

Грант РФФИ 14-01-00130-а «Математическое моделирование термомеханических процессов в структурно неоднородных и микроразрушенных средах».

Руководитель: д.ф.-м.н., профессор В.М. Садовский

ВВЕДЕНИЕ

При анализе процессов распространения волн напряжений и деформаций в микронеоднородных слоистых и блочных средах (горных породах, кирпичных кладках, микроразрушенных и сыпучих материалах) наряду с дискретно-структурными подходами, в которых на дискретном уровне учитывается иерархическая микроструктура материала, применяются континуальные подходы, основанные на методе гомогенизации дискретных структур. Такие подходы, начиная с работ Л.М. Бреховских и И.А. Кунина, разрабатывались большим числом Российских и зарубежных авторов.

Дискретно-структурные подходы приводят к моделям большой размерности, труднодоступным для аналитического исследования. При их численной реализации требуется применение эффективных вычислительных алгоритмов для суперкомпьютеров с параллельной архитектурой. Континуальные модели приводят к задачам, которые исследуются аналитическими методами. Однако при численном счете необходимо согласовывать линейный размер используемых конечно-разностных или конечно-элементных сеток с характерным размером частиц микроструктуры материала. При таком согласовании возникает конфликт между необходимостью получения результата с удовлетворительной для приложений точностью и ограниченными вычислительными ресурсами компьютера.

Метод математического моделирования с применением параллельных вычислений, основанный на разработке вычислительных алгоритмов и соответствующих программных средств, является основным методом в данном направлении исследований, а результаты, полученные при выполнении проекта, представляют собой существенное развитие сложившихся подходов и представлений. Это развитие в первую очередь связано с тем, что разработанные в рамках проекта математические модели доведены «до числа». На основе передовых технологий высокопроизводительных вычислений созданы программные приложения, которые позволили исследовать методом вычислительного эксперимента новые физические эффекты, ранее неизвестные, поскольку проведение расчетов с высокой точностью на мелких сетках было невозможно. Разработанные

программы впервые позволили провести сравнительные расчеты по модели многоблочной среды и модели осредненного моментного континуума. Созданные программные коды могут быть использованы при анализе областей применимости формул для вычисления параметров моментного континуума, предлагаемых различными авторами (имеется обширный список литературы).

В ходе выполнения проекта на основе обобщенного реологического метода получены определяющие соотношения пористых металлов. Ранее этот метод был апробирован на моделях сыпучих сред и разнопрочных материалов (в 2012 г. по результатам издана монография: Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21.* Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2012. 390 p. DOI: 10.1007/978-3-642-29053-4). Принципиальное преимущество метода по сравнению с дискретным подходом состоит в том, что, с одной стороны, его применение дает простую феноменологическую модель сплошной среды, для которой в целом ряде задач можно построить точные решения. С другой стороны, к исследованию дискретного аналога модели применимы хорошо разработанные устойчивые нелинейные вычислительные алгоритмы сквозного счета, позволяющие получить надежные численные результаты.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В ходе выполнения проекта в двумерной постановке решена важная для геомеханики и геодинамики проблема приближенного описания динамических деформационных процессов в блочной упругой среде с податливыми прослойками, имитирующей кусковатую горную породу, с помощью математической модели ортотропного моментного континуума Коссера. Такое приближение позволяет многократно понизить размерность вычислительных задач и дает относительно простой способ аналитического исследования процессов распространения упругих волн в геосредах. Для анализа волновых процессов в рамках полной модели многоблочной среды, составленной из упругих блоков, взаимодействующих через тонкие податливые прослойки, разработана параллельная программа, ориентированная на вычислительные системы кластерной архитектуры. В этой модели по принципу Винклеровского приближения не учитывается влияние поперечных деформаций на напряженное состояние прослоек. Однако показано, что такое упрощение приводит к термодинамически согласованной модели, в которой выполняется уравнение баланса энергии.

На основе метода гомогенизации, исходя из рассмотрения специальных схем квазистатического деформирования блочного материала, определены параметры осредненной моментной среды. С помощью созданных компьютерных программ проведены сравнительные расчеты на основе полной и осредненной моделей. Решена серия задач о распространении упругих волн, вызванных действием на блочную среду кратковременных и длительных локализованных нагрузок. Проводились расчеты задачи, в которой граничное воздействие на блочную среду отсутствует, а начальные данные для скоростей соответствуют вращению центрального блока вокруг центра масс с заданной угловой скоростью. Расчеты показали, что даже в случае достаточно тонких прослоек проявляется характерная анизотропия среды, выраженная в эллиптичности волновых фронтов продольных, поперечных волн и волн вращательного движения блоков. С увеличением толщины прослоек эффект анизотропии усиливается. Результаты расчетов представлены на рисунке 1.

В континуальной модели моментной среды эффект анизотропии адекватно учитывается приближением ортотропного материала с двумя взаимно ортогональными плоскостями упругой симметрии. На рисунке 2 изображены поля касательного напряжения для ортотропного континуума. Сравнение результатов, полученных в рамках модели кусочно-однородной упругой среды и модели ортотропного континуума Коссера,

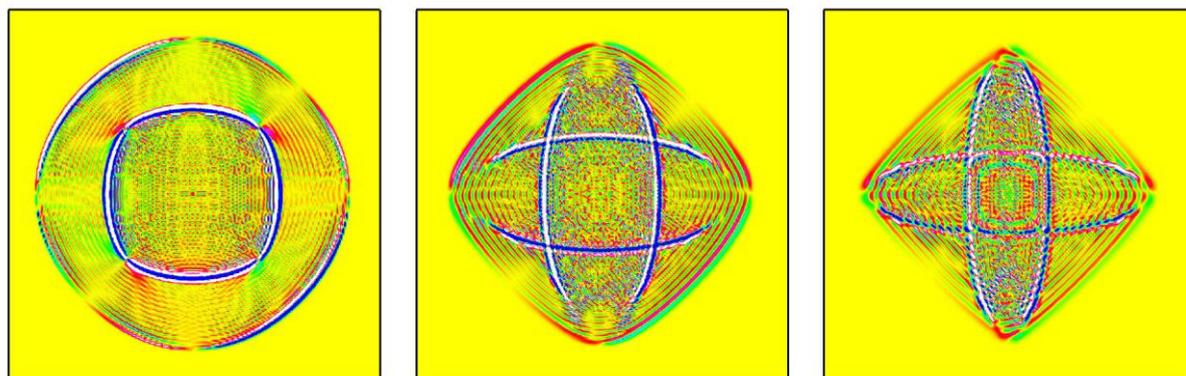


Рисунок 1 – Волновые фронты в соответствии с моделью кусочно-однородной упругой среды при разных толщинах прослоек. Линии уровня касательного напряжения.

Результаты расчетов на суперкомпьютере МВС–100К МСЦ РАН

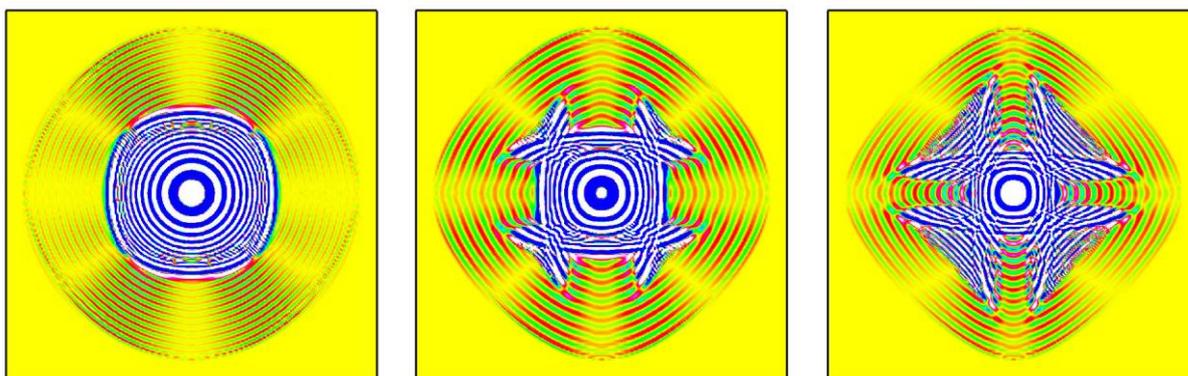


Рисунок 2 – Волновые фронты в соответствии с моделью ортотропного континуума Коссера при разных толщинах прослоек. Линии уровня касательного напряжения.
Результаты расчетов на суперкомпьютере МВС–100К МСЦ РАН

показывает, что расчеты находятся в хорошем качественном и количественном соответствии.

Дополнительные расчеты показали, что, независимо от толщины прослоек, анизотропия блочной среды практически не наблюдается, если акустические импедансы материалов блоков и прослоек ρc_k и $\rho' c'_k$ (ρ и ρ' – плотности, c_k и c'_k – скорости упругих волн в блоке и прослойке) имеют близкие значения. Степень анизотропии среды характеризуется тремя безразмерными параметрами: отношением импедансов продольных волн $z_1 = \rho' c'_1 / (\rho c_1)$, отношением импедансов поперечных волн $z_2 = \rho' c'_2 / (\rho c_2)$ и отношением толщины прослоек к размеру блока $z = \delta/h$. Если оба параметра z_1 и z_2 близки к единице, или если параметр z близок к нулю, то к анализу волновых полей в блочной среде применима классическая теория изотропной упругости. Таким образом, существует комбинация вида $z f(z_1, z_2)$ ($f(1,1) = 0$), которая служит критерием анизотропии.

Для расчетов по модели Коссера использовался разработанный ранее программный комплекс 2D_Cosserat (свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012614823 от 30.05.2012; М: ФИПС, 2012). Вычислительные алгоритмы, встроенные в этот комплекс, были обобщены для учета анизотропии материала. Для этого определены скорости распространения слабых возмущений для системы уравнений ортотропной моментной среды. Найдены левые собственные векторы системы, необходимые для реализации параллельного вычислительного алгоритма на основе сеточно-характеристических разностных схем. Годографы зависимости скоростей распространения возмущений от направления движения фронтов волн использованы для корректировки механических параметров моментного континуума, полученных методом гомогенизации, для адекватного воспроизведения фронтов и амплитуд волн,

распространяющихся в многоблочной среде при локализованном импульсном воздействии.

Компьютерные программы для расчетов в рамках модели кусочно-однородной среды реализованы на алгоритмическом языке Fortran–90 по технологии MPI (Message Passing Interface). Распараллеливание вычислений осуществляется по принципу декомпозиции области: каждый процессор кластера производит расчет цепочки блоков в направлении оси x_1 с обменом данными в приграничных ячейках верхней и нижней границ цепочки между соседними процессорами. В программные коды встроены специальные алгоритмы моделирования одностороннего контакта блоков, исключающие возможность их нефизичного взаимного проникания в процессе деформации и учитывающие вязкоупругие свойства материала прослоек. С этой целью применен обобщенный реологический метод, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию. Проведены расчеты низкочастотных волн маятникового типа, которые возникают в блочной системе по мере прохождения одиночного импульса давления и имеют важное прикладное значение при разработке технических систем прогнозирования разрушений в горнодобывающей промышленности. Анализ амплитудно-частотных характеристик волновых осциллограмм, полученных в расчетах, производился для различных толщин прослоек при различных параметрах вязкоупругости с помощью быстрого преобразования Фурье. На этапе 2014 г. исполнителям проекта не удалось получить характерного изменения частоты маятниковых волн в случае вязкоупругих прослоек по сравнению с упругими прослойками, которое зафиксировано в натуральных экспериментах, проводимых в Институте горного дела СО РАН (г. Новосибирск), поэтому данное направление требует продолжения исследований.

Кроме того, в рамках проекта построена математическая модель упругопластической пористой среды, учитывающая пороговый характер снижения податливости материала при схлопывании пор. Эту модель планируется применить к анализу пластической диссипации энергии в элементах защиты (разрушаемых предохранителях) из пористых металлов. Нелинейные определяющие соотношения модели получены на основе обобщенного реологического метода, служащего для анализа деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Выполнены этапы исследования модели, необходимые для реализации вычислительного алгоритма, выбран метод распараллеливания. На алгоритмическом языке Fortran–90 разработана подпрограмма для кластерных систем, реализующая определяющие соотношения пористых материалов, которая встроена в созданный ранее программный комплекс для численного решения двумерных задач динамики упругопластических и

сыпучих сред 2D_Granular (свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012613989 от 28.04.2012; М: ФИПС, 2012), и проходит процесс отладки. В рамках упрощенной модели без учета дилатансии пористой среды проведены предварительные расчеты локализованного механического воздействия на защитные дорожные блоки из пеноалюминия, имитирующие аварийный наезд автомобиля. Однако эти результаты требуют дополнительного анализа с применением полной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение 2014 года выполнен полный цикл исследований, запланированных по данному проекту. На основе уравнений динамической теории упругости кусочно-однородного материала в плоской постановке разработан параллельный вычислительный алгоритм для моделирования процессов распространения волн напряжений и деформаций в среде, состоящей из большого числа блоков, взаимодействующих между собой через податливые прослойки. Расчеты волн, вызванных локализованными импульсными воздействиями, показали, что такая среда может рассматриваться как изотропная только в случае очень тонких прослоек. В блочной среде с относительно толстыми прослойками наблюдаются эффекты анизотропии, приводящие к появлению сильно вытянутых вдоль координатных направлений волновых фронтов и характерных осцилляций скоростей и напряжений вследствие вращательного движения блоков. С помощью численных экспериментов установлено, что волны вращательного движения в блочной среде с тонкими прослойками можно описать в рамках классической теории изотропного континуума Коссера. С увеличением толщины прослоек следует применять теорию ортотропного моментного континуума, учитывающую симметрию упругих свойств блочной среды относительно координатных плоскостей. Путем сопоставления скоростей распространения упругих волн в рамках кусочно-однородной модели и континуальной модели получен простой метод оценки механических параметров ортотропного континуума Коссера, моделирующего многоблочную среду. В двумерной постановке для модели ортотропного континуума разработаны вычислительный алгоритм и компьютерная программа для анализа распространения упругих волн на суперкомпьютерах кластерной архитектуры. Сравнение расчетов по моделям блочной среды с податливыми прослойками и ортотропного континуума Коссера показало хорошее качественное соответствие волновых фронтов и амплитуд волн, вызванных локализованными импульсными возмущениями. Разработаны алгоритмы учета вязкоупругих свойств материала прослоек на основе реологических схем Максвелла и Кельвина–Фойхта. Построены алгоритмы одностороннего контактного взаимодействия

блоков через прослойки, исключаящие нефизичное взаимное проникание блоков друг в друга в процессе деформации, которое в принципе допускается уравнениями линейно-упругих и вязкоупругих прослоек.

Ранее исполнителями проекта был предложен и реализован на компьютерах с графическими ускорителями одномерный вариант модели слоистой среды, который использовался для моделирования низкочастотных волн маятникового типа, вызванных прохождением через среду одиночного короткого импульса давления. Математическая модель блочной среды с податливыми прослойками как обобщение модели слоистой среды на двумерный случай получена в проекте впервые. Новыми являются параллельные алгоритмы численной реализации модели и компьютерные программы, которые подготовлены к процедуре государственной регистрации в Роспатенте. Континуальная модель пористого металла, учитывающая повышение прочности материала при схлопывании пор, которая находится на стадии программной реализации, также является новой. Полученные результаты отвечают мировому уровню в области вычислительной механики деформируемых сред. Развиваемый в проекте метод моделирования структурно неоднородных материалов, учитывающий в континуальном приближении характерные для таких сред вращательные степени свободы частиц микроструктуры материала и различное сопротивление материала растяжению и сжатию, а также результаты численного анализа процессов распространения волн на основе этого метода носят приоритетный характер. Разработанные в рамках проекта алгоритмы и компьютерные программы для высокопроизводительных вычислений в задачах механики сред с микроструктурой соответствуют одному из основных современных направлений развития вычислительных технологий для решения прикладных задач. Вопросам построения математических моделей структурно неоднородных сред в приближении континуума Коссера и обобщенных континуумов посвящены работы многих Российских и зарубежных исследовательских коллективов, однако проблемы, связанные с численной реализацией таких моделей на многопроцессорных вычислительных системах, решаются в проекте впервые. Этот приоритет подтверждается рейтинговыми публикациями исполнителей проекта и научными докладами на ведущих отечественных и международных конференциях по тематике проекта.

1. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. 139 с. ISBN: 978-5-7692-1365-6.

Монография содержит инвариантные формулировки обобщенных математических моделей анализа нелинейных деформаций оболочко- и стержнеобразных тел с независимыми полями конечных перемещений и конечных поворотов материальных элементов. Они получены из новой инвариантной формулировки нелинейной модели Коши для трехмерного тела с явным выделением конечных локальных поворотов. Одномерная обобщенная модель деформации стержня – следствие допущения о жестко вращающихся поперечных сечениях. Двумерная обобщенная модель деформации оболочки – следствие допущения о жестко вращающихся поперечных волокнах. Обобщенные модели включают в себя определяющие зависимости реального материала и уравнения для вычисления перемещений, деформаций и напряжений в объеме реального тонкого тела. Даны постановки и решения нелинейных краевых задач анализа катастрофических деформаций стержней, пластин и оболочек из упругих материалов и сплавов с памятью формы.

Монография предназначена для научных сотрудников, инженеров-конструкторов, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

2. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // *Wave Motion*. 2015. V. 52. P. 138–150. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.

На основе уравнений динамики кусочно-однородного упругого материала разработан параллельный вычислительный алгоритм для моделирования процессов распространения волн напряжений и деформаций в среде, состоящей из большого числа блоков, взаимодействующих между собой через податливые прослойки. Расчеты волн, вызванных локализованными импульсными воздействиями, показывают, что такая среда может рассматриваться как изотропная только в случае достаточно тонких прослоек. В блочной среде с относительно толстыми прослойками наблюдаются эффекты анизотропии, заключающиеся в появлении вытянутых вдоль координатных направлений волновых фронтов и характерных осцилляций скоростей и напряжений вследствие вращательного движения блоков. Для описания волн в блочной среде с тонкими прослойками применима классическая теория изотропного континуума Коссера. С увеличением толщины прослоек следует применять теорию ортотропного моментного

континуума, учитывающую симметрию упругих свойств относительно координатных плоскостей. Посредством сопоставления скоростей распространения упругих волн в рамках кусочно-однородной модели и континуальной модели получен простой метод оценки механических параметров ортотропного континуума Коссера, моделирующего многоблочную среду. В двумерной постановке ортотропной модели разработаны вычислительный алгоритм и компьютерная программа для анализа распространения упругих волн. Сравнение показало хорошее качественное соответствие результатов расчетов волн, вызванных локализованными импульсами, в рамках модели блочной среды с податливыми прослойками и модели ортотропного континуума Коссера.

3. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Luk'yanov A.A. Radial expansion of a cylindrical or spherical cavity in an infinite porous medium // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. V. 55, No. 4. P. 689–700. DOI: 10.1134/S0021894414040154.

В рамках теории малых упругопластических деформаций однородной изотропной пористой среды в замкнутой форме строится решение, описывающее поля перемещений и напряжений вокруг расширяющихся полостей сферической и цилиндрической формы с учетом схлопывания пор. Переход среды в пластическое состояние моделируется с помощью условия текучести Треска – Сен-Венана. Изменение пористости описывается на основе разработанной математической модели, учитывающей увеличение жесткости пористого материала в момент схлопывания пор. Показано, что на стадии упругого деформирования пористость не меняется, с увеличением давления в окрестности полости образуется зона пластического уплотнения, в части которой поры схлопываются. Построены поля напряжений и перемещений в пористой среде в процессе разгрузки. Показано, что при определенных условиях за стадией упругой разгрузки следует стадия повторного пластического течения с образованием зоны расширения пор, граница которой по мере понижения давления одновременно достигает зоны повторного пластического течения и зоны схлопывания пор.

4. Sadovskaya O.V. Numerical simulation of the dynamics of a liquid crystal in the case of plane strain using GPUs // *AIP Conference Proceedings*. 2014. V. 1629. P. 303–310. DOI: 10.1063/1.4902286.

Разработан параллельный вычислительный алгоритм для численной реализации двумерной модели жидкого кристалла, учитывающей взаимное влияние трех физических факторов – переноса акустической энергии благодаря поступательному движению, вязкоупругого вращения частиц под действием касательных напряжений, анизотропного температурного расширения и сжатия. Алгоритм основан на методе распада разрыва Годунова, схеме Иванова с контролируемой диссипацией энергии и методе расщепления

по пространственным переменным. Используется технология CUDA для вычислительных систем с графическими ускорителями. Приводятся результаты компьютерных расчетов волновых движений, демонстрирующие работоспособность и эффективность метода и алгоритма.

5. Sadovskii V.M. Equations of the dynamics of a liquid crystal under the influence of weak mechanical and thermal perturbations // AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1629. P. 311–318. DOI: 10.1063/1.4902287.

Статья посвящена построению упрощенной математической модели термомеханического поведения жидкого кристалла под действием слабых механических и тепловых возмущений. Эта модель основана на нелинейных уравнениях микрополярной вязкоупругой среды с вращающимися частицами. Чтобы описать малые деформации и конечные повороты молекул, в рамках метода внутренних термодинамических параметров используется предположение о зависимости потенциальной энергии упругой деформации от изменения объема, угла относительного поворота частиц и энтропии. Процесс теплопроводности описывается с учетом анизотропии материала, обусловленной различием коэффициентов теплопроводности вдоль ориентационной оси частиц и в поперечном направлении. Из упрощенной модели получено отдельное уравнение для касательного напряжения, которое полезно для анализа эффектов ориентационной термоупругости и резонансного возбуждения жидких кристаллов.

6. Садовский В.М., Садовская О.В., Похабова М.А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 52–60.

В структурно-неоднородных средах, состоящих из большого числа упругих блоков, которые взаимодействуют между собой через податливые прослойки, процессы распространения волн напряжений и деформаций приближенно описываются уравнениями континуума Коссера. При малой толщине прослоек применима классическая теория изотропного континуума. С увеличением толщины проявляется эффект анизотропии, который учитывается в рамках теории ортотропного моментного континуума.

7. Садовский В.М., Садовская О.В., Лукьянов А.А. Радиальное расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 4. С. 160–173.

В рамках теории малых упругопластических деформаций однородной изотропной пористой среды в замкнутой форме строится решение, описывающее поля перемещений и напряжений вокруг расширяющихся полостей сферической и цилиндрической формы с

учетом схлопывания пор. Переход среды в пластическое состояние моделируется с помощью условия текучести Треска – Сен-Венана. Изменение пористости описывается на основе разработанной математической модели, учитывающей увеличение жесткости пористого материала в момент схлопывания пор. Показано, что на стадии упругого деформирования пористость не меняется, с увеличением давления в окрестности полости образуется зона пластического уплотнения, в части которой поры схлопываются. Построены поля напряжений и перемещений в пористой среде в процессе разгрузки. Показано, что при определенных условиях за стадией упругой разгрузки следует стадия повторного пластического течения с образованием зоны расширения пор, граница которой по мере понижения давления одновременно достигает зоны повторного пластического течения и зоны схлопывания пор.

8. Садовский В.М., Садовская О.В. Вычислительный алгоритм для расчета вязкоупругих волн в среде Кельвина–Фойхта // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. Т. 15, № 1. С. 98–108.

На основе метода Иванова конструирования разностных схем с заданными диссипативными свойствами строится вычислительный алгоритм для решения динамических задач теории вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта. В одномерной задаче результаты расчетов сопоставляются с точным решением, описывающим распространение плоских монохроматических волн. При решении двумерных задач применяется метод суммарной аппроксимации с расщеплением системы по пространственным переменным. Тестирование алгоритма осуществляется на решении задачи о бегущих поверхностных волнах. Для иллюстрации работоспособности метода приводится численное решение задачи Лэмба в вязкоупругой постановке о мгновенном действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости.

9. Матвеев А.Д. Расчет тонких пластин и оболочек с применением многосеточных конечных элементов со свободными границами // Вестник КрасГАУ. 2014. № 3. С. 44–47.

В статье рассматриваются многосеточные конечные элементы со свободной границей для трехмерного анализа деформирования однородных и композитных тонких упругих пластин и оболочек постоянной толщины. Конечные элементы описывают трехмерное напряженное состояние в пластинах и оболочках, учитывают их неоднородную структуру, сложный характер закрепления и нагружения, порождают дискретные модели малой размерности.

10. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Двухсеточное моделирование цилиндрических оболочек и панелей переменной толщины // Вестник КрасГАУ. 2014. № 4. С. 90–97.

Предложены двухсеточные криволинейные элементы, которые описывают трехмерное напряженное состояние однородных и композитных цилиндрических оболочек и панелей переменной толщины, учитывают их сложный характер закрепления и нагружения. Двухсеточные элементы учитывают неоднородную структуру панелей и оболочек и порождают дискретные модели малой размерности.

11. Матвеев А.Д. Применение граничных двухсеточных элементов в расчетах трехмерных композитных балок // Вестник КрасГАУ. 2014. № 5. С. 44–49.

Предложены процедуры построения граничных двухсеточных конечных элементов для расчета трехмерных композитных балок, имеющих сложный характер закрепления. Применение предлагаемых граничных элементов в дискретных двухсеточных моделях трехмерных балок приводит к уменьшению погрешности сеточных решений. При этом двухсеточные дискретные модели, включающие граничные элементы, имеют малую размерность.

12. Матвеев А.Д. Расчет на прочность композитных конструкций с применением эквивалентных условий прочности // Вестник КрасГАУ. 2014. № 11. С. 68–79.

В статье предложены процедуры расчета на прочность композитных трехмерных конструкций, которые сводятся к расчету на прочность трехмерных изотропных однородных тел (конструкций) с применением эквивалентных условий прочности.

13. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия Алтайского государственного университета. Раздел: Математика и механика. 2014. Т. 81, № 1-1. С. 80–83. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

Предложены процедуры построения сложных многосеточных конечных элементов формы прямоугольного параллелепипеда, которые имеют неоднородную и микронеоднородную структуру. Процедура построения сложных многосеточных элементов сводится к построению некоторой системы вложенных композитных двухсеточных конечных элементов. Для построения двухсеточного элемента применяем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением двухсеточного элемента, которое учитывает его структуру, крупную сетку определяем на всей области данного элемента. С помощью аппроксимаций, построенных на крупной сетке, функционал полной потенциальной энергии двухсеточного элемента, отвечающий базовому разбиению, проецируем на крупную сетку. В результате минимизации этого функционала получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил двухсеточного конечного элемента. Достоинства сложных многосеточных элементов заключаются в том, что они учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру,

образуют дискретные модели трехмерных композитных тел малой размерности и порождают решения с заданной погрешностью, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородной и микронеоднородной структуры сложных многосеточных конечных элементов.

14. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Известия Алтайского государственного университета. Раздел: Математика и механика. 2014. Т. 81, № 1-1. С. 84–89. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-19.

Изложены процедуры построения однородных односеточных и композитных двухсеточных криволинейных конечных элементов для расчета трехмерных упругих цилиндрических панелей и оболочек. Матрицы жесткости и узловые усилия криволинейных конечных элементов определяются в локальных декартовых системах координат, а системы уравнений метода конечных элементов для дискретных моделей оболочек и панелей – в глобальных декартовых системах координат. Связь между локальными и глобальными системами координат осуществляется с помощью матриц вращений, которые определяются только для векторов узловых перемещений криволинейных конечных элементов. При построении основных соотношений криволинейных конечных элементов для аппроксимации перемещений используются известные полиномы и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат данных конечных элементов.

15. Садовский В.М., Свободина К.С. О численной реализации термомеханической модели динамики упругопластической среды // Известия Алтайского государственного университета. Раздел: Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. Т. 81, № 1-1. С. 179–181. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-39.

Рассматривается круг вопросов, связанных с построением и численной реализацией математической модели упругопластического деформирования материалов под действием интенсивных внешних возмущений. Для анализа развитых течений, при которых упругим изменением формы частиц можно пренебречь по сравнению с пластическим формоизменением, предлагается упрощенная термодинамически корректная модель упруго сжимаемой пластической среды. На основе метода расщепления по физическим процессам и пространственным переменным строится экономичный вычислительный алгоритм, реализующий геометрически линейный вариант модели. На этапе решения одномерных систем используется разностная схема “предиктор–корректор” с контролируемой искусственной диссипацией энергии, построенная по методу Иванова. Для учета необратимой деформации строится специальная процедура корректировки

решения, аналогичная корректировке напряжений Уилкинса. Производится верификация компьютерных программ путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи о распространении пластической ударной волны в неограниченной среде.

16. Смолехо И.В., Садовская О.В. Параллельный вычислительный алгоритм для описания термомеханического поведения жидких кристаллов // Решетневские чтения. 2014. Т. 2, № 18. С. 121–123.

В рамках акустического приближения математической модели жидкого кристалла разработан параллельный алгоритм для вычислительных систем на графических ускорителях. Проведена серия методических расчетов динамического деформирования жидких кристаллов при слабых механических и температурных воздействиях, демонстрирующих работу программы.

17. Ченцов Е.П., Садовский В.М. Исследование резонансных явлений в блочной среде на основе дискретной модели // Решетневские чтения. 2014. Т. 2, № 18. С. 135–137.

На основе дискретной математической модели колебания блоков, разделенных податливыми упругими прослойками, проведены расчеты резонансов, вызванных продольными и вращательными колебаниями. Модель планируется применить к описанию процессов разрушения ледяных торосов резонансным методом.

18. Sadovskaya O., Sadovskii V., Pokhabova M. Numerical modeling of a block medium as an orthotropic Cosserat continuum // FDM'14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Abstracts (18 – 23 June 2014, Lozenetz, Bulgaria). University of Rouse, Rouse, Bulgaria, 2014. P. 30–31.

Волновые процессы в многоблочной среде с упругими блоками, взаимодействующими через податливые прослойки, описываются уравнениями кусочно-однородной упругой среды и уравнениями однородного континуума Коссера. При малой толщине прослоек применима классическая теория изотропного моментного континуума. С увеличением толщины проявляется эффект анизотропии, который учитывается в рамках теории ортотропного моментного континуума. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы для численной реализации рассматриваемых моделей на многопроцессорных вычислительных системах кластерного типа. Выполнена серия расчетов волн, вызванных поступательными и вращательными колебаниями блоков при локализованных воздействиях, на кластерах ИВМ СО РАН (г. Красноярск) и МСЦ РАН (г. Москва).

19. Sadovskii V. Computational algorithm for modeling viscoelastic waves in the Kelvin–Voigt medium // FDM'14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Abstracts (18 – 23 June 2014, Lozenetz, Bulgaria). University of Rouse, Rouse, Bulgaria, 2014. P. 31.

Разработан вычислительный алгоритм для решения динамических задач теории вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта на основе метода Иванова построения конечно-разностных схем с заданными диссипативными свойствами. В одномерной задаче результаты расчетов сравниваются с точным решением, описывающим распространение плоских монохроматических волн. При решении двумерных задач применяется метод суммарной аппроксимации, основанный на расщеплении системы по пространственным переменным. Алгоритм тестируется на решении задачи о бегущих поверхностных волнах. Для иллюстрации метода представлены результаты численного решения задачи Лэмба о мгновенном действии сосредоточенной нагрузки на границе полуплоскости в вязкоупругой постановке.

20. Sadovskaya O.V. Numerical Simulation of the Dynamics of a Liquid Crystal in the Case of Plane Strain using GPUs // AMiTaNS'14: Sixth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Book of Abstracts, Edited by M. Todorov (26 June – 1 July 2014, Albena, Bulgaria). Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Bulgaria, 2014. P. 43.

Жидкие кристаллы можно рассматривать как микрополярные сплошные среды, в каждой точке которых удлинённые частицы могут перемещаться в соответствии с законами динамики вязкой жидкости и вращаться относительно этой жидкости, встречая вязкоупругое сопротивление вращению. При численном исследовании деформационных процессов в жидких кристаллах возникают задачи сверхвысокой размерности, поскольку для корректного счета параметры шага используемых конечно-разностных или конечно-элементных сеток необходимо согласовывать с малым параметром модели – характерным линейным размером микроструктуры материала. Эффективными оказываются методы высокопроизводительных вычислений с применением многопроцессорных систем кластерной архитектуры и систем с графическими ускорителями. Поведение жидкокристаллической среды описывается на основе упрощенной математической модели, учитывающей в акустическом приближении вращательные степени свободы частиц под действием слабых механических и температурных возмущений. Разработан параллельный вычислительный алгоритм с помощью метода Иванова построения разностных схем с контролируемыми диссипативными свойствами в сочетании с методом расщепления по пространственным переменным. Алгоритм программно реализован с использованием технологии CUDA для вычислительных систем на графических ускорителях. Приводятся результаты компьютерных расчетов, демонстрирующие эффективность предлагаемого метода и алгоритма.

21. Sadovskii V.M. Equations of the Dynamics of a Liquid Crystal under the Influence of Weak Mechanical and Thermal Perturbations // AMiTaNS'14: Sixth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Book of Abstracts, Edited by M. Todorov (26 June – 1 July 2014, Albena, Bulgaria). Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Bulgaria, 2014. P. 44.

Жидкие кристаллы имеют широкую область приложений, благодаря необычному сочетанию свойств текучести и упругой анизотропии, которые проявляются в определенном диапазоне температур при слабых внешних воздействиях различной физической природы. Распространенный подход к построению математических моделей для описания термомеханического поведения жидкого кристалла основывается на представлении о нем, как о мелкодисперсной сплошной среде, в каждой точке которой удлиненные частицы – домены соориентированных молекул жидкого кристалла – могут перемещаться в соответствии с законами динамики вязкой жидкости и вращаться относительно этой жидкости, встречая вязкоупругое сопротивление вращению. Методической основой такого подхода служит работа братьев Коссера, в которой выписаны уравнения моментного упругого континуума. Впервые модель жидкого кристалла была предложена Эриксоном. Построению модели с помощью термодинамических принципов посвящены работы Аэро, Лесли, Калугина, Кондаурова. Для детального изучения процессов, протекающих в жидких кристаллах, целесообразно получение более простых вариантов уравнений, описывающих частные случаи движения. В данном докладе строится упрощенная модель жидкого кристалла как акустической микронеоднородной вязкоупругой среды с вращающимися частицами на основе предположения о зависимости потенциальной энергии упругой деформации от изменения объема, угла относительного поворота частиц и энтропии. Учитывается мгновенная ориентация молекул жидкого кристалла. Тензор теплопроводности выписан с учетом анизотропии, обусловленной различием коэффициентов теплопроводности в направлении вдоль ориентационной оси и в поперечном направлении.

22. Varygina M. Mathematical modeling of micropolar media and elements of thin-walled structures // V Congress of Mathematicians of Macedonia, Book of Abstracts (24 – 27 September 2014, Ohrid, R. Macedonia). Macedonian Mathematical Society, Skopje, 2014. P. 108.

Разработан вычислительный алгоритм для решения динамических задач в рамках микрополярной теории упругости. Получено численное решение распространения волн в упругих ортотропных стержнях с независимыми полями перемещений и вращений.

23. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Многосеточное моделирование трехмерных композитных цилиндрических панелей и оболочек // Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы X Междунар. конф. (24 – 29 сентября 2014 г.). Казань: Казанский федеральный университет, 2014. С. 459–467.

Изложены процедуры построения в декартовой системе координат однородных односеточных, композитных двухсеточных и сложных многосеточных криволинейных элементов для расчета линейно упругих трехмерных цилиндрических панелей и оболочек. Предлагаемые криволинейные конечные элементы описывают трехмерное напряженное состояние в оболочках и панелях, учитывают их неоднородную и микронеоднородную структуру и порождают дискретные модели малой размерности.

24. Пятаев С.Ф. Математическое моделирование предельного термоупругого состояния композиционных материалов на основе структурно-локального приближения // VII Междунар. конф. по математическому моделированию: тезисы докладов (30 июня – 4 июля 2014 г.), под ред. И.Е. Егорова, Ф.М. Федорова. Якутск: ООО “Компания “Дани-Алмас”, 2014. С. 193–195.

Для исследования предельного термоупругого поведения линейно-армированных композиционных материалов на основе структурного подхода разработана модель ансамбля “слоев” волокон, окружающих область с одним волокном. Композиционный материал подвержен силовым нагрузкам и температурному воздействию, порождающим однородное макронапряженное состояние и неоднородное микронапряженное состояние, не зависящее от осевой координаты вдоль волокон. Проведены численные расчеты с помощью метода конечных элементов для двух композитов – боропластика и бороалюминия. Сравнение полученных расчетных предельных значений напряжений с экспериментальными данными при одноосных нагружениях показало их хорошее совпадение.

25. Варыгина М.П. Параллельный вычислительный алгоритм для моделирования процессов распространения упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всеросс. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ю.Н. Работнова (26 – 30 мая 2014 г.). Новосибирск: НГТУ, 2014. С. 23–24.

Разрабатывается параллельный вычислительный алгоритм для моделирования взаимодействия упругих блоков через тонкие прослойки в структурно-неоднородных средах типа горных пород. Для описания поведения прослоек используются вязкоупругие модели Максвелла и Кельвина–Фойхта. Численные алгоритмы основаны на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным в сочетании с

монотонными сеточно-характеристическими схемами со сбалансированным числом шагов по времени в блоках и прослойках. Распараллеливание алгоритмов выполнено по технологии CUDA.

26. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Двухсеточное моделирование цилиндрических панелей и оболочек со сложным закреплением // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всеросс. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ю.Н. Работнова (26 – 30 мая 2014 г.). Новосибирск: НГТУ, 2014. С. 66–67.

В данной работе для расчета трехмерных однородных и композитных цилиндрических панелей и оболочек предложены криволинейные двухсеточные конечные элементы. При построении основных соотношений двухсеточных конечных элементов в качестве аппроксимаций для перемещений используются полиномы 1, 2 и 3-го порядков и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных системах координат данных элементов.

27. Похабова М.А., Садовский В.М. Блочная среда с податливыми прослойками как ортотропный моментный континуум // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всеросс. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ю.Н. Работнова (26 – 30 мая 2014 г.). Новосибирск: НГТУ, 2014. С. 84–85.

Математическая модель блочной среды с тонкими податливыми прослойками служит для расчета деформационных и прочностных характеристик кирпичной кладки. Волновые процессы в многоблочных средах из упругих блоков, взаимодействующих через податливые прослойки, описываются с помощью уравнений кусочно-однородной упругой среды и уравнений моментного континуума Коссера. Показано, что при малой толщине прослоек применима классическая теория изотропного континуума. С увеличением толщины проявляется эффект анизотропии, который учитывается в рамках теории ортотропного моментного континуума. На основе метода осреднения получены простые формулы для оценки феноменологических параметров моментного континуума по заданным упругим характеристикам материалов блоков и прослоек. Сравнительные расчеты волн, вызванных импульсным локализованным вращением, по моделям блочной и моментной среды показало качественное и количественное соответствие результатов.

28. Садовская О.В., Садовский В.М. Численный анализ термомеханической модели жидкого кристалла // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всеросс. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ю.Н. Работнова (26 – 30 мая 2014 г.). Новосибирск: НГТУ, 2014. С. 95–96.

В рамках теории малых деформаций структурно неоднородной моментной среды получены уравнения плоского и пространственного деформирования для описания процессов распространения акустических волн в жидких кристаллах, сопровождающихся конечными поворотами частиц микроструктуры (кластеров сориентированных молекул) материала. Для численного решения уравнений модели разработаны параллельные алгоритмы и компьютерные программы, ориентированные на многопроцессорные вычислительные системы с графическими ускорителями. Проведены вычислительные эксперименты, результаты которых указывают на возможность резонансного возбуждения жидкого кристалла на частоте собственных колебаний вращательного движения частиц.

29. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Двухсеточное моделирование трехмерных цилиндрических панелей и оболочек со сложным закреплением // Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение: тезисы докладов Всеросс. конф., приуроч. к 95-летию акад. Л.В. Овсянникова (18 – 22 апреля 2014 г.). Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2014. С. 98.

Для расчета трехмерных упругих цилиндрических панелей и оболочек предложены однородные и композитные криволинейные двухсеточные конечные элементы 1, 2 и 3-го порядков. Двухсеточные конечные элементы учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру композитных панелей и оболочек, образуют дискретные модели, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей базовых моделей, при этом напряжения могут быть определены в любом компоненте неоднородной структуры оболочек и панелей. Реализация МКЭ для двухсеточных дискретных моделей оболочек и панелей требует меньше памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

30. Ченцов Е.П. О резонансе в структурно-неоднородных средах // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики: тезисы докладов XX Всеросс. конф. и Молодежной школы-конф., посвящ. памяти К.И. Бабенко (15 – 21 сентября 2014 г., Новороссийск, Абрау-Дюрсо). М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2014. С. 108–109.

На основе математической модели слоистой (блочной) среды из упругих блоков, взаимодействующих через податливые вязкоупругие прослойки, выполнены расчеты резонансов, вызванных продольными, поперечными, вращательными и крутильными колебаниями. Планируется провести моделирование разрушения ледяного торола при резонансе на частоте собственных колебаний вращательного движения блоков.

31. Варыгина М.П. Численное моделирование процессов распространения упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками на многопроцессорных вычислительных

системах [Электронный ресурс] // CUDA-Альманах, февраль 2014 г., режим доступа: <http://www.nvidia.ru/docs/IO/141194/CUDA-%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D1%85-Feb-2014.pdf>. NVIDIA, 2014. 6 с.

В задачах о распространении волн в блочных средах возникает необходимость проведения расчетов на мелких сетках, размер которых согласован с характерным размером блоков. Для таких расчетов целесообразно применение высокопроизводительных вычислительных систем. Для численного моделирования динамического взаимодействия упругих блоков через тонкие упругие прослойки в структурно-неоднородных средах разрабатываются параллельные вычислительные алгоритмы для суперкомпьютеров с графическими ускорителями по технологии CUDA. Эти алгоритмы основаны на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным в сочетании с монотонными сеточно-характеристическими схемами со сбалансированным числом шагов по времени в блоках и прослойках.