30),\ (16,31),\ (16,33),\ (16,40),\\ &(16,43),\ (16,66),\ (20,20),\ (20,31),\ (20,37),\ (20,43),\ (20,66),\\ &(22,23),\ (22,24),\ (22,29),\ (22,30),\ (22,31),\ (22,37),\ (22,40),\\ &(22,43),\ (22,44),\ (23,43),\ (24,24),\ (24,31),\ (24,33),\ (24,37),\\ &(24,40),\ (24,43),\ (24,66),\ (29,43),\ (30,43),\ (31,37),\ (31,43),\\ &(33,40),\ (33,43),\ (37,43),\ (40,43),\ (43,43),\ (43,44),\ (43,66)\}. \end{aligned}$$

5. Группа Лайенса Ly

Как известно (см., например, электронный атлас Вилсона), в группе Ly все максимальные подгруппы с элементом порядка 67 сопряжены и являются группой Фробениуса $H_8 = (e) \leftthreetimes (f)$, причем $|e| = 67$, $|f| = 22$. В ее диэдральной подгруппе $\mathrm{gr}(e, f^{11})$ берем инволюции $i = f^{11}$ и $j = ei$. Понятно, что $|ij| = 67$ и если в централизаторе $C_{Ly}(i)$ взять инволюцию k, $k \neq i$, то $\mathrm{gr}(i, j, k) = Ly$. Итак, доказано существование в группе Ly трех порождающих ее инволюций, две из которых перестановочны.

Опишем теперь алгоритм построения элементов i, j, k. Будем применять обозначения из электронного атласа Вилсона, где матрицы a и b размерности 111×111 над полем $GF(5)$ названы стандартными порождающими группы Ly. Там же находим порождающие ее максимальную подгруппу H_8 элементы a_8 и b_8 в виде групповых слов в алфавите $\{a, b\}$. Теперь подключаем систему компьютерной алгебры GAP. Оказывается, что $|b_8a_8| = 22$, $|a_8| = 2$. Возьмем $i = (b_8a_8)^{11}$, $j = a_8$ и проверим справедливость равенства $|ij| = 67$.

Поскольку построение централизатора $C_{Ly}(i)$ требует больших машинных ресурсов, к успеху в поиске перестановочных с i инволюций приходим так. Пусть a_1 и b_1 — порождающие изоморфной группе лиева типа $G_2(5)$ максимальной подгруппы H группы Ly. В алфавите $\{x, y\}$ рассмотрим групповые слова $l_1, \dots, l_{252}$. Они являются записями инволюций группы $PSU_3(9) \leftthreetimes (d)$, где $|d| = 2$, в виде произведений порождающих группу $PSU_3(9) \leftthreetimes (d)$ подстановок x, y. Присвоив символам x, y матричные значения $x = a_1$, $y = b_1$, считываем снова слова $l_1, \dots, l_{252}$, которые после этого становятся 111-мерными матрицами группы Ly. Для каждого $r = 1, \dots, 252$ вычисляем порядок $|il_r|$. Если он четен, то строим инволюцию $k = (il_r)^{|il_r|/2}$ и проверяем, во-первых, ее перестановочность с инволюциями i, j, во-вторых, лежит ли она вне подгруппы H_8 группы Ly. Когда ответ на оба вопроса положительный, получаем $Ly = \mathrm{gr}(i, j, k)$, причем две инволюции в этой порождающей тройке перестановочны.

Громоздкость матриц i, j, k не позволяет привести их здесь, они могут быть найдены на упоминавшемся ранее сайте Красноярского алгебраического семинара. С другой стороны, порождающие группу Ly инволюции i, j, k, две из которых перестановочны, представлены ниже произведениями порождающих группу Ly стандартных матриц a и b

из атласа Вилсона, любые две из этих троек отличаются только инволюцией k:

$$
\begin{aligned}
j &= a^{(abababb)^{17}(abb)^{21}},\\
i &= ((ababbabbbabbb)^{(abb)^{16}(abababb)^{30}}j)^{11},\\
x &= (ababbb)^7 a (ababbb)^{-7},\\
y &= (abababb)^{-25}(abababbab)^3(abababb)^{25},\\
k &\in \{ix^{15}, i(xyxyxy^3xyxy^3xy^3x)^{12}, i(xyxyxyxy^2xyxy)^{12},\\
& i(xyxyxyxy^2xyxyxy^2xyxy^2xyxy)^{12},\\
& i(xyxyxy^2xyxyxy^2xyxy^2xyxyxy)^{20},\\
& i(yxyxyxy^2xyxyxy^2xyxy^2xyxyx)^{21},\\
& i(xyxyxy^2xyxy^2xyxyxy^2xyxyxy)^{14}\}.
\end{aligned}
$$

Приходим к построенному с помощью перечисленных выше инволюций i, j, k включению

$$
\begin{aligned}
C_2(Ly) \supseteq \{&(15,30),\ (15,67),\ (18,37),\ (18,67),\ (21,37),\ (21,40),\ (21,67),\\
&(24,37),\ (24,67),\ (30,67),\ (37,42),\ (37,67),\ (40,67),\ (42,67)\}.
\end{aligned}
$$

6. Спорадическая группа Томпсона Th

Как известно [8, 9] (см. также электронный атлас Вилсона), в группе Th представители только двух классов сопряженных максимальных подгрупп содержат элементы порядка 19. Оба они, H_4 и H_{12}, то есть четвертый и двенадцатый по невозрастанию порядков, не имеют элементов порядка 13. Поэтому инволютивные матрицы i, j, k группы Th в силу того, что $|ij| = 19$ и $|(ij)^6k| = 13$, порождают ее. А ввиду равенств $|ik| = 2$, $|jk| = 18$, $|jik| = 18$ инволюции i и k, а также i и ik перестановочны, причем порядки произведений неперестановочных инволюций в тройках (i, j, k) и (i, j, ik) составляют пары $(18, 19)$ и $(18, 18)$ соответственно.

Указанные выше порядки элементов 248-мерного линейного представления группы Томпсона над полем из двух элементов найдены в системе компьютерной алгебры GAP. Стандартные порождающие группу Томпсона матрицы обозначены в процитированном уже атласе буквами a и b. Оказалось, что $i = a$, $j = a^{bababb}$. Обе инволюции взяты из максимальной подгруппы $H_4 = \mathrm{gr}(a, bababb)$, а для построения третьей инволюции k потребовалось довольно длинное произведение сомножителей i, j и еще одной инволюции из максимальной подгруппы $H_{13} \simeq PSL_3(3)$ (содержащей элементы 13-го порядка).

Порождающие группу Томпсона Th инволюции i, j, k расположены на сайте Красноярского алгебраического семинара. Вычисление порядков произведений некоторых из них подтверждает следующее включение

$$C_2(Th) \supset \{(18,18),\ (18,19)\}.$$

7. Группа Фишера Fi'_{24}

Искомые тройки инволюций строятся ЭВМ с помощью системы компьютерной алгебры GAP. Алгоритм незначительно отличается от применявшегося для спорадических групп с одним классом сопряженных инволюций и высокой степенью подстановочного представления (см. сайт Красноярского алгебраического семинара). Разница в том, что сначала в группе Fi'_{24} строится централизатор инволюции i из порождающего множества этой группы. Такую систему $\{i, b\}$ порождающих можно найти, например, в атласе Вилсона представлений конечных групп. Остается к инволюции i добавлять инволюцию j из построенного централизатора и в классе сопряженных инволюций группы Fi'_{24} выбирать еще один элемент k до тех пор, пока порождающий b не будет лежать в $\mathrm{gr}(i, j, k)$.

Если проверку включения $b \in \mathrm{gr}(i, j, k)$ осуществлять только когда в $C_2(Fi'_{24})$ не указана хотя бы одна пара из $(|ik|, |jk|)$, $(|ik|, |ijk|)$, $(|jk|, |ijk|)$, то, остановив счет после рассмотрения сотни подряд элементов k, не приведших к появлению в $C_2(Fi'_{24})$ новых пар, получаем включение

$$C_2(Fi'_{24}) \supseteq \{(4,12),\ (5,6),\ (5,8),\ (5,10),\ (5,12),\ (6,6),\ (6,8),\ (6,10),\ (6,12),\ (8,12),\ (10,10),\ (10,12),\ (12,12)\}.$$

8. Группа Харады–Нортона HN

За несколько часов компьютер Pentium III, 533 MHz, нашел порядок группы Харады-Нортона HN. Значит, технические возможности проверки порождаемости этой группы данными элементами (подстановками 1140000-й степени) имеются.

Сначала в самой маленькой максимальной подгруппе H_{14} порядка 47320 группы HN находим подгруппу Клейна порядка 4. Делается это так. Строится силовская 2-подгруппа группы H_{14}, составляется список ее инволюций и для каждой из них вычисляется порядок класса сопряженных с ней элементов. Выбрав представители классов попарно различных порядков, получаем список всех инволюций в виде объединения самих классов. Одну из инволюций этого списка обозначаем буквой i. Затем перебираем другие до тех пор, пока не встретится такая инволюция j, что $ij = ji$.

Третью нужную нам инволюцию k будем искать в классе $c^{H_{12}}$ сопряженных инволюций другой максимальной в группе HN подгруппы H_{12}. Она изоморфна расширению группы Матье M_{12} посредством группы второго порядка. В атласе Вилсона находим порождающие c и d подгруппы H_{12}. Оказалось, что $|c| = 2$. Инволюция k выбирается в классе $c^{H_{12}}$ случайным образом и на каждом шаге проверяется равенство $\mathrm{gr}(i, j, k) = HN$. Второй шаг оказался результативным, причем

$$C_2(HN) \supset \{(10,10),\ (10,12)\}.$$

9. Группа Конвея Co_1

В атласе Вилсона представлений конечных групп нет подстановок, порождающих группу Co_1. Однако она изоморфна фактор-группе группы Co_0 по ее центру порядка 2, а группа Co_0 порождена в атласе Вилсона перестановками степени 196560. Система GAP вычисляет центр C группы Co_0 и строит саму группу Co_1 как фактор-группу Co_0/C.

Тройку порождающих группу Co_1 инволюций i, j, k удобно искать среди прообразов в Co_0 так же, как это делалось для группы HN и Fi'_{24}.

Пусть $Co_0 = \mathrm{gr}(a_0, b_0)$, $Co_1 = Co_0/C$. Будем пользоваться порождающими a_0, b_0 из атласа Вилсона, где $|a_0| = 2$. В централизаторе $C_{Co_0}(a_0)$ берем инволюцию j_0. А третью инволюцию k_0 ищем в классе $a_0^{Co_0}$ сопряженных с ней элементов до тех пор, пока не получим равенства $\mathrm{gr}(a_0, j_0, k_0) = Co_0$. Положим теперь $i = a_0C$, $j = j_0C$, $k = k_0C$ и, вычислив порядки $|i|$, $|j|$, $|k|$, $|ik|$, $|jk|$, получаем равенство $Co_1 = \mathrm{gr}(i, j, k)$ и включение

$$C_2(Co_1) \ni (10,\ 10).$$

Список литературы

1. Горенстейн Д., *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* Мир, Москва, 1985.
2. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь.* Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 2002.
3. Нужин Я. Н., Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II. *Алгебра и логика* (1997) **36**, №4, 422–440.
4. Тимофеенко А. В., О порождающих тройках некоторых спорадических групп. Деп. ВИНИТИ 19.03.2001, №693–В2001.
5. Тимофеенко А. В., Порождающие тройки инволюций групп Лайонса и Янко J_4. *Тезисы докл. Украинского матем. конгресса.* Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2001, с. 50.
6. Макосий А. И., Тимофеенко А. В., О порождающих группы Харады–Нортона и Фишера Fi'_{24} тройках инволюций. *Тезисы докл. 2-го Всесибирского конгресса женщин-математиков.* Красноярский госунив., Красноярск, 2002, 133–134.
7. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп.* Наука, Москва, 1982.
8. Linton S. A., The maximal subgroup of the Thompson group. *J. London Math. Soc.* (1989) **39**, №1, 79–88.
9. Linton S. A., Corrections to “The maximal subgroup of the Thompson group.” *J. London Math. Soc.*, (1991) **43**, №2, 253–255.

Статья поступила 13.06.2002.