

Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное
подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН

УДК 517.958:536.25

№ гос. регистрации 01201356263

Инв. № 0202/2016

УТВЕРЖДАЮ

Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

_____ Шабанов В.Ф.

_____ 2017 г.

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
БАЗОВЫЙ ПРОЕКТ Ш.22.4.3 "МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД" ПРОГРАММЫ СО РАН Ш.22.4
"МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД". № ГОС. РЕГИСТРАЦИИ 01201356263

(заключительный)

Номер проекта в ИСГЗ ФАНО 356-2014-0202

Приоритетное направление (номер и наименование) Индустрия наносистем
Программа ФНИ (номер и наименование) 22. Механика жидкости, газа и
плазмы, многофазных и неидеальных сред, механика горения, детонации и
взрыва

Протокол Ученого совета _____

№ __ от «__» _____ 2017 г.

Руководитель проекта _____

В.К. Андреев

д.ф.-м.н., профессор

"__" _____ 2017 г.

Красноярск, 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы	_____	В.К. Андреев
д.ф.-м.н., профессор	(подпись, дата)	
Исполнители:	_____	В.М. Белолипецкий
г.н.с., д.ф.-м.н.	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	И.И. Рыжков
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	А.В. Шмидт
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Т.В. Якубайлик
	(подпись, дата)	

н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

Е.П. Магденко

н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

Е.Н. Черемных

Старший инженер

(подпись, дата)

Н.Ф. Ильина

Инженер

(подпись, дата)

С.В. Козлова

Нормоконтролер

(подпись, дата)

А.В. Вяткин

РЕФЕРАТ

Отчёт 33 с., 20 рис., 3 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФФУЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ СРЕДЫ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач механики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

В результате исследований за отчётный период построены на основе метода симметрий и развитой техники изучения совместности дифференциальных систем новые точные решения уравнений жидких сред (идеальной жидкости, бинарных смесей и конвекции); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных и термоконцентрационных сил, а также процессов испарения и смешивания; разработаны комплексы программ расчётов конвективных течений с поверхностями раздела, в смешивающихся жидкостях, и стратифицированных течений в солёных озёрах. На основе обобщения решения Остроумова – Бириха изучена устойчивость течения испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным потоком газа, в горизонтальном канале. На границах канала поддерживается линейное по продольной координате распределение температуры. Исследовано влияние гравитации, вида (нагрев/охлаждение) и интенсивности тепловой нагрузки на характеристики массопереноса (интенсивность, испарение/конденсация) и динамику возмущений. Получены критические характеристики устойчивости и карты режимов неустойчивости, позволяющие определить пороговые тепловые нагрузки, приводящие к смене типа основного течения, структуры и вида наиболее опасных возмущений при изменении гравитационного поля. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Определение областей устойчивости конвективных течений в условиях микрогравитации и термодиффузии	7
2 Разработка комплекса программ расчёта устойчивости плоских двухслойных течений.....	13
3 Спектральный анализ внутренних волн в озере Шира на основе численных расчётов и натурных наблюдений с использованием пакета GETM и различных моделей турбулентности	16
4 Построение точных решений для полуэмпирической модели осесимметричной турбулентной струи, описывающих асимптотику турбулентного следа за телом.....	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	29
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	31
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	32
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	33

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом механики сплошных сред. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

В связи с вышесказанным, в отчетный период проводились исследования конвективных течений жидких сред с поверхностями раздела, причём учитывалось влияние массопереноса, смешивания, турбулентности.

Настоящий отчет является заключительным по теме: БАЗОВЫЙ ПРОЕКТ Ш.22.4.3 "МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД" ПРОГРАММЫ СО РАН Ш.22.4 "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД", по которой были представлены отчеты по этапам 2013, 2014, 2015 годов.

1 Определение областей устойчивости конвективных течений в условиях микрогравитации и термодиффузии

Исследована линейная сопряжённая обратная задача для параболических уравнений, возникающая при описании ползущих двумерных движений вязких теплопроводных жидкостей или бинарных смесей в плоских слоях. Получены априорные оценки решения и найдены условия на входные данные, когда с ростом времени решение выходит на стационарный режим. В образах по Лапласу построено точное решение в виде квадратур и приведены численные результаты для конкретных жидких сред.

Исследована начально-краевая задача, описывающая однонаправленное движение жидкости в модели Обербека-Буссинеска в плоском канале с твёрдыми неподвижными стенками, на которых задано распределение температур (или верхняя стенка теплоизолирована). Найдено точное стационарное решение. Решение нестационарной задачи для скорости получено в виде квадратур в изображениях по Лапласу, а для температуры – в виде быстро сходящихся рядов по специальному базису. Установлены априорные оценки решения в равномерной метрике для любого конечного момента времени и доказано, что с ростом времени нестационарное движение стремится к данному стационарному состоянию, если на твёрдой стенке температура стабилизируется со временем. Приведены примеры численного решения для конкретной жидкой среды, подтверждающие теоретические расчёты.

Рассмотрена линеаризованная задача о малых возмущениях движения однослойной жидкости в конечном цилиндре с верхней свободной деформируемой плоской границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Боковые стенки сосуда проводимые, и на них выполняется условия прилипания жидкости. Для решения задачи был применён тау-метод. В качестве теста рассмотрен случай, когда возмущения монотонны и свободная граница недеформируемая. Получена зависимость спектрального параметра от геометрии контейнера и физических параметров жидкости. Найденный результат совпадает с результатами, приведёнными в статье Dauby P. C., Lebon G., Vouhy E. (1997). Поставленная задача исследована для случаев, когда свободная граница деформируема и: 1) возмущения монотонны; 2) возмущения немонотонны. На рисунке 1 показана зависимость мнимой части комплексного декремента от числа Марангони, когда система находится в состоянии невесомости, а в сосуде – трансформаторное масло. Из графика

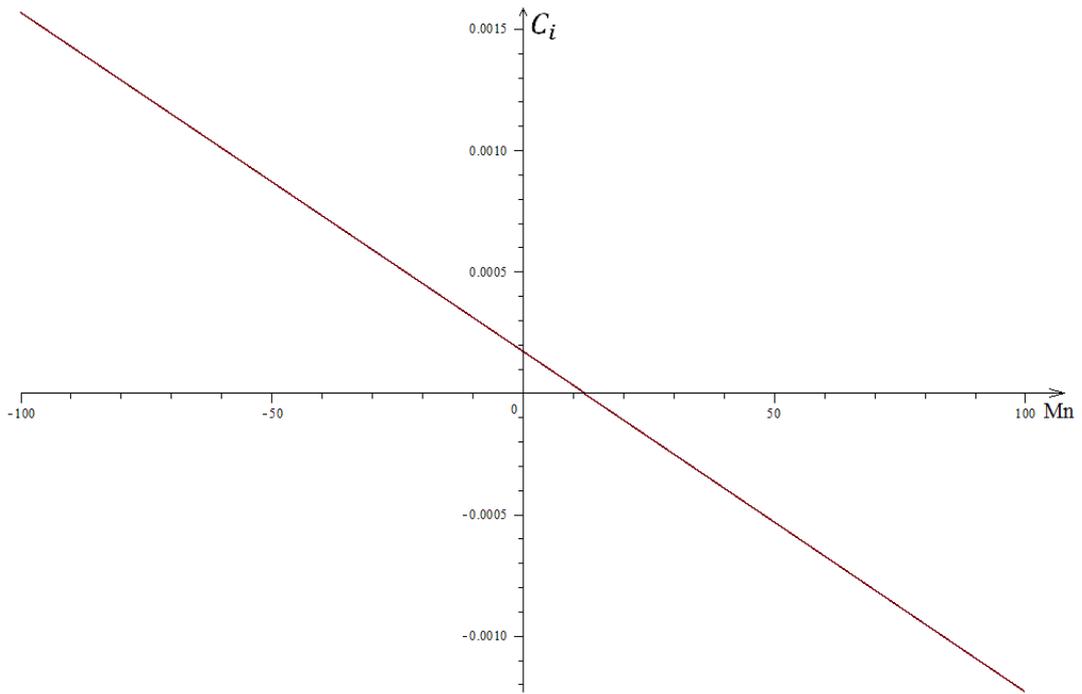


Рисунок 1 – Зависимость мнимой части комплексного декремента от числа Марангони

видно, что с увеличением значения числа Марангони (разности между температурой на нижнем основании цилиндра и температурой окружающей среды), мнимая часть комплексного декремента убывает. При этом область, где мнимая часть комплексного декремента отрицательна, соответствует области устойчивости. В частности, когда число Марангони принимает критическое значение 12.3, то есть разность температур составляет 0.001 К, то комплексный декремент равен нулю, что соответствует случаю монотонных возмущений.

Рассмотрена задача о влиянии гравитации на форму переходной поверхности концентрации в бинарной смеси под действием горизонтальных вибраций. Представлены результаты численного моделирования и экспериментов в наземных условиях и в параболическом полете. Проведенный анализ результатов для высоты формирующихся волн и их полуугла раскрытия позволяет выделить три режима динамики развития течения. На рисунке 2 представлены результаты численного моделирования,

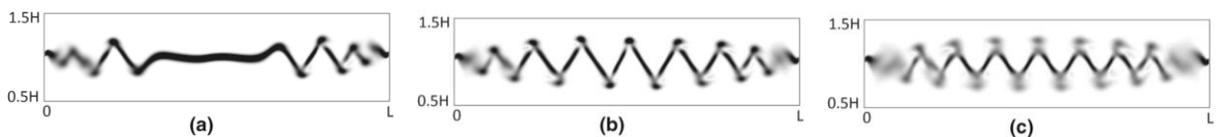


Рисунок 2 – Динамика формирования волн

демонстрирующие динамику формирования волн на поверхности раздела между смешивающимися жидкостями при амплитуде $A = 5$ мм и частоте $f = 20$ Гц, уровне гравитации $g = 0.75g_0$ в различные моменты времени: (a) $t=0.7$ с; (b) $t=1.1$ с; (c) $t=2.0$ с. Показана только центральная область ячейки. На рисунке 3 представлена зависимость

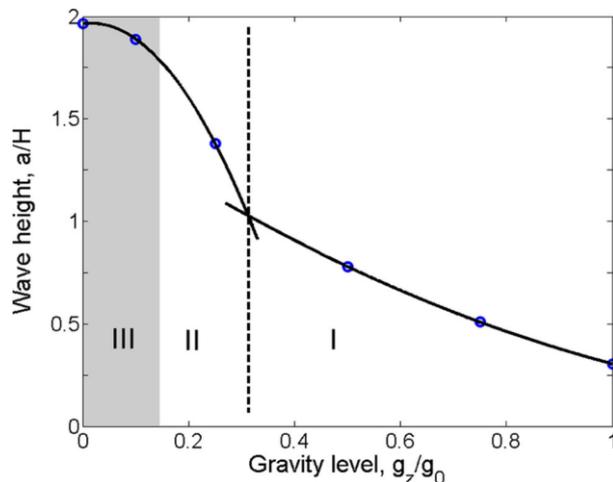


Рисунок 3 – Зависимость максимальной величины подъема волны при деформации поверхности раздела жидкостей

максимальной величины подъема волны при деформации поверхности раздела жидкостей для различных уровней гравитации. Можно выделить три основных режима динамики развития формирования структур волн:

- первый режим ($0.4 < g/g_0 < 1.0$) соответствует наблюдаемым в земных условиях случаям с формированием волн, где высота волн слабо меняется при уменьшении гравитации;
- второй режим ($0.15 < g/g_0 \leq 0.4$) характеризуется быстрым ростом высоты волн при их формировании из начального состояния, но длина образуемых волн не регулярна вдоль переходной зоны между двумя жидкостями;
- при третьем режиме ($0.0 < g/g_0 < 0.15$) растущие волны могут достигать горизонтальных границ ячейки с формированием вертикальных чередующихся колонн жидкостей рассматриваемой смеси.

Экспериментально показано сосуществование комбинации неустойчивости границы раздела Кельвина-Гельмгольца и Фарадея между двумя смешивающимися жидкостями близкой вязкости и плотности при воздействии горизонтальной вибрации. Рассматриваемая система представляет собой два слоя бинарной смеси различной концентрации, помещенных в ячейку с аспектным отношением равным двум. Воздействие

горизонтальной вибрации проводилось в диапазоне параметров с частотой 2-24 Гц и амплитудой 1.5-16 мм. Наблюдаемое явление исследовалось экспериментально и с помощью численного моделирования в условиях микрогравитации параболического полета и лабораторных экспериментах при земной гравитации. Полученные результаты демонстрируют хорошее согласование между экспериментом (рисунок 4) и численным

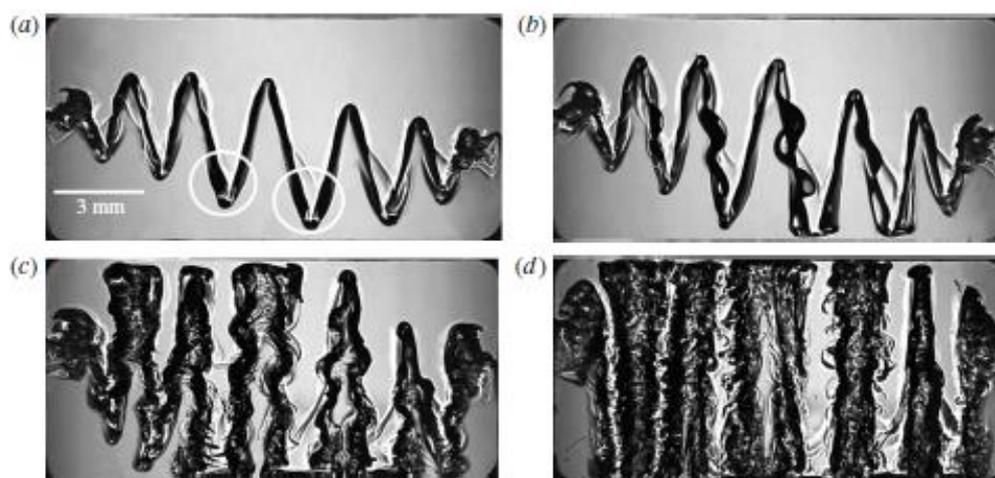


Рисунок 4 – Воздействие горизонтальной вибрации (эксперимент)

моделированием (рисунок 5). Определен диапазон параметров существования

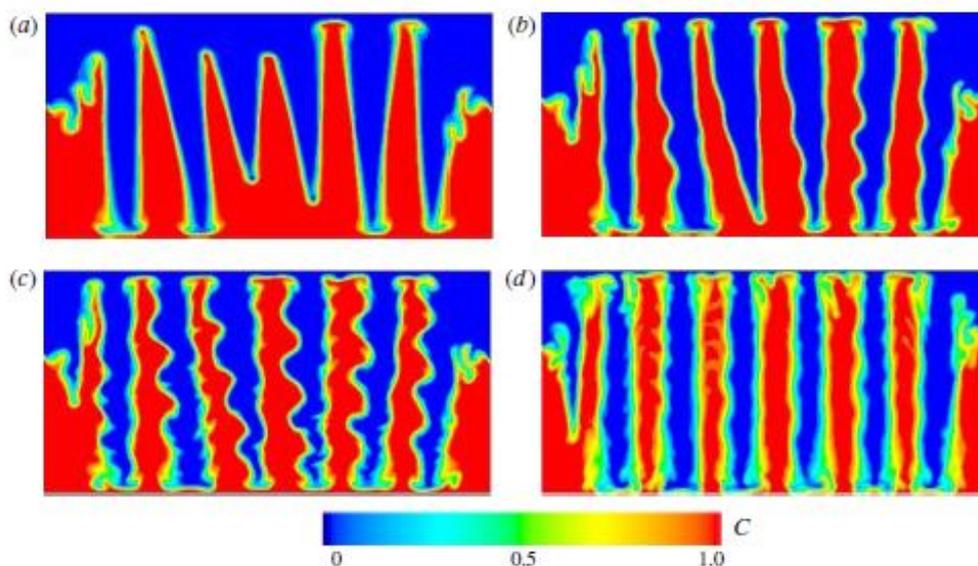


Рисунок 5 – Воздействие горизонтальной вибрации (численное моделирование)

наблюдаемого явления.

Рассмотрена задача о термодиффузионном разделении в двухфазной бинарной смеси на примере системы циклогексан–метанол. Фазовая диаграмма данной смеси показана на рисунок 6.а. Видно, что при температуре $T_0 = 25^\circ\text{C}$ слои 1 и 2 образованы фазами с массовой долей (концентрацией) циклогексана $C_{10} = 0.95$ и $C_{20} = 0.36$

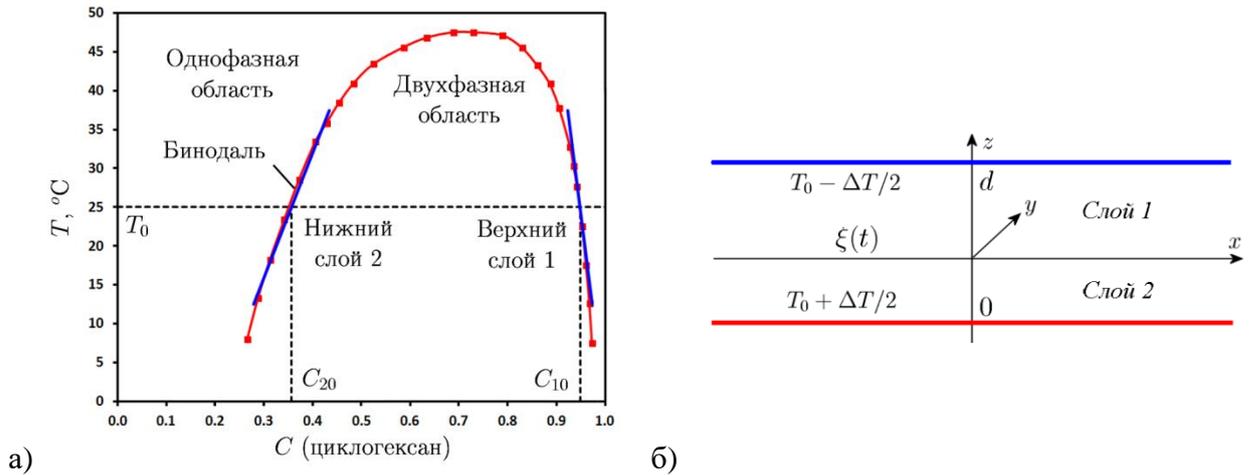


Рисунок 6 – Фазовая диаграмма смеси циклогексан–метанол (а), двухслойная система (б)

соответственно. В поле силы тяжести смесь образует двухслойную систему с менее плотной фазой в верхнем слое и более плотной – в нижнем слое, рисунок 6 (б). При возникновении разности температур ΔT между нижней и верхней границами слоя вертикальный градиент температуры приводит к появлению градиентов концентрации в каждом слое благодаря эффекту Соре и разделению смеси.

Распределение температуры T_i и концентрации C_i циклогексана в фазе i описывается системой уравнений

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} + D_{Ti} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь χ – коэффициент температуропроводности, D_i – коэффициенты диффузии, D_{Ti} – коэффициенты термодиффузии. В качестве начальных условий при $t = 0$ задаются постоянные температура и концентрации циклогексана в фазах, а также положение границы раздела:

$$T_i = T_0, \quad C_1 = C_{10}, \quad C_2 = C_{20}, \quad \xi = \xi_0.$$

На подвижной границе раздела $z = \xi(t)$ задаются равенство температур, баланс тепла с учетом теплоты фазового перехода, условия фазового равновесия и баланс конвективных и диффузионных потоков массы; на твердых стенках $z = 0, d$ задается температура и условие отсутствия диффузионного потока. Задача решалась численно в системе Ansys Fluent 14.5. Расчеты проводились для слоя толщиной $d = 10$ мм. На этапе 2016 года изучалась динамика процесса разделения и время установления стационарного процесса. На рисунке 7.а показана зависимость положения границы раздела $h' = \xi / d$ в

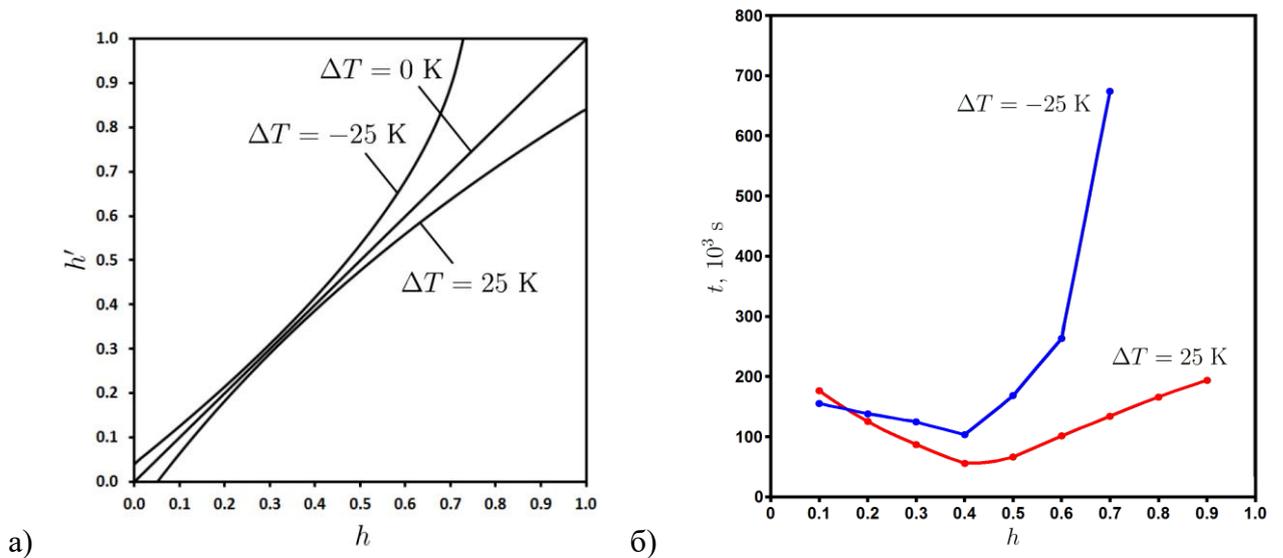


Рисунок 7 – Зависимость положения границы раздела $h' = \xi / d$ в стационарном состоянии а) и зависимость времени установления стационарного состояния б) от начального положения границы раздела $h = \xi_0 / d$ а)

стационарном состоянии от начального положения границы раздела $h = \xi_0 / d$ и приложенной разности температур. Как видно, при подогреве снизу (сверху) увеличивается толщина слоя 1 (слоя 2). Заметим, что при подогреве сверху ($\Delta T < 0$) стационарное решение существует лишь для $0.05 < h < 0.70$. Зависимость времени установления стационарного состояния показана на рисунке 7.б. Кривые имеют минимум при $h \approx 0.4$. В этом случае граница раздела практически не изменяет своего положения в процессе разделения смеси. Увеличение времени установления стационарного состояния при подогреве снизу ($\Delta T > 0$) при больших и малых h связано с ростом толщины слоя 1, так как характерное время диффузионного процесса есть $\tau = L^2 / D$, где L – толщина бóльшего слоя. Аналогично, при подогреве сверху ($\Delta T < 0$) наблюдается резкое

увеличение времени установления с ростом h в силу увеличения толщины слоя 2, а также благодаря тому, что коэффициент диффузии смеси во втором слое примерно в два раза меньше коэффициента диффузии в первом слое. Последний факт приводит к дополнительному увеличению времени установления τ .

2. Разработка комплекса программ расчёта устойчивости плоских двухслойных течений

Изучена задача о совместном течении испаряющейся жидкости и парогазовой смеси в миниканале на основе уравнений термоконцентрационной конвекции. При моделировании течения в газовой фазе дополнительно учитываются эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии (эффекты Дюфура и Соре соответственно). Пар считается пассивной примесью, диффузия пара в газе описывается уравнением

$$\mathbf{v}_g \cdot \nabla C = \frac{1}{Pe} (\Delta C + \alpha \Delta T_g),$$

где $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g, w_g)$ – вектор скорости парогазовой смеси, C – функция концентрации пара, Pe – диффузионное число Пекле, α – безразмерный параметр Соре, T_g – температура парогазовой смеси. Поверхность, вдоль которой контактируют жидкость и парогазовая смесь, предполагается недеформируемой границей раздела. На ней справедливы обычные уравнения равенства скоростей и температуры, кинематическое и динамическое условия, а в условии баланса энергии учитывается перенос массы через поверхность раздела за счёт испарения:

$$T_{lx} - kT_{gx} - \mathcal{J}C_x = -\lambda M, \quad M = -(C_x + \alpha T_{gx}), \quad (1)$$

где M – массовая скорость испарения. На границах канала заданы условия прилипания, для функции температуры – условия теплоизоляции, для функции концентрации пара – отсутствие потока пара.

Построено обобщение решения Остроумова-Бириха на случай трёхмерного течения

$$\begin{aligned} u_{l,g} &= u_{l,g}(x, y), \quad v_{l,g} = v_{l,g}(x, y), \quad w_{l,g} = w_{l,g}(x, y), \\ p_l &= -F_l xz + q_l(x, y), \quad p_g = -F_g xz + q_g(x, y), \\ T_{l,g} &= -Az + \Theta_{l,g}(x, y), \quad C = Bz + \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где A – продольный градиент температуры, $F_{l,g}, B$ – постоянные. Для определения характеристик скорости, температуры и концентрации трёхмерного течения исходная задача сводится к следующей цепочке двумерных задач, требующих численного решения:

- 1) Задача о нахождении поперечных компонент скорости $(u_{l,g}, v_{l,g})$. Исходные уравнения и граничные условия переписываются в терминах «функция тока-вихрь», при этом для функции вихря ставятся условия типа условий Тома.
- 2) Задача о нахождении продольных компонент скорости $w_{l,g}$ из соответствующих проекций уравнений импульса на ось z .
- 3) Задача о нахождении неизвестных функций $\Theta_{l,g}(x, y)$, входящих в формулы для температур $T_{l,g}$, см. (2). Уравнения теплопроводности в каждой фазе и граничные условия переписываются в терминах функций $\Theta_{l,g}$, учитывая линейную зависимость функций $T_{l,g}$ от продольной координаты z .
- 4) Задача о нахождении неизвестной функции $\Phi(x, y)$, входящей в формулу для концентрации пара в газе C , см. (2). Уравнение диффузии и соответствующие граничные условия переписываются в терминах функции Φ , учитывая линейную зависимость функции C от продольной координаты z .

Численные процедуры для решения полученных двумерных задач основаны на продольно-поперечной разностной схеме (метод переменных направлений). Условия непрерывности температуры и переноса тепла (1) используются для определения температуры на поверхности раздела, и, следовательно, температур в каждой фазе. Условия непрерывности тангенциальных скоростей и соответствующая проекция динамического условия на тангенциальный вектор позволяют определить значения w_l и w_g на поверхности раздела и в обеих фазах. Проекция динамического условия на вектор нормали и второй касательный вектор используются при вычислении функций ω_1 и ω_2 .

Последовательное решение полученных двумерных задач позволяет определить характеристики трёхмерного течения. Были проведены расчёты для системы сред этанол-азот. Исследовалось влияние тепловой нагрузки и испарения на структуру течений в канале прямоугольного сечения в условиях микрогравитации. Поля температуры и скорости при различных значениях продольного градиента температуры представлены на

рисунках 8, 10 для случая, когда жидкость испаряется, на рисунках 9, 11 – в отсутствие испарения.

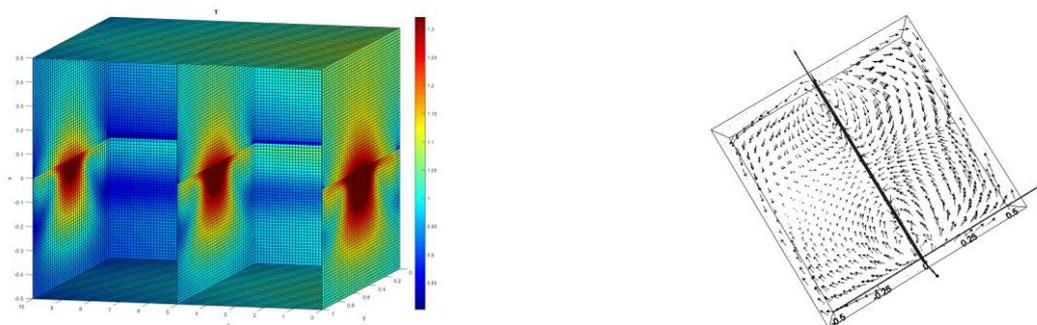


Рисунок 8 – Структура полей температуры и скорости в миниканале при испарении в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, $A = 0.1 \text{ К/м}$

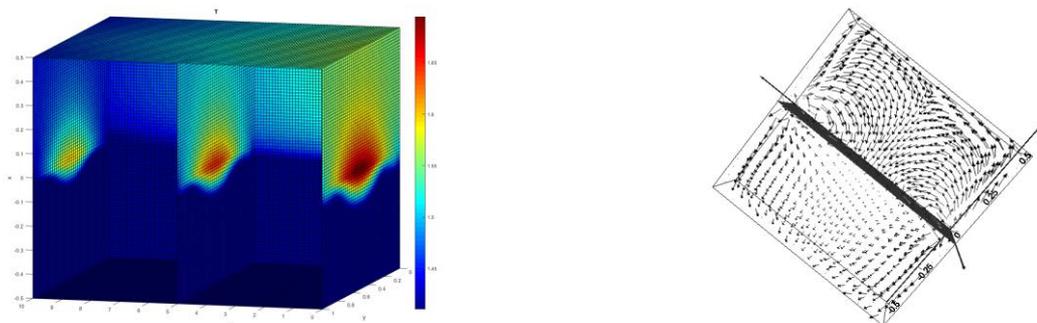


Рисунок 9 – Структура полей температуры и скорости в миниканале без испарения в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, $A = 0.1 \text{ К/м}$

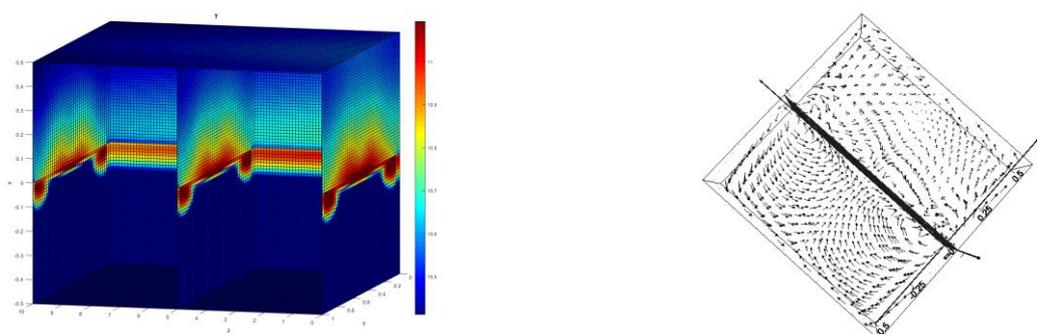


Рисунок 10 – Структура полей температуры и скорости в миниканале с испарением в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, $A = 0.5 \text{ К/м}$

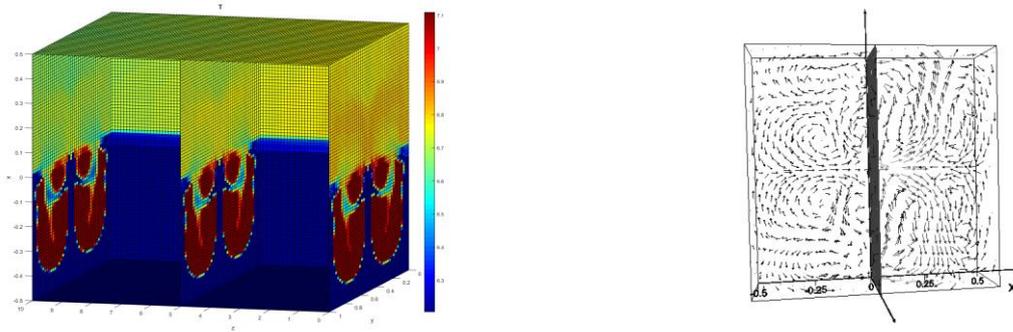


Рисунок 11 – Структура полей температуры и скорости в миниканале без испарения в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, $A = 0.5 \text{ К/м}$

В случае переноса массы через границу раздела, течение в обеих средах имеет симметричную двухвихревую структуру, при этом «ядра» вихрей расположены вблизи границы раздела. При изменении продольного градиента температуры A существенно меняется структура теплового поля. С ростом A тепловые пятна меняют локализацию (см. рисунки 8, 10), перемещаясь из серединной части жидкого слоя к поверхности и боковым границам. При этом уменьшается интенсивность движения в парогазовом слое.

В отсутствие испарения слабое движение жидкости объясняется устойчивой температурной стратификацией в жидком слое, с формированием тепловых пятен вблизи границы раздела (рисунок 9). Увеличение продольного градиента температуры приводит к образованию дополнительных вихревых структур в обеих средах. При этом «ядра» возникающих дополнительных вихрей локализуются в центральной части верхнего и нижнего слоя. Тепловые пятна перемещаются внутрь жидкости с характерным формированием холодного термоклина. В результате в нижней части жидкости формируется область с неустойчивой температурной стратификацией, что и объясняет появление дополнительных вихревых конвективных структур.

3 Спектральный анализ внутренних волн в о. Шира на основе численных расчётов и натурных наблюдений с использованием пакета GETM и различных моделей турбулентности

Многие соленые озера относятся к меромиктическим, в которых в течение как минимум одного года водная толща не перемешивается до дна. В стратифицированном

озере выделяют верхний (эпилимнион) и глубинный (гиполимнион) слои, в которых градиенты плотности малы. Между ними располагается слой воды (металимнион), в пределах которого градиент плотности велик. Интенсивность перемешивания водной массы зависит от градиента плотности по вертикали. Плотностная стратификация зависит от вертикальных градиентов температуры и солености воды и является характеристикой устойчивости (стабильности) озера. В период отсутствия ледяного покрова вертикальное перемешивание стратифицированного озера осуществляется вертикальным турбулентным обменом и ветровыми течениями. Осенью происходит охлаждение водоема, перед ледоставом температура воды мало изменяется по глубине и плотностная стратификация, в основном, определяется градиентом солености. В этот период устойчивость озера к перемешиванию становится минимальной.

В соленых озерах при образовании льда в результате кристаллизации воды высвобождается соль. Формируется неустойчивая плотностная стратификация, приводящая к интенсивной вертикальной циркуляции и образованию слоя конвективного перемешивания. В этом слое происходит выравнивание температуры и солености. Предполагается, что конвективное перемешивание распространяется до такого горизонта, на котором плотность воды становится равной плотности подстилающего слоя воды.

Для оценки динамики вертикальной структуры стратифицированного водоема используется упрощенная постановка задачи: водоем схематизируется трехслойной жидкостью. В верхнем слое воды, прилегающем к свободной поверхности, из-за перемешивания плотность воды равна постоянному значению (эпилимнион), в пикноклине плотность изменяется линейно по глубине (металимнион), в придонном слое плотность меняется мало (гиполимнион). Перед образованием льда считаем известным вертикальное распределение солености. Пусть толщина ледяного покрова ξ_{ice} . Толщина слоя конвективного перемешивания $(\xi_k - \xi_{ice})$ определяется из условия равенства концентрации соли в слое конвективного перемешивания S_k солености воды на глубине ξ_k . Из условия баланса соли:

$$\xi_k = \xi_{ice} + \sqrt{\xi_{ice}^2 + 2d_2\xi_{ice} \frac{S_0 - S_{ice}}{S_{bt} - S_0} + d_1(d_1 - 2\xi_{ice})} \quad (3)$$

Здесь $S_0 = \text{const}$ – соленость воды верхнего слоя, $S_{bt} = \text{const}$ – соленость придонного слоя, d_1 – толщина верхнего слоя. Из соотношения (3) определяется толщина льда ξ_m , при превышении которой слой конвективного перемешивания распространится до дна:

$$\xi_m = \frac{(d_1 + 0.5 \cdot d_2)}{[1 + (S_0 - S_{ice}) / (S_{bt} - S_0)]}.$$

Следовательно, в зимний период может произойти перемешивание всей водной толщи до дна, если $\xi_{ice} > \xi_m$.

Критерий смены режимов перемешивания в соленых озерах в периоды отсутствия ледяного покрова. Для качественных оценок используем двухслойную модель озера. При небольшом ветре формируются две циркуляционные зоны в вертикальной плоскости, верхние слои воды не перемешиваются с придонными. При достаточно сильном ветре $W > W_*$ образуется одна циркуляционная зона, придонные слои перемешиваются с поверхностными. На основе гипотезы перемешивания водной толщи до дна, если характерная скорость течения воды в верхнем слое превышает скорость распространения внутренних волн, получена формула для вычисления критической скорости ветра W_* :

$$W_* = \frac{c}{1.932} \cdot 10^2, \quad c = \sqrt{\frac{g \cdot \Delta \rho}{\rho_0} \cdot \frac{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_3}{\hat{d}_1 + \hat{d}_3}}, \quad (4)$$

где $\hat{d}_1 = d_1 + 0.5 \cdot d_2$, $\hat{d}_3 = d_3 + 0.5 \cdot d_2$, \hat{d}_1, \hat{d}_3 , – толщины верхнего и нижнего слоя, соответственно. Выполнены расчеты критических скоростей ветра W_* осенью перед ледоставом по формуле (4) с использованием данных натуральных измерений в озере Шира. Для рассмотренных периодов критические скорости ветра превышают 17.5 м/с. Поэтому поверхностные слои не перемешивались с придонными и глубины конвективного слоя зимой ξ_k , определенные по формуле (3), согласуются с измеренными.

Рассмотрим летний и осенний периоды 2014 года (28.05.2014–25.10.2014). Критическая скорость ветра по 1-D модели $W_* = 14.1$ м/с. По метеоданным сильный ветер 13–16 м/с наблюдался 12.10.2014, 22.10.2014 и 30.10.2014. Так как скорость ветра превышала критические значения, произошло кратковременное ветровое перемешивание поверхностного слоя с придонным, которое привело к уменьшению $\Delta S = S_0 - S_{bt}$. Предположим, что ΔS уменьшилось на 0.4 г/л. Тогда ξ_k , рассчитанное по формуле (3)

для $\xi_{ice} = 0.92$ будет равно 23.2 м (совпадает с измеренной 6.03.2015), толщина льда ξ_m , при превышении которой слой конвективного перемешивания распространится до дна,

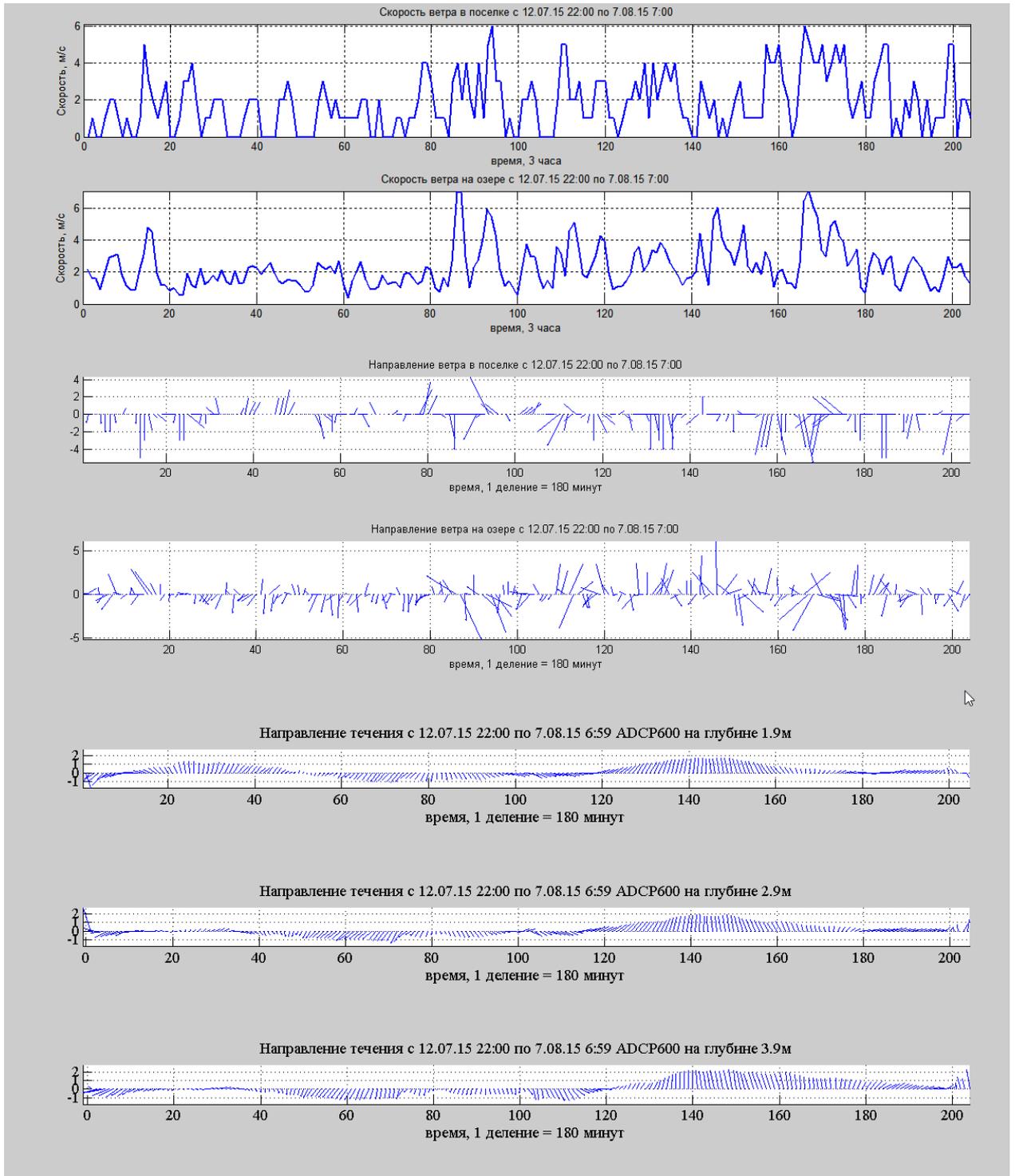


Рисунок 12 – Игольчатые диаграммы для ветра в поселке Шира, на озере Шира и изменение скорости течения по глубине для длительных измерений 2015 г.

равна 0.926 м. По расчетам максимальная толщина льда в марте 2015 г. равна 0.945 м, поэтому слой конвективного перемешивания распространится до дна. В результате пропал слой сероводорода, что подтверждается измерениями в мае 2015 года. После таяния ледяного покрова плотностная стратификация восстановилась. Таким образом, зимой 2015 года произошла потеря меромиксии озера Ши́ра, причиной которой явились сильный ветер осенью 2014 года и толщина льда, превышающая критическое значение ξ_m .

Проведено численное исследование ветровых течений в озере Ши́ра на основе трехмерной математической модели при различных скоростях и направлениях ветра в летний и осенний периоды. Начальные распределения температуры и солености в озере, определяющие распределение плотности, взяты из натуральных измерений. Анализ результатов экспериментов показал, что в осенний период при одинаковой силе ветра заглупление перемешанного слоя значительно больше, чем в летний. При увеличении скорости ветра заглупление перемешанного слоя в глубоководной области озера увеличивается, что приводит к уменьшению плотностной стратификации. Так, осенью при ветре 17 м/с, $\Delta S = S_{\max} - S_{\min}$ в глубоководной области озера уменьшается на 0.6 г/л.

Проведен анализ натуральных наблюдений и результатов численных расчетов для движения неоднородной жидкости, в частности, для озера Ши́ра в случае прохождения внутренних волн, наличие которых обусловлено переменчивой ветровой картиной (рисунок 12). В 2015 г. произошло полное перемешивание вод озера Ши́ра, что не происходило с начала прошлого века. Это перемешивание привело, как минимум, к изменению химического и, как следствие, биологического состава воды. Появилась уникальная возможность оценить влияние этого природного явления на характер течения в озере с использованием спектральных характеристик течения. На основе данных натуральных методом спектрального анализа выделены частоты распространения внутренних волн и их интенсивность. На рисунках 13, 14 приведены характеристики спектров внутренних волн в соответствии со скоростями, измеренными на глубине 2.6 и 7.6 м прибором RDI 1200. Спектр для восточной скорости – черная линия, спектр для северной – красная. Анализ полученных значений показывает, что спектральные характеристики течения в летний период до и после осуществления полного перемешивания воды в озере Ши́ра существенных изменений не претерпели.

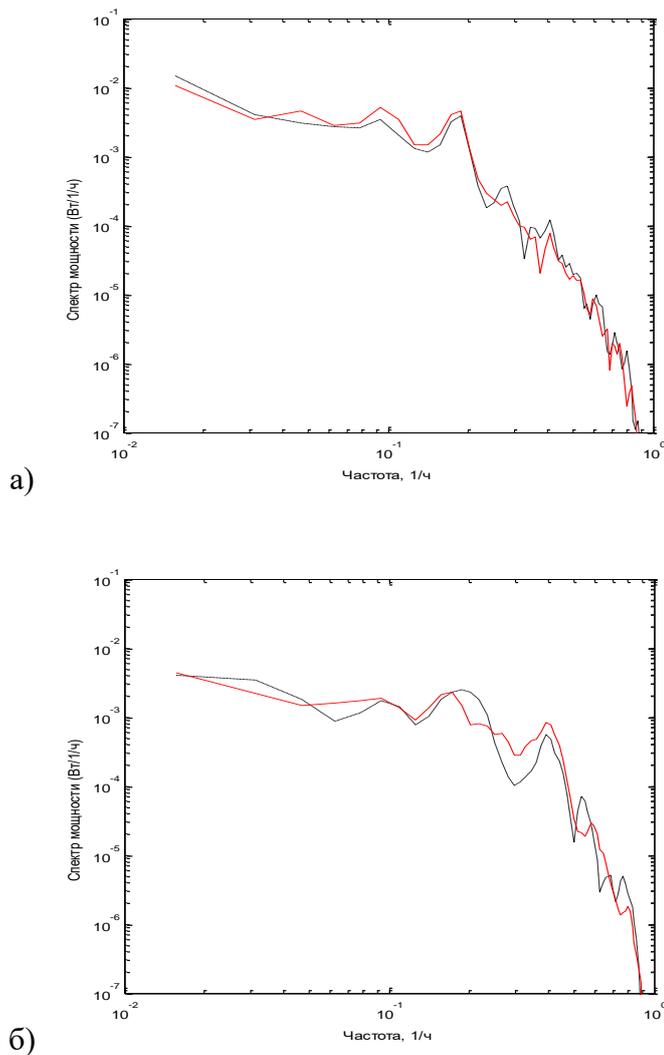


Рисунок 13 – Спектральные оценки S_u – черная пунктирная линия, S_v – красная сплошная, глубина 2,6 м, RDI 1200, а) 2014 г., б) 2015 г.

4 Построение точных решений для полуэмпирической модели осесимметричной турбулентной струи, описывающих асимптотику турбулентного следа за телом

В результате исследования совместности нелинейных уравнений с частными производными введена алгебра сходящихся степенных рядов от произвольного конечного числа переменных, модуль дифференцирований этой алгебры и модуль пфаффовых форм. При этом системы дифференциальных уравнений задаются степенными рядами на пространстве бесконечных джетов. Развита техника исследования совместности дифференциальных систем, похожая на метод базисов Гребнера. Доказана теорема о том, что пассивные системы порождают бесконечномерные многообразия в пространстве

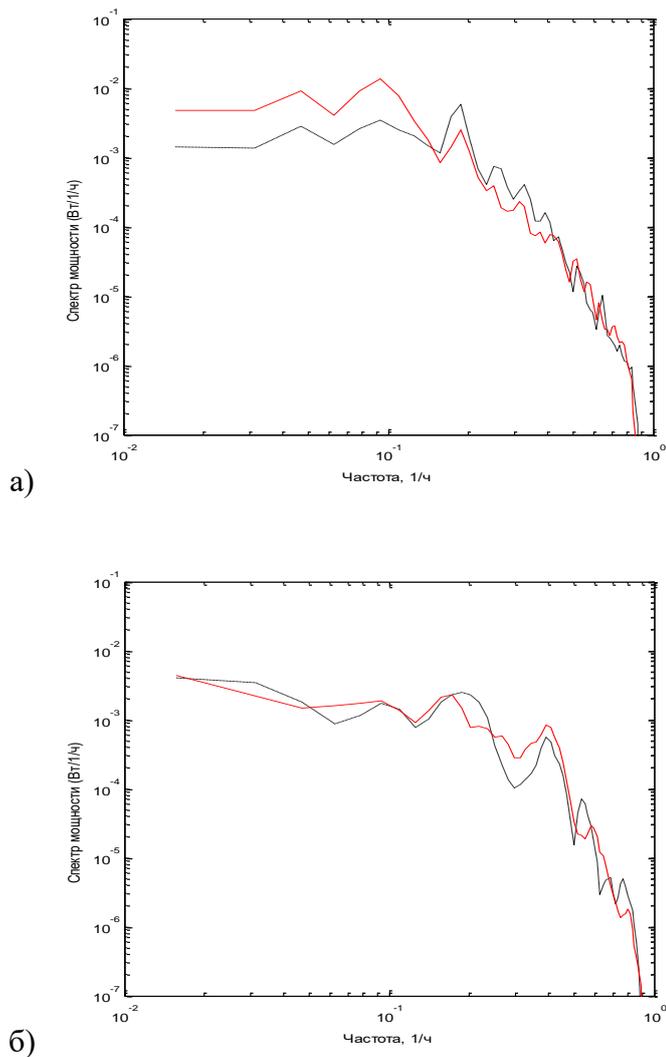


Рисунок 14 – Спектральные оценки S_u – черная пунктирная линия, S_v – красная сплошная, глубина 7,6 м, RDI 1200, а) 2014 г., б) 2015 г.

джетов. В качестве примера рассмотрено нелинейное уравнение Дюбрей – Жакотен, описывающее течения неоднородной жидкости, и построены его решения.

Исследована переопределенная система уравнений в частных производных, которая описывает двумерные изотермические (при показателе адиабаты не равном единице) и тепловые движения политропного газа. Эта же система описывает движения идеальной жидкости, при котором давление в частице остается неизменным с течением времени. Система приведена к пассивному виду и полностью проинтегрирована. Дана интерпретация полученных решений как течений идеальной жидкости, ограниченной

свободной поверхностью или движущейся твердой стенкой. На рисунке 15 изображены

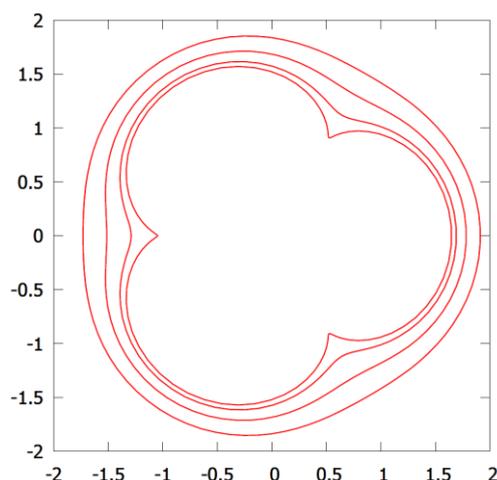


Рисунок 15 – Изобары для одного из решений

изобары для одного из решений. Эти кривые являются эпитрохоидами, и ими можно заполнить всю плоскость, исключая центральную область, ограниченную эпициклоидой.

Проведено основанное на теоретико-групповом анализе исследование автомодельности вырождения течения в дальнем турбулентном следе за телом. Используемая $k-\omega$ модель турбулентности включает дифференциальные уравнения на продольную осредненную компоненту скорости, кинетическую энергию турбулентности и удельную скорость диссипации энергии турбулентности. Выполнен теоретико-групповой анализ исследуемой модели. Получена редукция модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно. Результаты расчетов (рисунок 16) согласуются с известными экспериментальными данными и результатами расчетов, полученных путем непосредственного численного интегрирования дифференциальных уравнений исходной математической модели.

Решена задача о стационарном и нестационарном одномерном тепломассопереносе в водном растворе хлорида натрия, физические свойства которого существенно зависят от температуры. Так, коэффициенты теплопроводности и Соре заданы формулами

$$\kappa(T) = 0.57T + 0.0016, \quad S_T(T) = \frac{-2.181 \cdot 10^{-2} + 1.03 \cdot 10^{-3}T + 6.53 \cdot 10^{-5}T^2}{17.218 + T},$$

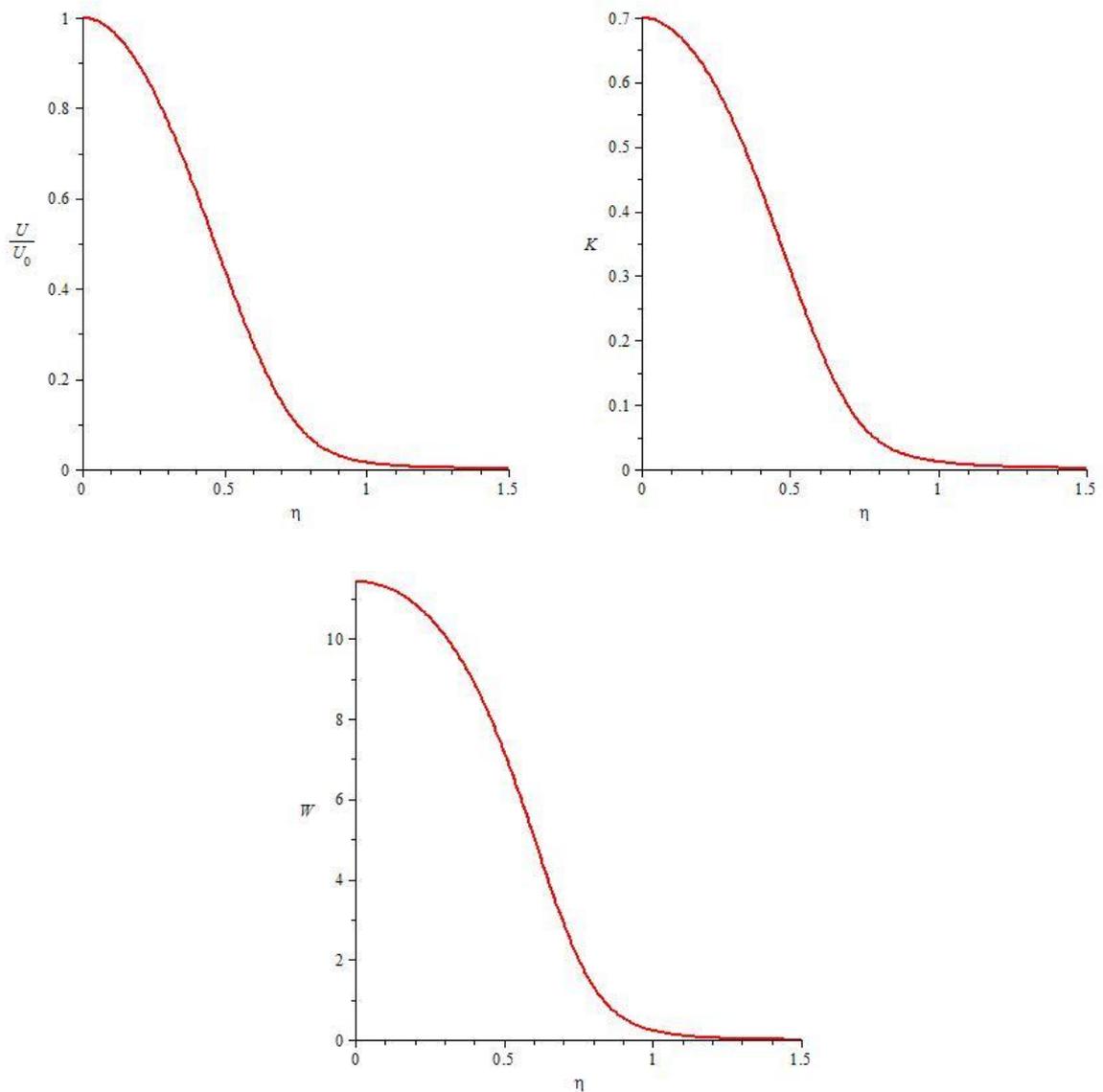


Рисунок 16 – Профили осредненной продольной компоненты скорости U , кинетической энергии турбулентности K и удельной диссипации энергии турбулентности W (η – автомодельная переменная, U_0 – осевое значение осредненной продольной компоненты скорости)

которые справедливы для концентрации хлорида натрия $C_0 = 0.0285$. Плотность предполагается постоянной. Для стационарной задачи поставлены следующие граничные условия: через твердые стенки, поддерживающиеся при разных постоянных температурах, отсутствует поток вещества. Кроме этого, задано дополнительное интегральное условие, естественным образом следующее из нестационарного уравнения переноса массы. Решение стационарной задачи графически представлено на рисунок 17. Несмотря на то,

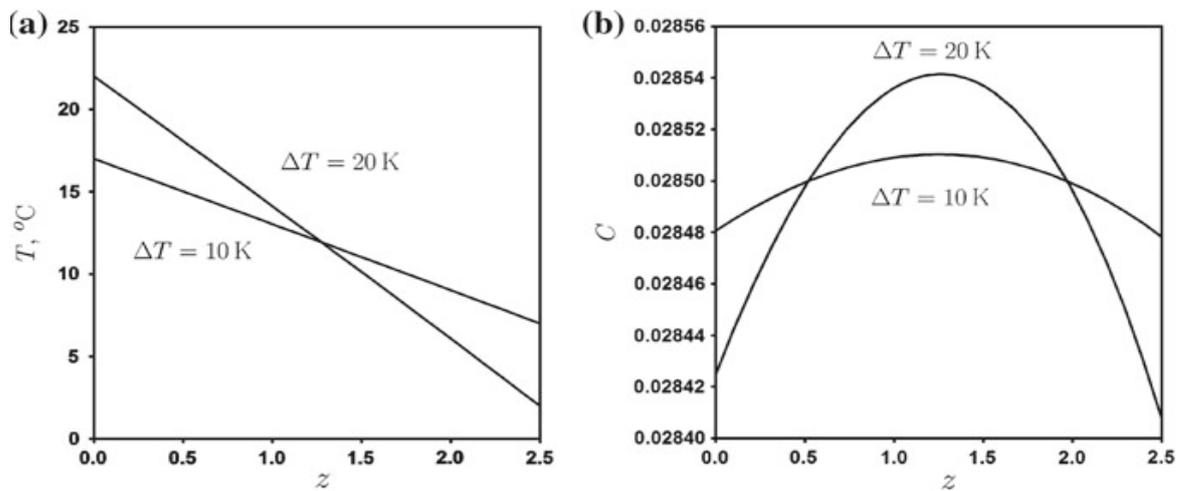


Рисунок 17 – Профили стационарного распределения температуры (а) и концентрации (б) в водном растворе хлорида натрия

что функция температуры нелинейна по координате z , ее график близок к линейному распределению, что может говорить о несущественном влиянии зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в данном случае. Распределение концентрации показывает, что при росте разности температур ΔT разделение становится более заметным. Концентрация хлорида натрия достигает максимума в точке, где коэффициент $\text{Cор}_e S_T$ обращается в ноль. Поскольку функция температуры в стационарной задаче мало отклоняется от линейной, для поиска нестационарного решения данной системы она полагается равной

$$T = T_0 + \Delta T \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L} \right).$$

Решение для оставшегося нестационарного уравнения для концентрации с краевыми условиями второго рода находится с помощью метода преобразования Лапласа. Аналитическое решение для образов по Лапласу представляет собой линейную комбинацию модифицированных функций Бесселя нулевого порядка с коэффициентами, сложно зависящими от модифицированных функций Бесселя первого порядка. Результат численного восстановления искомой концентрации по полученному образу представлен на рисунке 18. Как видно из рисунка, при расчетном времени $t = 12000$ с нестационарный профиль концентрации почти совпадает со стационарным, что соответствует установлению процесса разделения при приближении расчетного времени к диффузионному.

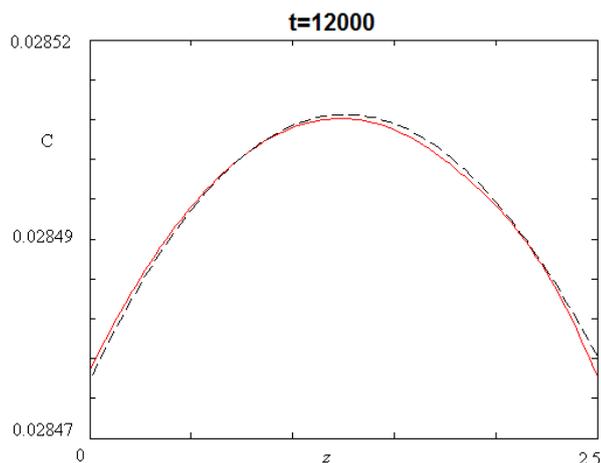


Рисунок 18 – Профили нестационарного (пунктир) и стационарного (красный) распределения концентрации в водном растворе хлорида натрия

Для уравнений нестационарного термодиффузионного массопереноса в коллоидном растворе построена иерархия моделей, учитывающая разную степень зависимости коэффициентов диффузии и термодиффузии от температуры и концентрации. Поскольку процесс установления температуры идет гораздо быстрее, чем достигается баланс концентраций, то температура считается линейной функцией по z и решаются только нестационарные и соответствующие им стационарные задачи на концентрацию. В каждом случае показана сходимость нестационарного решения к стационарному при достижении диффузионного времени ($t_{dif} \approx 10^7$ с для данной постановки задачи). На рисунке 19 приведены профили концентрации частиц полистирола

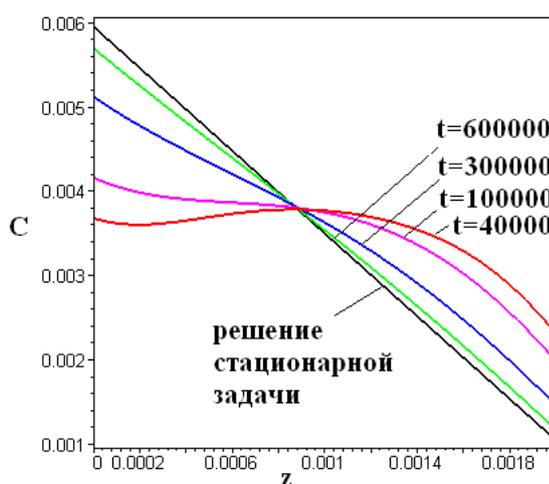


Рисунок 19 – Профили концентрации в разные моменты времени для водного раствора частиц полистирола

в воде, перераспределение которых происходит под действием неравномерного нагрева стенок. При нахождении описываемого решения принималась линейная зависимость коэффициента термодиффузии от концентрации, коэффициент диффузии полагался постоянным. Черная линия на рисунке 19 соответствует стационарному решению той же задачи для постоянных коэффициентов диффузии и термодиффузии. С помощью непосредственного расчета показана сходимость нелинейного нестационарного режима к линейному стационарному.

Рассматривается обратная начально-краевая задача для линейного параболического уравнения, которая возникает при математическом моделировании двумерных ползущих движений вязкой жидкости в плоском канале. Неизвестная функция времени входит в правую часть уравнения аддитивно и находится из дополнительного условия интегрального переопределения. Поставленная задача имеет два разных интегральных тождества, которые позволяют получить априорные оценки решения в равномерной метрике и доказать теорему единственности. При некоторых ограничениях на входные данные решение построено в виде ряда по специальному базису. Для этого задача путем дифференцирования по пространственной переменной сводится к прямой неклассической задаче с двумя интегральными условиями вместо обычных краевых. Новая задача решается методом разделения переменных, позволяющим найти неизвестные функции в виде быстро сходящихся рядов. Другой, стандартный, метод решения исходной задачи состоит в сведении ее к нагруженному уравнению и первой начально-краевой задаче для него. В свою очередь, эта задача сведена к одномерному по времени операторному уравнению Вольтерры со специальным ядром. Доказано, что оно имеет решение в виде ряда. Установлены некоторые вспомогательные формулы, полезные при численном решении этого уравнения методом преобразования Лапласа. Установлены достаточные условия, при которых решение с ростом времени выходит на стационарный режим по экспоненциальному закону.

Для исследования конвекции в системе двух несмешивающихся жидкостей с общей поверхностью раздела используется система уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, уравнения тепло- и массообмена. Система жидкостей ограничена непроницаемыми твердыми стенками, причем верхняя стенка является теплоизолированной. Для нахождения точного решения, описывающего конвективное течение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости, использовался

класс решений, в котором продольная компонента скорости течения жидкостей вдоль слоя линейно зависит от горизонтальной координаты, а концентрация в слое с бинарной смесью и температура имеют квадратичную зависимость от горизонтальной координаты

$$u_j = U_j(y,t)x, \quad v_j = V_j(y,t), \quad \theta_j = A_j(y,t)x^2 + B_j(y,t), \quad c_1 = H_1(y,t)x^2 + E_1(y,t), \quad p_j = p_j(x, y, t).$$

В предположении, что движение в слоях является ползущим, построено точное стационарное решение конвективного течения системы жидкостей. Квадратичное представление температуры и концентрации позволяет описать точки локальных экстремумов для тепловых полей. Анализ такого вида решения показывает, что в окрестности $x = 0$ течение строго вертикально. На рисунке 20.а показаны профили

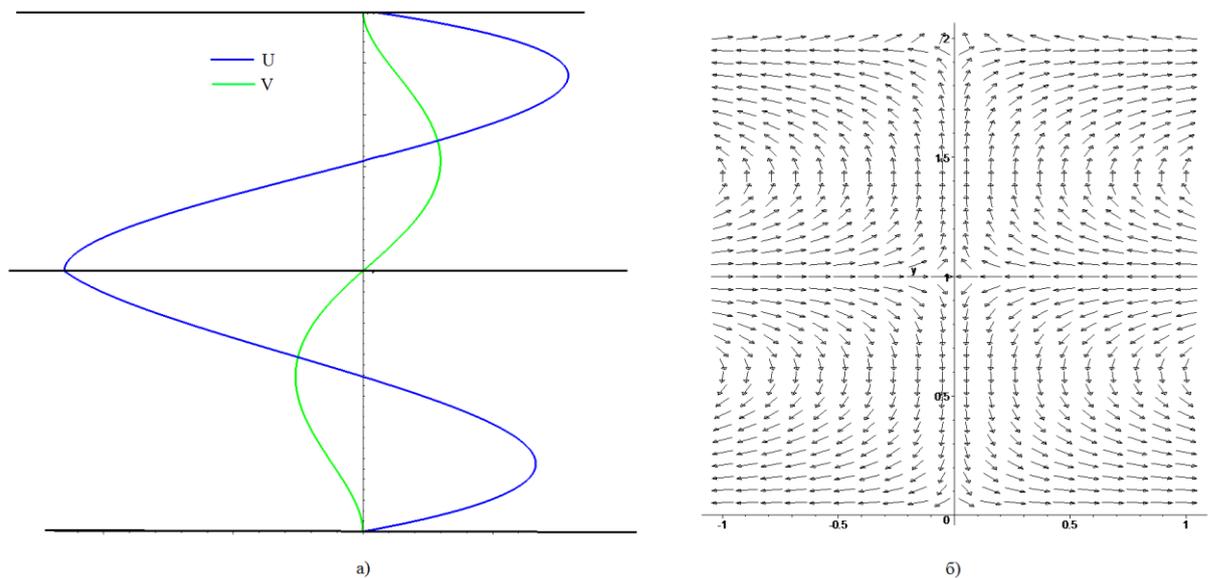


Рисунок 20 – а) профили продольной и поперечной скорости; б) изолинии функции тока

продольной и поперечной скорости в системе с параметрами $A_{10} = 3$, $B_{10} = 25$, $B_{20} = 20$, $G_1 = 1.05$, $G_2 = 0.98$, $M = 0.034$. На рисунке 20.б представлены изолинии функции тока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За период выполнения проекта получены следующие результаты

1. Построены точные решения уравнений конвекции жидких сред, в частности, и с поверхностями раздела, в разных моделях гидродинамики.

2. Дано численное решение задач: а) о влиянии гравитации на форму переходной поверхности концентрации в бинарной смеси, б) неустойчивости границы раздела Кельвина – Гельмгольца и Фарадея при воздействии вибрации, в) о совместном течении испаряющейся жидкости и парогазовой смеси в миниканале, г) о термодиффузионном разделении в двухфазной бинарной смеси на примере циклогексан-метанол.

3. Проведено численное моделирование ветровых течений в о. Шира на основе трёхмерной математической модели при различных скоростях и направлениях ветра в летний и осенний периоды. На основе натуральных данных методом спектрального анализа выделены частоты распространения внутренних волн и их интенсивность.

Планы работ по проекту выполнены полностью на высоком научном уровне. Это подтверждается публикациями в высокорейтинговых журналах и выступлениями на конференциях разного уровня по теме проекта. Кроме того, защищены две кандидатские и одна докторская диссертации, научная тематика которых связана с результатами проекта.

Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий (термостабилизации приборов и систем жизнеобеспечения на борту МКС), нанесении тонких покрытий, оценке скоростей движения жидкости в узких каналах с учётом смазки их стенок; при моделировании однонаправленных течений в океанах, когда необходим учёт нелинейной силы плавучести, расчётах конвекции в озёрах и водохранилищах; при верификации программных комплексов расчётов сложных течений, определении турбулентных следов и их характеристик вдали от препятствий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные публикации за 2016 год

1. *Андреев В. К.* О решении одной обратной задачи, моделирующей двумерное движение вязкой жидкости // Вестник ЮУрГУ ММП. – 2016. – Т.9., № 4. – С. 5-16.
2. *Андреев В. К.* Решение некоторых обратных задач для специальных движений вязкой жидкости // Сб. докладов международной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016”. Санкт-Петербург. – 2016. – С. 30-35.
3. *Андреев В. К., Ефимова М. В.* О совместном движении бинарной смеси и вязкой жидкости в плоском слое // Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвящённой памяти ак. А. Ф. Сидорова, и Всероссийской молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. – 2016. – С. 6-7.
4. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.* Modeling of two-layer fluid flows with evaporation at the interface on the basis of the exact solutions of the convection equations // *European Physical Journal.* – 2016. (в печати).
5. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.* Modeling of the three dimensional thermocapillary flows with evaporation at an interface on the basis of the solutions of special type of the convection equations // *Applied Mathematical Modeling.* – 2016. (в печати).
6. *Белолипецкий В. М., Белолипецкий П. В.* О смене режимов ветровых течений в стратифицированных озерах // ПМТФ. – 2016. – Т. 57, № 1. – С.11-15.
7. *Gaponenko Yu. and Shevtsova V.* Shape of diffusive interface under periodic excitations at different gravity levels // *Microgravity Science and Technology.* – 2016. – V. 28, № 4. – P.431-439.
8. *Канцов О.В.* Алгебро-геометрические структуры аналитических уравнений с частными производными // ТМФ. – 2016. – Т. 189, № 2. – С. 219-238.
9. *Kaptsov O.V.* Ideals of partial differential equations // <https://ru.arxiv.org/pdf/1611.05441v1.pdf>.
10. *Компаниец Л. А., Голенко Н. Н., Володько О. С., Липина О. А.* Сезонная динамика течений в озере Шира по натурным наблюдениям 2014-2015 гг. // Вестник Московского университета им. С. Ю. Витте: Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – Т.2. – С. 417-423.

11. *Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Гаврилова Л. В.* Динамика заглубления перемешанного слоя жидкости в трехмерных расчетах. // Вестник Московского университета им. С. Ю. Витте: Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – Т.2. – С. 404-409.
12. *Магденко Е. П.* Конвекция Марангони в цилиндре конечного размера // ПМТФ. – 2016. – Т.1. – С. 16-23.
13. *Ryzhkov Ilya I., Stepanova Irina V.* On some exact solutions of heat and mass transfer equations with variable transport coefficients // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics “Lie group theory and its applications in physics”. – 2016. – P.191 (1-5).
14. *Рыжков И. И., Степанова И. В.* О термодиффузии бинарных смесей при температурной зависимости коэффициентов переноса // Тез. докладов Всеросс. конф. “Нелинейные волны: теория и новые приложения”. Новосибирск. – 2016. – С. 89.
15. *Ryzhkov I. I., Minakov A. V.* Steady and transient thermal diffusion separation in binary mixtures and its stability // Book of Abstracts 12th International Meeting on Thermal Diffusion. Madrid. – 2016. – P.74.
16. *Черемных Е. Н.* Решение задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском слое // Материалы научной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения -2016”. СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена. – 2016. – С.112-116.
17. *Черемных Е. Н.* Априорные оценки решения задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском канале // Журнал Математические заметки. – 2016. – (в печати).
18. *Шанько Ю. В.* Анализ переопределенной системы, описывающей специальный класс двумерных движений идеальной жидкости. <https://arxiv.org/pdf/1608.08186.pdf>
19. *Шанько Ю. В.* Решение задачи Л.В. Овсянникова о двумерных изотермических движениях политропного газа // ПМТФ. – 2016 (в печати).
20. *Shevtsova V., Gaponenko Yu., Yasnou V., Mialdun A., Nepomnyashchy A.* Two-scale wave patterns on a periodically excited miscible liquid–liquid interface // J. Fluid Mech. – 2016. – V.795. – P. 409-422.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Количество публикации по тематике проекта за весь период выполнения проекта по годам

индикатор	Ед. измерения	Всего за 2013-2016 гг.	2013	2014	2015	2016
Количество публикаций в ведущих российских и международных журналах по результатам исследований, полученных в процессе реализации проекта	единиц	86	23	16	30	18
Количество публикаций в мировых научных журналах, индексируемых в базе данных «Сеть науки» (WEB of Science)	единиц	37	9	7	12	9
Число тезисов в конференциях	единиц	87	19	35	18	15

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2016 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
1 Определение областей устойчивости конвективных течений в условиях микрогравитации и термодиффузии.	1. Характеристики устойчивости точных решений в рамках различных моделей конвекции (микрогравитация, термодиффузия)
2 Разработка комплекса программ расчёта устойчивости плоских двухслойных течений.	2. Программа расчётов, построение карт устойчивости, программа визуализации возможных течений
3 Спектральный анализ внутренних волн в озере Шира на основе численных расчётов и натуральных наблюдений с использованием пакета GETM и различных моделей турбулентности.	3. Спектры внутренних волн в озере Шира на основе численных расчётов и натуральных наблюдений
4 Построение точных решений для полуэмпирической модели осесимметричной турбулентной струи, описывающие асимптотику турбулентного следа за телом.	4. Точные решения, описывающие асимптотику турбулентного следа за телом