

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.958:536.25
N госрегистрации 01201356263

УТВЕРЖДЕН
Протоколом заседания
Ученого совета
от 17.02.2015 № 3/2015

Председатель Ученого совета
член-корреспондент РАН
_____ В. В. Шайдуров
" ___ " _____ 2015 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

БАЗОВЫЙ ПРОЕКТ III.22.4.3 "МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД"
ПРОГРАММЫ СО РАН III.22.4 "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ
ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД". № ГОС. РЕГИСТРАЦИИ 01201356263
(промежуточный)

Руководитель темы
д.ф.-м.н., профессор

_____ В.К. Андреев
" ___ " _____ 2015 г.

Красноярск 2015

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В.К. Андреев
	(подпись, дата)	
Исполнители: г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.М. Белолипецкий
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько
	(подпись, дата)	
н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.В. Шмидт
	(подпись, дата)	
м.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Т.В. Якубайлик
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	И.И. Рыжков
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова
	(подпись, дата)	
инженер	_____	Е.П. Магденко
	(подпись, дата)	
инженер	_____	Е.Н. Черемных
	(подпись, дата)	
Нормоконтролер	_____	А.В. Вяткин
	(подпись, дата)	

РЕФЕРАТ

Отчёт 28 с., 11 рис., 1 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФфуЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ СРЕДЫ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач механики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ..

В результате исследований за отчётный 2014 год построены на основе метода симметрий новые точные решения уравнений жидких сред (идеальной и вязкой жидкости, вязкой теплопроводной жидкости); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных и термоконцентрационных сил; разработаны комплексы программ расчётов устойчивости конвективных течений с поверхностями раздела и стратифицированных течений в солёных озёрах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми для широкого класса жидких сред; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано.

Степень внедрения – результаты опубликованы или приняты в печать в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Применение методов симметрий к моделям уравнений свободной турбулентности и бинарных смесей с нелинейной силой плавучести. Анализ определяющих уравнений и вычисление непрерывных групп преобразований.....	6
2 Исследование двухслойных течений жидких сред, в том числе наножидкостей, и их устойчивости: совместного течения тонкой жидкой плёнки и спутного потока газа, двумерных течений жидкой плёнки и океанических течений с учётом эффекта термодиффузии.....	9
3 Проведение длительных измерений гидрофизических параметров в отдельных областях озера Шира.....	13
4 Продолжение работ по плану междисциплинарного проекта № 44 «Геометрические и алгебраические методы нахождения точных решений уравнений математической физики и механики сплошных сред» (№ гос. регистрации 01201255325). Решение задачи групповой классификации для уравнений трёхмерных течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах и уравнений гидростатической модели.....	14
5 Продолжение работ по плану междисциплинарного проекта № 116 «Микро- и наноразмерные многофазные неизотермические течения» (№ гос. регистрации 01201354623). Исследование однонаправленных и двумерных движений жидкостей с полным энергетическим условием на поверхности раздела.....	18
6 Продолжение работ по плану партнерского проекта № 38 «Фундаментальные задачи конвекции в неоднородных средах: теория, эксперимент и новые приложения» (№ гос. регистрации 01201252998). Изучение механизмов неустойчивостей стационарных конвективных течений при наличии поверхностей раздела и свободной границы. Построение на основе метода симметрий новых классов точных решений уравнений конвективных движений жидких сред с непостоянными коэффициентами переноса....	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	26
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	27

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом механики сплошных сред. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

1 *Применение методов симметрий к моделям уравнений свободной турбулентности и бинарных смесей с нелинейной силой плавучести. Анализ определяющих уравнений и вычисление непрерывных групп преобразований*

Построено точное решение одномерных уравнений термодиффузионного теплообмена для переменных коэффициентов диффузии D и термодиффузии D^θ . Известно, что для многих бинарных смесей коэффициенты переноса зависят от температуры линейно и этот случай выделяется групповой классификацией.

Вычислены зависимости коэффициентов диффузии и термодиффузии от температуры в диапазоне от 10 до 40 °C для смеси вода-этанол при концентрации последнего 0.498. Дано уравнение с экспериментальными данными. Если коэффициент температуропроводности постоянный, на границах слоя $z=0$ и $z=L$ заданы температуры $T=10$ °C и $T=40$ °C соответственно, а также выполнено условие на концентрацию

$$L^{-1} \int_0^L C dz = C_0 = 0.498,$$

то решение поставленной задачи выражается формулами

$$T = 30z + 10, \quad C = 0.092z + 0.055 \ln(3936428571z + 1721785714) - 0.75.$$

Распределение концентрации с переменными коэффициентами переноса существенно нелинейное даже для простой геометрии задачи.

Исследованы условия существования уравнений однонаправленного стационарного термодиффузионного течения при линейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации (это инвариантное решение).

Уравнения упомянутого течения таковы:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= g\rho_0(\beta_1\theta + \beta_2c), & \bar{p}_z &= \nu\rho_0 w_{xx}, \\ w\theta_z &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{zz}), & wc_z &= D(c_{xx} + c_{zz}) + D^\theta(\theta_{xx} + \theta_{zz}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $w(x)$ – горизонтальная компонента вектора скорости, $\theta(x, z)$ – температура, $c(x, z)$ – концентрация легкого компонента, $\bar{p}(x, z) = p + g\rho_0 x$ – модифицированное давление.

Установлено, что при выполнении неравенства

$$S = D\beta_1/\chi\beta_2 - \beta_1/\beta_2 - D^0/\chi \neq 0$$

поля температуры и концентрации выражаются формулами

$$\theta = \frac{1}{S\beta_2} \left[\frac{(a_0x + a_1)D}{2} z^2 + \left(\frac{D}{\chi} \alpha(x) - b_0x - b_1 \right) z + \gamma(x) \right],$$

$$c = \frac{1}{\beta_2} \left[\alpha(x)z + \beta(x) - \frac{\beta_1}{S\beta_2} \left(\frac{(a_0x + a_1)D}{2} z^2 + \left(\frac{D}{\chi} \alpha(x) - b_0x - b_1 \right) z + \gamma(x) \right) \right],$$

где функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ определяются при найденной функции скорости $w(x)$, постоянные a_0 , a_1 , b_0 , b_1 находятся из граничных условий. Для определения функции $w(x)$ выведено уравнение пятого порядка

$$w^V - g(a_0x + a_1)w/v = 0,$$

которое при $a_0 = 0$ интегрируется в квадратурах, при $a_0 \neq 0$ интегрируется только численно для конкретных краевых задач.

В случае если температура θ и концентрация c зависят от координаты z по линейному закону, построено точное решение уравнений (1), описывающее течение 70 % водного раствора изопропанола между двумя твердыми стенками $x=0$ и $x=h$. На стенках заданы условия прилипания для скорости, а также температуры 23°C на нижней и 27°C на верхней стенках. Для полного определения всех постоянных интегрирования дополнительно задаются условия нулевого расхода жидкости через поперечное сечение слоя, а также условие сохранения средней концентрации изопропанола в сечении $z=0$.

Доказана теорема, позволяющая проверять пассивность семейства образующих и гарантирующая существование и единственность точечного решения бесконечной системы уравнений в алгебре сходящихся степенных рядов, зависящих от произвольного конечного числа переменных. Получена редукция полуэмпирической модели дальнего безымпурсного турбулентного следа с закруткой к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Выписаны все, с точностью до групповых преобразований, решения переопределенной системы уравнений двумерных течений идеальной жидкости с дополнительным условием постоянства давления в частице.

Рассматривалась дифференциальная алгебра сходящихся степенных рядов, зависящих от произвольного конечного числа переменных. Определено понятие пассивного семейства образующих дифференциального идеала этой алгебры. Оно

является дальнейшим развитием понятия базиса Грёбнера. Доказана теорема, позволяющая проверять пассивность семейства образующих и гарантирующая существование и единственность точечного решения бесконечной системы уравнений в данной алгебре.

Изучалась полуэмпирическая модель дальнего безымпulsive турбулентного следа с закруткой, содержащая дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. Получена редукция модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, в свою очередь, решалась численно. Был использован модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Проведено сопоставление с имеющимися экспериментальными данными и результатами расчетов по полной модели.

Исследована на совместность переопределенная система уравнений двумерных течений идеальной жидкости с дополнительным условием постоянства давления в частице. Каждое решение этой системы можно интерпретировать, как движение жидкости со свободной границей. Выписаны все, с точностью до групповых преобразований, решения данной системы.

Проведено экспериментальное и численное исследование массопереноса в бинарной смеси с учетом эффекта Соре при наличии слабой конвекции.

Смесь находится в кубе $10 \times 10 \times 10$ мм³ и подвергается вибрации в горизонтальном направлении с частотой f . На стенках куба жидкость прилипает к ним и отсутствуют потоки вещества. В качестве смеси использовался раствор 90 % воды и 10 % ПА при 25 °С. Уравнениями модели были уравнения Обербека – Буссинеска с динамической вязкостью, линейно зависящей от температуры. На рисунке 1 показаны

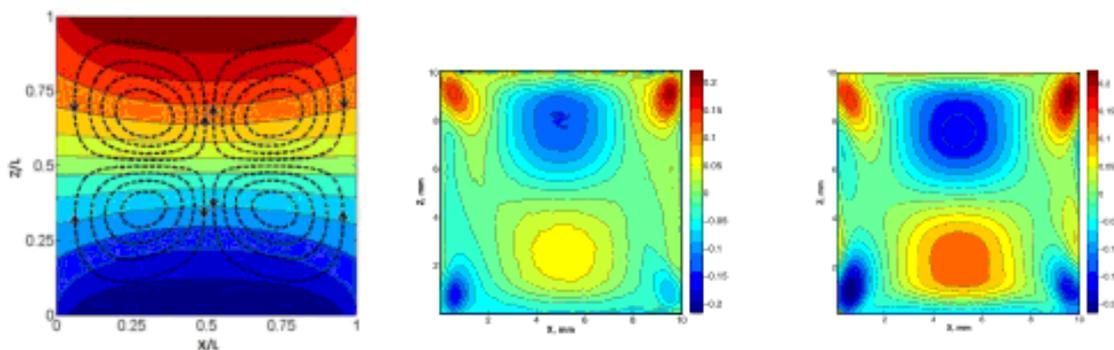


Рисунок 1 – Схема течения через 2 минуты после начала вибраций, $t = t_{ref}$.

результаты расчетов и экспериментальные данные для температурного поля в плоскости xz , когда $Gr = 1982$, шаг 15. Слева на рисунке 1 изображено температурное поле и изолинии основного течения, посередине рисунка 1 – экспериментальное отклонение основного температурного поля от проводящего состояния, а справа – численное отклонение. Рисунок 2 иллюстрирует поведение поля концентрации $\Delta\tilde{C}(x, z, t)^{III}$,

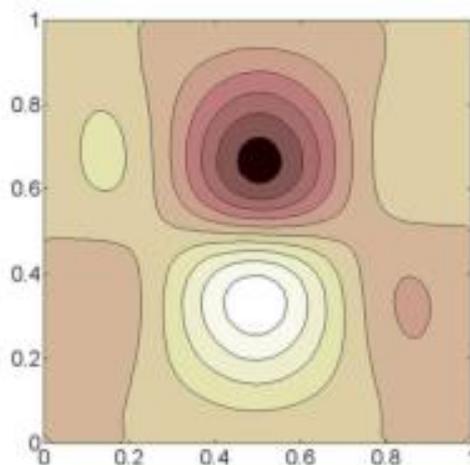


Рисунок 2 – Пространственное распределение поля концентраций

вызванное конвективными возмущениями поля температур на шаге III.

2 Исследование двухслойных течений жидких сред, в том числе наножидкостей, и их устойчивости: совместного течения тонкой жидкой плёнки и спутного потока газа, двумерных течений жидкой плёнки и океанических течений с учётом эффекта термодиффузии

Одним из важнейших методов исследования устойчивости является линейная теория, основанная на использовании метода малых возмущений. Данный подход приводит к спектральной задаче, которая, в большинстве случаев, не может быть решена численно и требует использования численных методов. Для исследования устойчивости решений задач гидродинамики в среде MATLAB реализован один из модулей программного комплекса в виде пакетов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента. Работа модуля позволяет осуществлять ввод входных данных (исходных дифференциальных уравнений и параметров задачи), получать решение спектральной задачи (собственное значение и собственные функции), просматривать, сохранять и загружать полученные результаты в виде таблиц значений и графиков. При реализации использован обширный функционал (возможность работы с внешними источниками, интеграция с процедурами, написанными на языках высокого уровня (FORTRAN и C), создание самостоятельного графического интерфейса и наборов

инструментов, расширяющих возможности вычислителя, интегрированная среда разработки, позволяющая реализовывать собственные алгоритмы) и встроенные инструменты (библиотеки математических функций, графический редактор) пакета MATLAB.

С помощью разработанного модуля решена задача об устойчивости течения в вертикальном канале с проницаемыми стенками в рамках модели микроконвекции, являющейся обобщением моделей движения вязкой теплопроводной жидкости и Обербека – Буссинеска. На стенках канала для температуры заданы граничные условия 2-го рода вида

$$k (\partial T / \partial n) = Q,$$

где Q – заданный поток тепла. Рассмотрены пространственные возмущения основного течения модельной среды (расплав кремния SiO_3), когда параметр микроконвекции $\eta > 1$. Рассчитаны поля возмущений функций скорости и температуры и характеристики возмущенного течения, на основе численных результатов доказана устойчивость течения. Исследовано влияние гравитации и величины потока тепла на характеристики течения. Видно, что в слабом гравитационном поле наиболее интенсивные возмущения формируются в центральной части канала на границе встречных потоков (рисунок 3 (а), 3 (б)). Здесь наиболее заметно стабилизирующее воздействие вязких сил вблизи стенок.

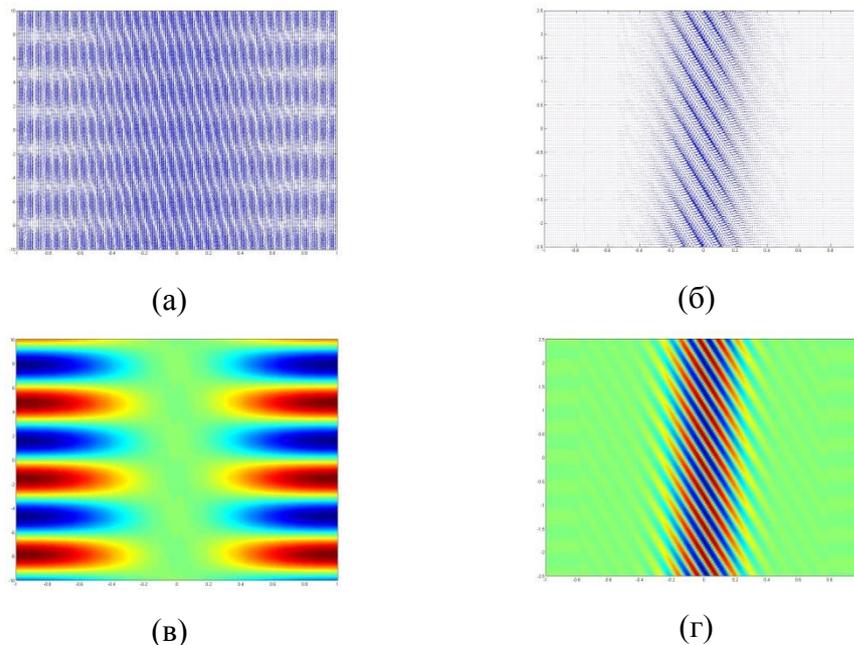


Рисунок 3 – Поле возмущений скорости (а, б) и температуры (в, г) в начальный момент времени при $h = 10$ см, $d = 5$ Вт, $g = g_0 \cdot 10^{-5}$: а, в) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; б, г) $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$

Причём, в случае длинноволновых возмущений, вблизи стенок также формируются ячеистые структуры (рисунок 3 (а)), которые разрушаются по мере удаления от стенок. При этом не происходит переноса тепловых возмущений в зону формирования косых гидротепловых валов в центре канала (рисунок 3 (в)).

При транспортировке жидких сред по каналам часто используется смазка стенок. Здесь исследуется точное решение уравнений движения трех жидкостей.

Рассматривается двумерное движение трёх несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в плоских слоях $0 < y < l_1$, $l_1 < y < l_2$, $l_2 < y < l_3$ с границами раздела $y = l_1$, $y = l_2$ и твердыми неподвижными стенками $y = 0$, $y = l_3$. Предполагается, что вектор скорости в слоях имеет вид $\mathbf{u}_j = (xu_j(y, t), v_j(y, t))$, температура – $\theta_j = a_j(y, t)x^2 + b_j(y, t)$, а давление – $\rho_j^{-1} p_j(x, y, t) = -f_j(t)x^2/2 + h_j(y, t)$ (здесь и далее $j = 1, 2, 3$). Коэффициент поверхностного натяжения σ_n на границах раздела линейно зависит от температуры: $\sigma_n(\theta) = \sigma_n^0 - \kappa_n \theta$, κ_n – температурный коэффициент поверхностного натяжения, $n = 1, 2$. Постоянные σ_n^0 предполагаются достаточно большими, поэтому поверхности раздела являются плоскими и стационарными. После подстановки в уравнения движения и энергии функции $a_j(y, t)$, $u_j(y, t)$ (функции $v_j(y, t)$ исключаются из уравнения сохранения массы) являются решениями сопряжённых начально-краевых задач для линейных параболических уравнений, причём условия сопряжения следуют из учёта термокапиллярного эффекта, непрерывности скоростей, температур, потоков тепла на поверхностях раздела. Причём функции $f_j(t)$ – искомые функции. Таким образом, рассматриваемая задача является обратной. Функции b_j и h_j находятся после определения выше указанных неизвестных. Источником движения является неравномерность распределения температуры на твёрдых границах.

Поставленная задача решается последовательно для функций a_j и скоростей u_j . Найдено точное стационарное решение задачи. Решение нестационарной задачи строится в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу. Доказано, что если функции $a_1(0, t)$ и $a_3(l_3, t)$ имеют конечные пределы при $t \rightarrow \infty$, то с ростом времени решение выходит на стационарный режим. Путем численного обращения преобразования Лапласа получена эволюция поля скоростей для системы силикон-вода-воздух. На рисунке 4 приведены профили безразмерных величин в слоях $\bar{u}_j = u_j / v_1$, $\xi = y / l_1$,

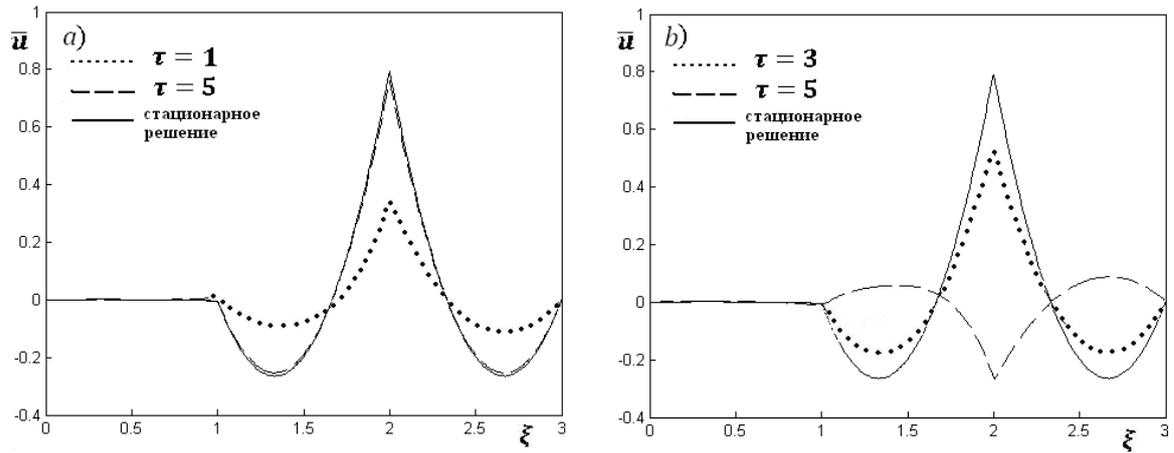


Рисунок 4 – Профили безразмерных величин

$\tau = \nu_1 t / l_1^2$ – безразмерное время. Слева на рисунке 4 изображен случай, когда $a_1(l_1, t) = 1 + e^{-t} \sin(t)$, а на справа, когда $a_1(l_1, t) = \sin(t)$ и решение не сходится стационарному. В первом случае, как и следовало ожидать, решение с ростом времени выходит на стационарный режим.

Исследована устойчивость нестационарного движения струи идеальной жидкости. Задача сведена к уравнению типа Пуакаре-Соболева и найдены асимптотики поведения свободной границы при больших временах.

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости имеют точное решение вида

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{kr}{2\tau}, \quad v = \omega_0 \tau r, \quad w = \frac{kz}{\tau}, \quad \tau = 1 + kt, \\
 \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) &= \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 \tau^2 - \frac{3}{4} \frac{k^2}{4\tau^2} \right) \left(r^2 - \frac{r_0^2}{\tau} \right) + \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{r_0},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где u, v, w — проекции скорости на оси цилиндрической системы координат r, φ, z ; p — давление; $k, \omega_0, p_0, r_0, \sigma$ — положительные постоянные; $\rho > 0$ — плотность жидкости. Это решение интерпретируется как равномерное растяжение со скоростью $w_0 = kh_0$ и вращение с угловой скоростью $\omega_0 \tau$ круглой струи, имеющей первоначальную длину h_0 и радиус r_0 . Во все моменты времени струя остаётся круглой, и её радиус убывает с ростом времени по закону $r = r_0 / \sqrt{\tau}$. На поверхности струи давление терпит скачок, равный $\sigma \sqrt{\tau} / r_0$, где постоянная σ суть коэффициент поверхностного натяжения.

Показано, что задача об устойчивости нестационарного трёхмерного движения (2) в цилиндрических лагранжевых координатах сводится к начально-краевой задаче для

одного уравнения типа Пуанкаре-Соболева с коэффициентами, зависящими от времени. Это уравнение необходимо решать в фиксированной области – начальном цилиндре, на границе которого искомая функция удовлетворяет уравнению 2-го порядка по времени с нелокальным оператором. Пользуясь спецификой поставленной задачи, удалось получить уравнение на амплитуду возмущений свободной границы. Получены результаты расчёта (и асимптотики) эволюции таких возмущений в зависимости от сил поверхностного натяжения и начальной завихренности.

3 Проведение длительных измерений гидрофизических параметров в отдельных областях озера Шира

С использованием ряда тестовых расчетов для модельных водоемов простой формы проведена адаптация известной модели GETM, часто применяющейся для моделирования течений в морях и заливах, для расчета течений в неглубоких замкнутых стратифицированных водоемах. Предложен малоразмерный численный алгоритм для описания многолетней динамики замерзания-таяния вечной мерзлоты.

Программа, в силу универсальности, позволяет рассчитывать течения практически в любых водоемах, но для этого требуется соответствующая настройка модели, так как процесс моделирования конкретного объекта подразумевает выбор из большого набора параметров. Для адаптации численного алгоритма был проведен ряд тестовых расчетов для модельных водоемов простой формы: прямоугольного бассейна с ровным дном, цилиндрического бассейна с ровным дном, параболического бассейна и бассейна с береговой линией реального озера (с линейными размерами примерно 4 км на 9 км) и ровным дном. Эффект апвеллинга для параболического бассейна на поперечных разрезах представлен на рисунках 5 и 6. На рисунке 5 изображены изотермы в параболическом бассейне при северо-западном ветре на среднем разрезе по долготе: слева - в начале расчета, справа - в конце расчета. На рисунке 6 представлены изотермы в параболическом бассейне при юго-восточном ветре на среднем разрезе по долготе: слева - в начале расчета, справа - в конце расчета.

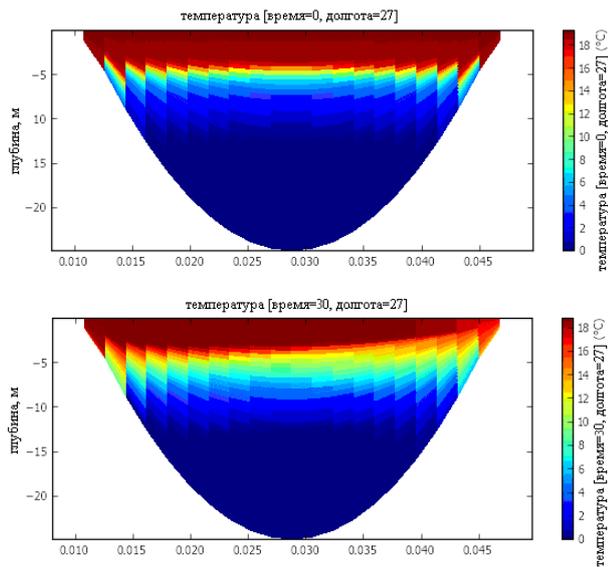


Рисунок 5 – Изотермы северо-западном ветре

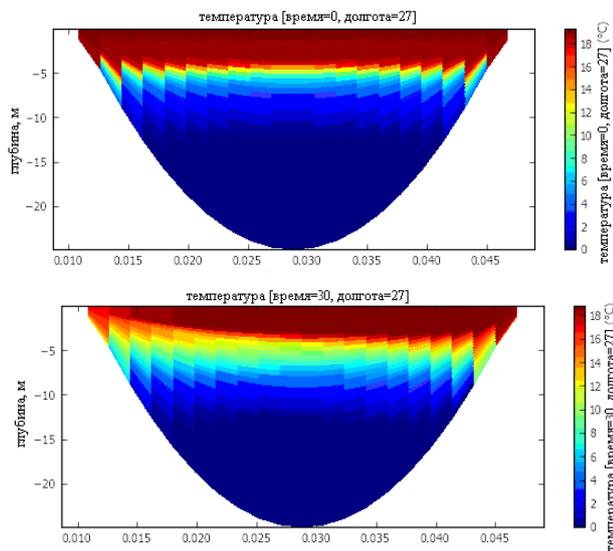


Рисунок 6 – Изотермы при юго-восточном ветре

4 Продолжение работ по плану междисциплинарного проекта № 44 «Геометрические и алгебраические методы нахождения точных решений уравнений математической физики и механики сплошных сред» (№ гос. регистрации 01201255325). Решение задачи групповой классификации для уравнений трёхмерных течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах и уравнений гидростатической модели

Рассматриваются уравнения тепломассопереноса при отсутствии движения с учетом эффекта термодиффузии

$$\begin{aligned}
T_t &= \chi(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \frac{\partial \chi}{\partial T}(T_x^2 + T_y^2 + T_z^2) + \frac{\partial \chi}{\partial C}(T_x C_x + T_y C_y + T_z C_z) \\
C_t &= D(C_{xx} + C_{yy} + C_{zz}) + \frac{\partial D}{\partial T}(T_x C_x + T_y C_y + T_z C_z) + \frac{\partial D}{\partial C}(C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) + \\
&+ D^\theta(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \frac{\partial D^\theta}{\partial T}(T_x^2 + T_y^2 + T_z^2) + \frac{\partial D^\theta}{\partial C}(T_x C_x + T_y C_y + T_z C_z).
\end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты температуропроводности χ , диффузии D и термодиффузии D^θ считаются функциями отклонений температуры T и концентрации C от их средних постоянных значений T_0 и C_0 . Относительно данных коэффициентов переноса решена задача групповой классификации: найдены аналитические представления данных параметров и дифференциальные операторы, допускаемые системой (3) при каждом конкретном виде классифицируемых функций. Вычислена основная алгебра операторов, допускаемых системой при произвольных значениях искоемых коэффициентов:

$$L_0 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z, 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, y\partial_x - x\partial_y, z\partial_x - x\partial_z, z\partial_y - y\partial_z \rangle.$$

Данная алгебра не содержит произвольных функций и, следовательно, является конечномерной, что является достаточно редкой особенностью для моделей, описывающих физические процессы. Непосредственными вычислениями было показано, что когда коэффициент температуропроводности χ существенно зависит от концентрации C , то решение задачи групповой классификации уравнений (3) совпадает с решением аналогичной задачи для полных уравнений конвективного теплопереноса, если в последних положить компоненты скорости равными нулю. Решение задачи в двумерном случае представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Решения для двумерного случая

χ, D	D^θ	операторы	w
$e^{(m+n)C/T} f_i$	$e^{(m+n)C/T} [-C/T(f_2 - f_1) + f_3]$	$L^0, Z + C^2$	T
$e^{(m+n)T} f_i$	$e^{(m+n)T} [-kT(f_2 - f_1) + f_3]$	$L^0, Z + T^3 + kC^2 + qC^3$	$C - kT^2/2 - qT$
$(kT + C)^{m+n} f_i$	$(kT + C)^{m+n} [k(f_2 - f_1) + (kT + C)f_3]$	$L^0, Z + kC^2 + C^1$	T
$e^{(m+n)T} f_i$	$e^{(m+n)T} [k(f_2 - f_1)e^{-lT} + f_3]$	$L^0, Z + T^3 + lkC^2 + lC^1$	$(C + kT + k/l)e^{-lT}$
$T^{m+n} f_i$	$T^{m+n-1} [-kT(f_2 - f_1) + f_3]$	$L^0, Z + T^1 + kC^2 + qC^3$	$C - kT - q \ln T$
$T^{m+n} f_i$	$T^{m+n} [k(f_2 - f_1)/(h-1) + T^{h-1} f_3]$	$L^0, Z + T^1 + kC^2 + hC^1$	$[C + kT/(h-1)]T^{-h}$
$T^{m+n} f_i$	$T^{m+n} [-k(f_2 - f_1) \ln T + f_3]$	$L^0, Z + T^1 + kC^2 + C^1$	$C/T - k \ln T$

Обозначения операторов, представленных в таблице 1:

$$Z_3 = (m-n)t\partial_t + (m-n)x\partial_x + (m-n)y\partial_y, T^1 = T\partial_T, T^3 = \partial_T, C^1 = C\partial_C, C^2 = T\partial_C, C^3 = \partial_C.$$

Из таблицы 1 видно, что коэффициенты переноса могут быть представлены степенными и экспоненциальными зависимостями от параметров состояния. Следует отметить, что классификация проведена с точностью до произвольных функций $f_j = f_j(w)$, $j = 2, 3, 4$, что позволяет более точно подобрать зависимость, аппроксимирующую экспериментальные данные.

На основе полученных результатов построены точные решения системы (3), когда коэффициенты диффузии и термодиффузии зависят от температуры по квадратичному закону:

$$D = D_0(1 + \alpha(T - T_0)^2), \quad S_T = S_{T_0}(1 + \beta(T - T_0)^2). \quad (4)$$

При $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ коэффициенты переноса являются постоянными и зависимость C от y линейна, как в стандартной модели Обербека-Буссинеска. На рисунке 7 показаны

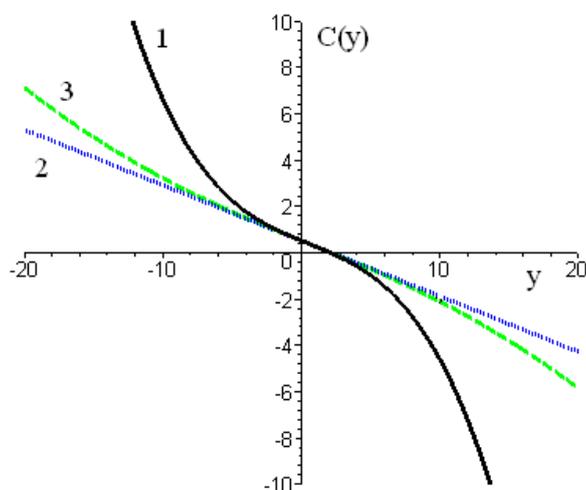


Рисунок 7 – Профили концентрации при различных зависимостях коэффициентов переноса

распределения функции, отвечающей отклонениям концентрации: кривая 1 построена при $\alpha \rightarrow 0$, т. е. для постоянного коэффициента диффузии и переменного параметра $Core$, кривая 2 – при $\beta \rightarrow 0$, т. е. для переменного коэффициента диффузии и постоянного параметра $Core$, кривая 3 – для общего случая, учитывающего формулу (4).

Из рисунка 7 видно, что существенные отличия начинают проявляться при достаточно больших y , при малых значениях продольной координаты зависимость C от y

близка к линейной. Тем самым учет переменных коэффициентов переноса важен для описания течений в достаточно протяженных по высоте каналах.

Для двумерных уравнений Эйлера идеальной жидкости, записанных в переменных траектории-потенциал Вебера, ищется частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 2 (трехмерная подалгебра $\langle \partial_\xi, \partial_x, \partial_\varphi \rangle$). Оно имеет вид

$$x = a(\eta, t)\xi + b(\eta, t), \quad y = \int_0^\eta \frac{d\eta}{a(z, t)};$$

$$a = f(t) \left[1 - v_\eta \int_0^t \frac{d\tau}{f^2(\tau)} \right], \quad b = u_1(\eta) f(t) \int_0^t \frac{d\tau}{f^2(\tau)},$$

$$\varphi = (aa_t + v_\eta) \frac{\xi^2}{2} + [(ab_t)_\eta - u_{1\eta}] \xi + \int_0^\eta \left(b_t b_\eta + \frac{y_t}{a} - v \right) d\eta$$

с произвольной функцией $f(t)$: $f(0) = 1$, $f_t(0) = 0$. Давление восстанавливается по формуле

$$p = l(\eta, t) - \frac{k(t)}{2} x^2(\xi, \eta) - gy(\eta, t), \quad l(\eta, t) = l(t) - \int_0^\eta \frac{y_u(\eta, t)}{a(\eta, t)} d\eta, \quad k(t) = \frac{f_u}{f(t)},$$

где $l(t)$ – произвольная функция времени. Найденное точное решение описывает вихревое движение слоя с неподвижной нижней твердой стенкой и верхней свободной границей, движущейся по закону

$$h(t) = \frac{1}{f(t)} \int_0^{h_0} \left[1 - v_\eta(\eta) \int_0^t \frac{d\tau}{f^2(\tau)} \right]^{-1} d\eta.$$

В зависимости от выбора функций $f(t)$ решение может разрушаться за конечное время (blow-up solution), быть периодическим, либо свободная граница монотонно приближается к твердой стенке с ростом времени.

Даны оценки сопряженной тепловой задачи, когда температура внутреннего шара радиуса $R_1 < R_2$ есть функция $u_1(r, \theta, \varphi, t)$, а внутри слоя $R_1 < r < R_2$ – функция $u_2(r, \theta, \varphi, t)$. При этом внутри шара и слоя имеются источники тепла $f_{1,2}(r, \theta, \varphi, t)$. Доказано, что если

$$|f_j(r, \theta, \varphi, t) - f_j^s(r, \theta, \varphi)| \leq A_j e^{-\gamma t}, \quad j = 1, 2,$$

где $\gamma > 0$, $A_j > 0$ – постоянные, то и температуры с ростом времени выходят на стационарный режим с экспоненциальной скоростью, причем показатель экспоненты зависит от физических свойств сред и радиусов R_1, R_2 .

Для случая, когда имеются только источники тепла в шаре $r \leq R_1$, а на внешней границе $r = R_2$ дополнительно к температуре задан поток тепла, то методом преобразования Лапласа решается обратная задача. Именно, получено уравнение в изображениях по Лапласу, определяющее внутренние источники тепла. Более подробно исследован случай тонкого сферического слоя.

5 Продолжение работ по плану междисциплинарного проекта № 116 «Микро- и наноразмерные многофазные неизотермические течения» (№ гос. регистрации 01201354623). Исследование однонаправленных и двумерных движений жидкостей с полным энергетическим условием на поверхности раздела.

Одной из особенностей функционирования систем охлаждения, в которых рабочая жидкая среда контактирует по некоторой поверхности с газовой фазой, является вызываемое потоком газа испарение жидкости на границе раздела. Интенсивность испарения, происходящего под действием инертного потока газа, зависит от расходов сред, их толщин, температур и физических свойств. Эффективность систем охлаждения может существенно зависеть от скорости испарения, поэтому возникает необходимость исследовать устойчивость различных режимов течений и влияние массопереноса на характер возможных неустойчивостей.

В рамках приближения Обербека-Буссинеска рассмотрена задача о двухслойном конвективном течении при наличии процесса испарения в горизонтальном канале с твёрдыми стенками. Область Ω_1 занимает вязкая теплопроводная жидкость, верхний слой Ω_2 представляет собой смесь газа и паров жидкости; в верхнем слое учитывается эффект Дюфура. Исследована линейная устойчивость точного решения вида

$$\begin{aligned} u_j(y) &= c_1^j + c_2^j y + c_3^j y^2 + c_4^j y^3 + c_5^j y^4, & T_j(x, y) &= (a_1^j + a_2^j y)x + \mathcal{G}_j(y), \\ p_j(x, y) &= (d_1^j + d_2^j y + d_3^j y^2)x + \psi_j(y), & C_s(x, y) &= (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y), \end{aligned} \quad (5)$$

описывающего однонаправленное течение j -ой среды ($j = 1, 2$), относительно длинноволновых возмущений. В выражениях (5) u – скорость в направлении оси x , p – давление, T – температура, C_s – концентрация пара в области Ω_2 .

В рамках линейной теории получены уравнения малых возмущений и задача об устойчивости сведена к спектральной задаче относительно комплексного декремента λ , определяющего развитие возмущений со временем. Показано, что в случае длинных волн декремент затухания является чисто мнимым числом с отрицательной мнимой частью, тем самым доказана устойчивость основного течения относительно длинноволновых возмущений. Величина и знак комплексного декремента определяются из характеристик движения, таким образом, потенциально наиболее опасными являются гидродинамические возмущения.

Для нейтральных возмущений найден точный вид первого члена длинноволновой асимптотики числа Марангони. Полученный результат позволяет утверждать, что возникающие в системе длинноволновые возмущения будут затухать монотонно под влиянием вязких свойств сред.

В плоском канале с твёрдыми стенками, на одной из которых возможно просачивание жидкости, источником движения являются градиенты давления в слоях и термоконцентрационные эффекты на поверхности раздела жидкость-смесь. На основе численного анализа обнаружено, что с ростом времени функции скорости и температуры выходят на стационарный режим. Показано, что стационарное распределение концентрации в слое с бинарной смесью возможно лишь при отсутствии ее градиента в направлении движения.

Исследована линейная устойчивость стационарного течения в предположении о недеформируемости поверхности раздела, построены нейтральные кривые для системы этанол-вода и бензол. При $Ma > 0$ (нагрев стенок в направлении течения) и $l_1 < l_2$ течение устойчиво только относительно длинноволновых возмущений; при $Ma < 0$ (охлаждение стенок) область устойчивости расширяется. При этом если толщины слоёв равны ($l = 1$), то течение абсолютно устойчиво.

Если же в плоском канале отсутствуют потоки вещества через твёрдые границы и поверхность раздела, на твёрдых стенках температура меняется по линейному закону, а источником движения служат только термоконцентрационные эффекты, то в системе возникает стационарное течение типа Куэтта. Распределение температуры и концентрации описывается полиномами третьего порядка. При этом стационарное распределение концентрации в одном слое возможно, если ее продольный градиент равен нулю. Изучена устойчивость течения в случае длинноволновых возмущений. Оказалось, что в системе возможны колебания за счет влияния неоднородностей температур и концентраций.

В подобной конфигурации рассмотрена сопряжённая задача о совместном термокапиллярном движении вязкой жидкости, плёнки и бинарной смеси. Найдено специальное решение, при котором поверхность раздела всегда остаётся плоской и неподвижной. Показано, что с ростом времени решение по экспоненциальному закону выходит на стационарный режим. Для распределения концентрации это справедливо, только если ее продольный градиент равен нулю.

6 Продолжение работ по плану партнерского проекта № 38 «Фундаментальные задачи конвекции в неоднородных средах: теория, эксперимент и новые приложения» (№ гос. регистрации 01201252998). Изучение механизмов неустойчивостей стационарных конвективных течений при наличии поверхностей раздела и свободной границы. Построение на основе метода симметрий новых классов точных решений уравнений конвективных движений жидких сред с непостоянными коэффициентами переноса

Рассмотрена задача об устойчивости механического равновесия в системе из двух горизонтальных слоёв. Слои образованы двумя фазами одной и той же бинарной смеси (циклогексан-метанол). Фазовая диаграмма данной смеси показана на рисунках 8 (b) и (d). Из этой диаграммы видно, что при температуре $T_0 = 25^\circ\text{C}$ слои 1 и 2 образованы фазами с массовой долей (концентрацией) циклогексана $C_{10} = 0.95$ и $C_{20} = 0.36$ соответственно (в поле силы тяжести менее плотная фаза располагается в верхнем слое).

При возникновении разности температур ΔT между нижней и верхней границами слоя вертикальный градиент температуры приводит к возникновению градиентов концентрации в каждом слое благодаря эффекту Соре.

В рамках этапа 2014 г. подробно исследована неустойчивость, связанная с фазовым переходом в отсутствие гравитации и термокапиллярного эффекта. Результаты представлены на рисунке 8. Когда относительная толщина второго слоя $h = h_2 / (h_1 + h_2)$ мала, неустойчивость имеет место при подогреве снизу ($R = \Delta T / T_0 > 0$). С увеличением h неустойчивость также появляется при подогреве сверху ($R < 0$). Расчеты показывают, что в длинноволновом пределе ($k \rightarrow 0$) критическое значение $R \rightarrow +0$ при $h < 0.285$, в то время как $R \rightarrow -0$ при $h > 0.285$. При достаточно больших значениях h неустойчивость возникает лишь при подогреве сверху.

Для изучения особенностей процессов, происходящих при нанесении тонких покрытий, с целью прогнозирования динамики технологических процессов проводится

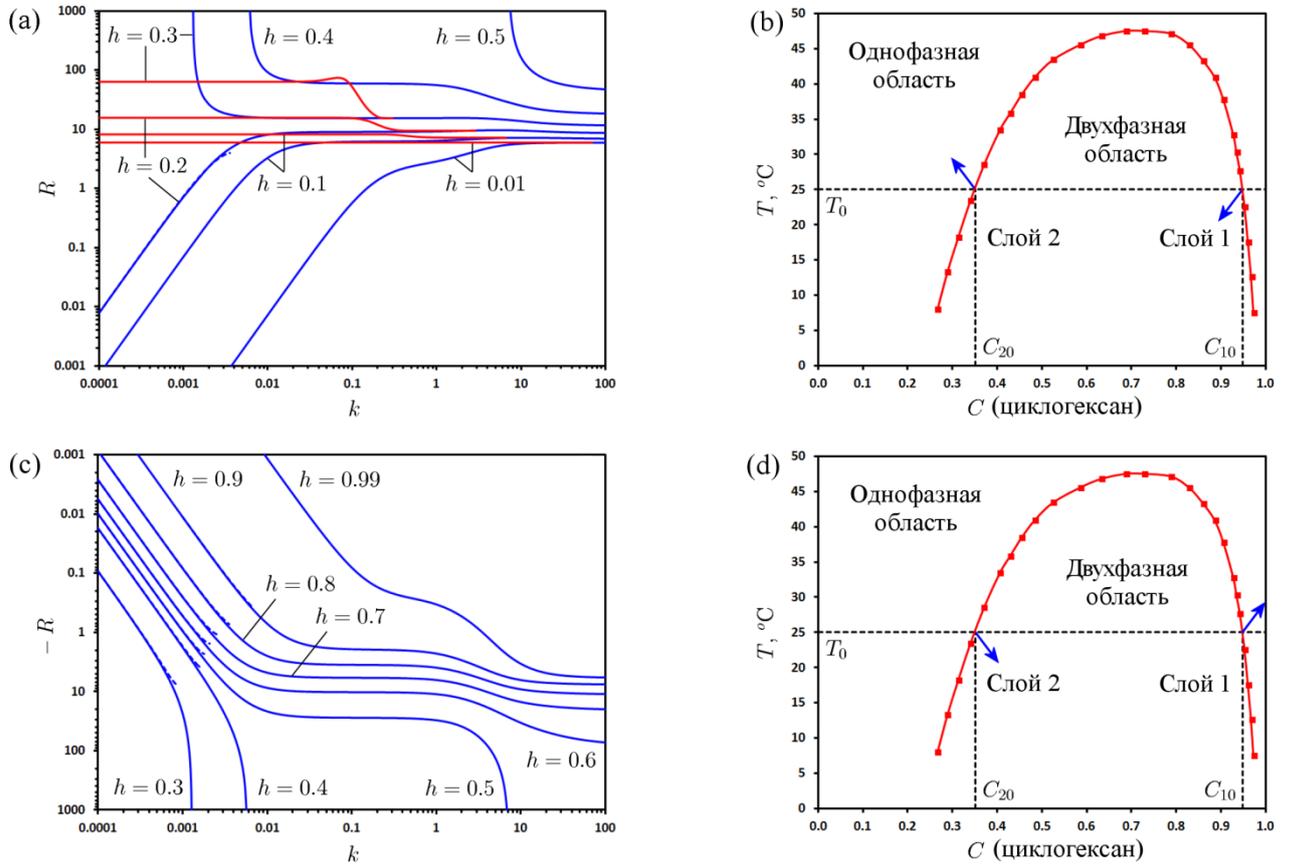


Рисунок 8 – Нейтральные кривые монотонной (синий цвет) и колебательной (красный цвет) неустойчивости для различных значений отношения $h = h_2/(h_1 + h_2)$ при подогреве снизу (a,b) и подогреве сверху (c,d)

теоретическое исследование влияния различных факторов и управляющих параметров на характеристики течений жидкости. Взаимодействие разнородных механизмов может влиять на устойчивость течений и приводить к возникновению новых конвективных структур в системе.

Исследовано стационарное течение двух жидкостей с общей поверхностью раздела Γ и свободной поверхностью Γ_f по наклонной плоскости с линейным распределением температуры. Границы раздела жидких сред предполагаются плоскими и недеформируемыми, верхней границей является свободная поверхность.

Для описания двухслойного течения с недеформируемыми поверхностями Γ и Γ_f используется система уравнений Обербека-Буссинеска, которая допускает решение типа Остроумова-Бириха

$$\mathbf{u}_j = (0, 0, u_j(x)), T_j = F_{j1}(x)z + F_j(x), p_j = p_j(x, z).$$

В результате анализа этого решения получена классификация возможных типов конвективных течений. Множество решений разбивается на 4 класса. Определен вид функций скорости, температуры и давления для каждого класса, а также констант интегрирования. Проанализировано влияние величин расхода одной из жидкостей, градиента температуры на стенке, межфазного теплообмена, угла наклона, геометрии системы на структуру течений и распределение температуры в системе.

Исследована устойчивость течений относительно длинноволновых возмущений. Получены аналитические представления собственных чисел и собственных функций соответствующей спектральной задачи в нулевом приближении. В случае длинных волн имеет место устойчивость основного решения.

Изучены нейтральные возмущения. В силу того, что наиболее опасными могут быть тепловые возмущения, в качестве определяющего параметра выбрано число Марангони Ma . Задача определения длинноволновой асимптотики для Ma сводится к решению квадратного уравнения вида

$$\alpha_1 Ma^2 + \alpha_2 Ma + \alpha_3 = 0,$$

где α_j – постоянные, зависящие от параметров задачи. На основе анализа этого уравнения доказан монотонный характер затухания длинноволновых возмущений, при этом нейтральная кривая будет иметь две ветви монотонной устойчивости.

Течения жидких неизотермических сред широко применяются в различных технологиях. Развитие космических исследований привело к возможности получения сверхчистых кристаллов из расплавов в условиях пониженной гравитации. С целью определения возможностей управления в таких технологических процессах выполняются теоретические исследования возникающих неустойчивостей, механизмов и характера кризисных явлений, пересмотр основных положений теории тепловой гравитационной конвекции.

Рассмотрена стационарная задача о течении жидкости в вертикальном канале с твёрдыми неподвижными стенками в небуссинесковских условиях. Решение уравнений микроконвекции, описывающее подобное течение, имеет вид

$$\mathbf{w} = (u_0, v(x), 0), \quad \theta = \theta(x), \quad q = (\varphi - g)y + r.$$

Решение такого вида допускает различную физическую интерпретацию, в зависимости от значений постоянной u_0 , вида функции температуры $\theta(x)$ и граничных условий. В результате анализа семейства решений, описывающих течение в вертикальном канале с

проницаемыми стенками, на которых задан поток тепла, установлено, что вид точного решения диктует ограничения на величины потоков тепла на стенках.

Исследована линейная устойчивость указанного решения относительно пространственных возмущений. Предложен аналог преобразования Сквайра, позволяющий свести пространственную задачу к плоской. Для модельной среды (расплав кремния SiO_3) доказана устойчивость основного течения. Волновые числа α_1 и α_2 вдоль осей y и z соответственно и параметр $\lambda = \alpha_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ задают длину волны и ориентацию в пространстве ($\lambda = 0$ соответствует плоским возмущениям с $\alpha_2 = 0$, $\lambda = 1$ соответствует спиральным возмущениям с $\alpha_1 = 0$, не зависящим от y и периодическим по z). Под действием нормальных волн в системе возникают колебательные режимы, затухающие со временем.

Для микроконвективных течений рассчитаны поля скорости и температуры возмущений, как собственных функций соответствующей спектральной задачи, которые существенным образом зависят от длины волны возмущения (рисунки 9 и 10).

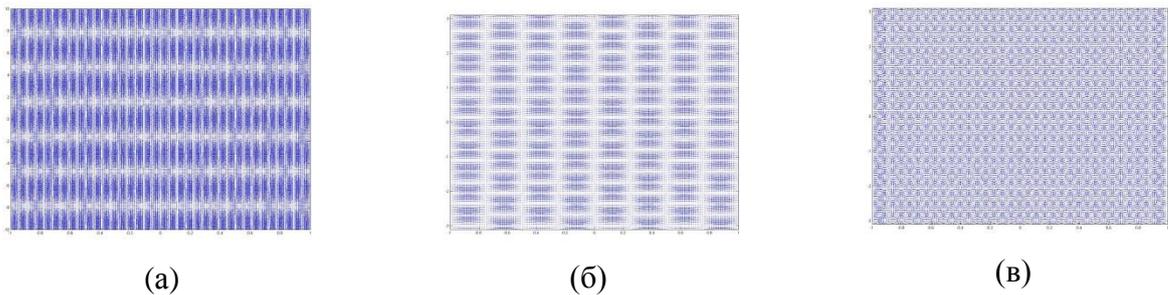


Рисунок 9 – Поле скорости возмущений в начальный момент времени, ширина канала $h = 0.1$ см, поток тепла $d = 50$ Вт: а) $g = g_0 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\lambda = 0.7$; б) $g = g_0 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_1 = 10$, $\lambda = 0.7$; в) $g = g_0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 10$, $\lambda = 0.7$

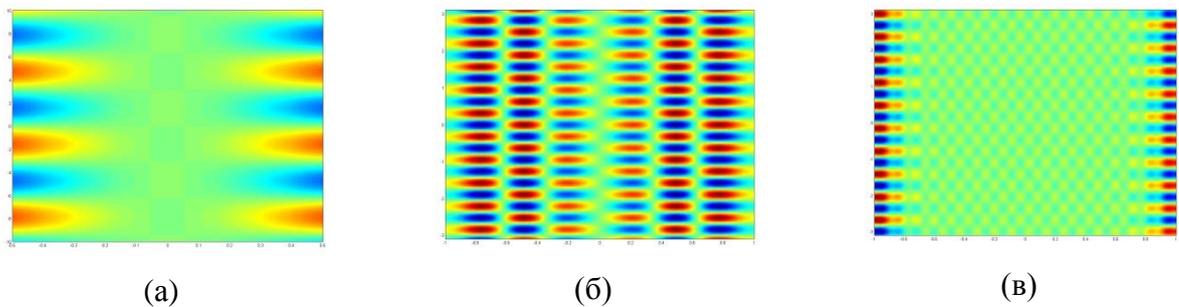


Рисунок 10 – Температурное поле возмущений в начальный момент времени

В слабом гравитационном поле формируются мелкомасштабные ячеистые возмущения (рисунок 9 (в)). С ростом величины g размер ячеек увеличивается, а их конфигурация зависит от длины волны возмущений (рисунки 9 (а) и 9 (б)). Возмущение теплового поля приводит к формированию чередующихся «тепловых» пятен, размеры которых, в случае коротковолновых возмущений, близки к размерам конвективных ячеек (рисунки 10 (б) и 10 (в)). С уменьшением величины потока тепла на стенках в канале за счёт гидродинамического механизма формируется чётко выраженная буферная зона на границе встречных потоков, внутри которой наблюдается интенсивное движение. По мере выхода из этой зоны скорость движения заметно ослабевает за счёт влияния вязких сил.

Получены уравнения, описывающие процессы пальцеобразования в ячейке Хеле-Шоу или при совместном движении двух несмешивающихся вязких жидкостей

$$\begin{aligned} \rho(u_t + \beta(uu_x + vu_y)) + p_x &= -\mu u, & \rho(v_t + \beta(uv_x + vv_y)) + p_y &= -\mu v - \rho g, \\ u_x + v_y &= 0, & \rho_t + u\rho_x + v\rho_y &= 0, & \mu_t + u\mu_x + v\mu_y &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где t – время, (x, y) – координаты, (u, v) – компоненты вектора скорости, ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость, g – ускорение силы тяжести, $\beta = 6/5$ – коэффициент, возникающий при осреднении компонент скорости по толщине ячейки.

Решение уравнений (6) вида

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad \rho = R(y), \quad p = P(y) - \alpha x, \quad \mu = \alpha / U(y) \quad (7)$$

где U, R, P – произвольные гладкие функции ($P' = -gR, U > 0, R > 0$), исследовано на устойчивость относительно малых возмущений. Получена система уравнений на малые возмущения в терминах функции тока, плотности и вязкости. Решение полученной системы ищется в виде элементарных волновых пакетов и сводится к решению ОДУ второго порядка при заданных функциях $U(y), R(y)$. Кроме того, для данного уравнения возникает задача на собственные значения относительно комплексного декремента c , по знаку мнимой части которого можно судить об устойчивости решения по (7).

В случае кусочно-постоянного распределения скорости в двухслойном течении с границей раздела получено дисперсионное соотношение

$$((\beta U_1 - c)k\rho_1 - i\alpha U_1^{-1})(U_1 - c) + ((\beta U_2 - c)k\rho_2 - i\alpha U_2^{-1})(U_2 - c) - g(\rho_2 - \rho_1)\text{th}(2hk) \quad (8)$$

где $U_j, \rho_j, j = 1, 2$, – постоянные скорости и плотности в слоях, k – волновое число, h – ширина слоя. На рисунке 11 приведены дисперсионные кривые, построенные для однородной ($\rho_1 / \rho_2 = 1$) жидкости при $\beta = 1$ и $\beta = 6/5$.

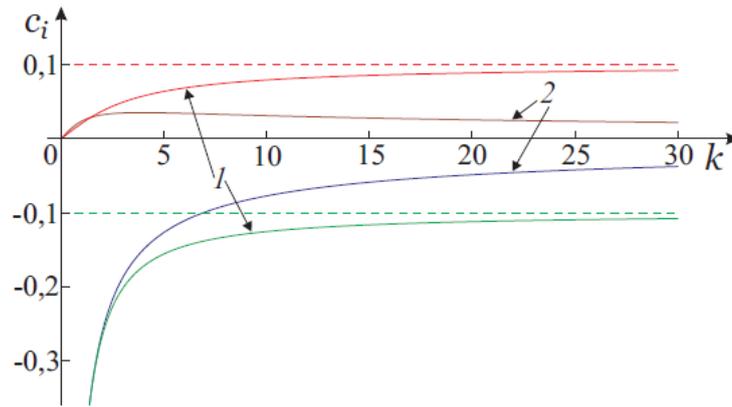


Рисунок 11 – Дисперсионные кривые: 1 – для $\beta=1$, 2 – для $\beta=6/5$

Если рассмотреть невязкие жидкости ($\alpha=0$) из дисперсионного соотношения (2.8), при $\beta=1$ получаем дисперсионные кривые, соответствующие неустойчивости контактного разрыва в однородной идеальной жидкости (пунктирные линии на рисунке 2.11). При $\alpha>0$ (вязкие жидкости) корни квадратного уравнения (8) зависят от волнового числа k . Характерные зависимости мнимой части декремента $c_i(k)$ показаны на рисунке линиями 1. В этом случае течение также неустойчиво, но скорость нарастания возмущений меньше. Более того, длинные волны ($k \rightarrow 0$) устойчивы, а коротковолновые возмущения ($k \rightarrow \infty$) растут с такой же скоростью, как и в невязком случае. Таким образом, вязкость оказывает стабилизирующее влияние, особенно в области длинноволновых возмущений. При $\beta=6/5$ дисперсионные кривые имеют такое же качественное поведение, как и при $\beta=1$, если выполнено соотношение

$$(U_1 + U_2)^2 - 8\beta(1 + \beta)^{-2}(U_1^2 + U_2^2) \geq 0.$$

При выполнении обратного неравенства соответствующее течение невязких жидкостей ($\alpha=0$) устойчиво, при $\alpha>0$ наибольшее нарастание возмущений происходит в среднем диапазоне длин волн (линии 2 на рисунке 11).

Рассмотрена однослойная система жидкостей в конечном цилиндре, которая подвергается неустойчивости Марангони. Верхняя граница жидкости свободна и деформируема. Изучается задача о возникновении конвекции в цилиндрическом контейнере. Для её решения был применён метод разделения переменных. В результате получено однородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами со сложными граничными условиями. Для случая, когда возмущения монотонны, получено аналитическое выражение для критических чисел Марангони. Также разобран случай, когда система находится в состоянии невесомости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий (термостабилизации приборов и систем жизнеобеспечения на борту МКС), нанесении тонких покрытий, оценке скоростей движения жидкости в узких каналах с учётом смазки их стенок; при моделировании однонаправленных течений в океанах, когда необходим учёт нелинейной силы плавучести, расчётах конвекции в озёрах и водохранилищах; при верификации программных комплексов расчётов сложных течений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные публикации

1. *Stepanova I. V.* Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014 (принята в печать).
2. *Андреев В. К., Лемешкова Е. Н.* Эволюция термокапиллярного движения трёх вязких жидкостей в плоском слое // ПММ. – 2014. – Т. 78., Вып. 4. – С. 485-492.
3. *Бекежанова В. Б.* Неустойчивость однонаправленного двухслойного течения с деформируемой поверхностью раздела // ПМТФ. – 2014 (направлена в печать).
4. *Yu. Gaponenko, A. Mialdun1, and V. Shevtsova.* Experimental and numerical analysis of mass transfer in a binary mixture with Soret effect in the presence of weak convection // European Physical Journal E. (2014), **37**, 90. DOI 10.1140/epje/i2014-14090-5.
5. *Капцов О. В.* Система образующих идеалов алгебры сходящихся дифференциальных рядов // Программирование. – 2014. – Т. 40, № 2. – С. 32-40. (Переводная версия: Kartsov O.V. Systems of generators for ideals of algebra of convergent differential series // Programming and Computer Software, 2014, V. 40, № 2, P. 63-70.)
6. *Капцов О. В., Фомина А. В., Черных Г. Г., Шмидт А. В.* Автомодельное вырождение безымпурсного турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде // Математическое моделирование. – 2014 (принята в печать).
7. *Капцов О. В., Шмидт А. В.* Решения трехмерной полуэмпирической модели дальнего турбулентного следа // ПММ. – 2014 (принята в печать).
8. *Шмидт А. В.* Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи // ПМТФ. – 2014 (принята в печать).
9. *Yakubaylik T., Kompaniets L.* Numerical Analysis of Hydrophysical Fields in Lake Shira // Chinese Journal of Oceanology and Limnology, 2014 (принята в печать).
10. *Якубайлик Т. В.* Адаптация и верификация трехмерного численного алгоритма для расчета течений в неглубоких стратифицированных водоемах // Вестник Бурятского государственного университета, выпуск Математика Информатика. – 2014. – Т. 9, № 1. – С. 75-84.
11. *Компаниец Л. А.* Упрощающие предположения в модели Экмана ветрового движения однородной жидкости // Сборник научных трудов международной научно-практической конф. «Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности». Тамбов, – 2014. – Ч. 4. – С. 79-84.
12. *Andreev V. K., Stepanova I. V.* Ostroumov – Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force // Appl. Math. and Comput. 2014. V. 228(214). P. 59-67.

13. *Резникова И. А.* Прямая и обратная сопряженная задача распространения тепла в шаровых областях // Вычислительные технологии. 2014 (принята в печать).
14. *Андреев В. К.* Об одном частично инвариантном решении уравнений гидродинамики // Материалы научной конф. “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014”. СПб.: Изд-во РГПУ им. Герцена, 2014. С. 2-25.
15. *Родионов А. А.* Гидростатическая модель, групповые свойства и решение // Материалы научной конф. “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014”. СПб.: Изд-во РГПУ им. Герцена, 2014. С. 98-100.
16. *Степанова И. В., Чесноков А. А.* Анализ устойчивости сдвиговых течений бинарной смеси в ячейке Хеле-Шоу // Сб. докладов международной конф. “Успехи механики сплошных сред”. Владивосток, 2014. – С. 466-469.
17. *Резникова И. А.* О стабилизации решения тепловой сопряженной задачи в шаровых областях // Сиб. журнал индустр. матем. – 2014 (принята в печать).
18. *Bekezhanova V. B., Andreev V. K.* On the instability of convective flow in cylinder and possible secondary regimes // Fluid Dynamics Research. – 2014. – V. 46., № 4. doi:10.1088/0169-5983/46/4/041417.
19. *Андреев В. К., Лемешкова Е. Н.* Эволюция термокапиллярного движения трёх вязких жидкостей в плоском слое // ПММ. – 2014. – Т. 78., Вып. 4. – С. 485-492.
20. *Магденко Е. П.* Конвекция Марангони в конечном цилиндре // ПМТФ. – 2014 (принята в печать).