

Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное
подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН

УДК 519.62/.64
N гос. регистрации 01201356261
Инв. № 0205/2016

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

Шабанов В.Ф.

2017 г.

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
БАЗОВЫЙ ПРОЕКТ IV.36.1.3 «РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ, ИХ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ И
ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ
ВЫСОКОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ» ПРОГРАММЫ СО РАН IV.36.1.
«НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ, АВТОМАТИЗАЦИИ И
УПРАВЛЕНИЯ». № ГОС. РЕГИСТРАЦИИ 01201356261

(заключительный)

Номер проекта в ИСГЗ ФАНО 356-2014-0205

Приоритетное направление (номер и наименование) Информационно-
телекоммуникационные системы

Программа ФНИ (номер и наименование) 36. Системы автоматизации,
CALS-технологии, математические модели и методы исследования сложных
управляющих систем и процессов

Протокол Ученого совета _____
№ ____ от «__» _____ 2017 г.

Руководитель проекта _____ В.М. Садовский
д.ф.-м.н., профессор " ____ " _____ 2017 г.

Красноярск, 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор		В.М. Садовский
	(подпись, дата)	
Исполнители: зав. отделом, к.ф.-м.н.		Е.Д. Каропова
	(подпись, дата)	
г.н.с., д.ф.-м.н.		Е.А. Новиков
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.		В.А. Кочнев
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.		К.В. Симонов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		И.В. Киреев
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		Е.С. Кирик
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		А.А. Лукьянов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		А.Д. Матвеев
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		А.Н. Рогалев
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.		О.В. Садовская
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.		М.П. Варьгина
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.		Е.В. Дементьева
	(подпись, дата)	
м.н.с.		Т.Б. Витова
	(подпись, дата)	
м.н.с.		Е.П. Ченцов
	(подпись, дата)	
инженер		И.В. Смолехо
	(подпись, дата)	
инженер		А.Е. Королева
	(подпись, дата)	
Нормоконтролер		А.В. Вяткин
	(подпись, дата)	

РЕФЕРАТ

Отчет 30 с., 10 рис., 4 прил.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ, ГИДРОДИНАМИКА, ДЕФОРМИРУЕМАЯ СРЕДА, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ПРОБЛЕМЫ БЕЗОПАСНОСТИ

Цель работы состоит в создании эффективных методов численной реализации сложных математических моделей природных и технологических процессов и систем на высокопроизводительных ЭВМ кластерной архитектуры и на суперкомпьютерах с графическими ускорителями.

В результате проведенных исследований выполнен анализ волновых движений в блочной флюидонасыщенной среде, имитирующей кусковатую горную породу. Для этого на основе уравнений динамической теории упругости и уравнений движения жидкости в деформируемой пористой среде (уравнений Био) создана новая математическая модель блочной среды, составленной из упругих блоков, взаимодействующих через тонкие податливые пористые прослойки, наполненные жидкостью. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы для численного решения краевых задач в рамках предложенной модели на многопроцессорных ЭВМ. Для решения прямых и обратных задач по результатам анализа данных наблюдений геомониторинга очаговых зон подготовки сильных цунамигенных землетрясений разработаны алгоритмы построения аппроксимационных функций. Выполнено исследование задачи аппроксимации экспериментальных данных геомониторинга специального вида. Проведен анализ параллельной реализации двух подходов к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, первый из которых основан на совмещении методов Узава и простой итерации, во втором применяются нелинейные итерационные процессы типа метода сопряженных градиентов. Разработаны алгоритмы интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Созданы численные схемы первого и второго порядков точности, в которых достоверно вычисляется не только решение, но и производная искомого решения. Разработаны новые методы гарантированного оценивания для вычисления границ зон опасных состояний и пороговых значений параметров сложных динамических управляемых систем.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Математическое моделирование течений жидкости в пористых прослойках блочной упругой среды. Численное исследование влияния ударных волн и резонансного возбуждения среды на картину течения	6
2 Разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов анализа данных геомониторинга катастрофических геодинамических природных процессов для решения прямых и обратных задач	9
3 Разработка, реализация и отладка параллельных высокопроизводительных алгоритмов для нестационарных уравнений гидродинамики на основе разработанной технологии ...	11
4 Повышение вычислительной эффективности алгоритмов решения больших систем линейных алгебраических уравнений на основе метода ортогонализации. Разработка численных методов второго и третьего порядка точности для решения гибридных задач, формулируемых в терминах систем обыкновенных дифференциальных уравнений	15
5 Развитие методов построения гарантированных оценок решений и множеств достижимости для нелинейных управляемых систем. Исследование задач практической устойчивости при оценке живучести и безопасности систем	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	22
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	23
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	29

ВВЕДЕНИЕ

Проблема разработки вычислительных технологий для решения ресурсоемких научно-исследовательских и прикладных задач на суперкомпьютерах высокой производительности имеет большое значение. Это связано с постоянным совершенствованием применяемых математических моделей и определяется возрастающими требованиями к точности результатов моделирования. Не случайно проект «Многомасштабное суперкомпьютерное математическое моделирование в естественных и инженерных науках» утвержден в 2016 году Научно-координационным советом (НКС) при ФАНО в качестве одного из 23-х актуальных направлений научно-технологического развития России (см. http://fano.gov.ru/ru/press-center/card/?id_4=36892). Необходимую техническую базу для реализации этого проекта обеспечивает ускоренный темп роста производительности суперкомпьютеров, достигшей в настоящее время десятков петафлопс, с перспективой создания ЭВМ эксафлопсной производительности. В Институте вычислительного моделирования СО РАН имеются все предпосылки для выполнения исследований, соответствующих мировому уровню в данном научном направлении. Имеются сложившиеся коллективы специалистов в области математического моделирования и разработчиков параллельных вычислительных алгоритмов и программ, а также необходимая техническая база.

Настоящий отчет является заключительным по теме: Базовый проект IV.36.1.3 «Разработка математических моделей сложных систем и процессов, их алгоритмическая и программная реализация на вычислительных системах высокой производительности» Программы СО РАН IV.36.1. «Новые решения проблем исследования и математического моделирования сложных динамических систем и процессов и их приложения в задачах проектирования, автоматизации и управления»", по которой были представлены отчеты по этапам 2013, 2014, 2015 годов.

1 Математическое моделирование течений жидкости в пористых прослойках блочной упругой среды. Численное исследование влияния ударных волн и резонансного возбуждения среды на картину течения.

Модель блочной среды применяется для описания волновых процессов в горных породах, а также в трещиноватых и пористых средах с инородными включениями. Трещины в горной породе разделяют среду на части со схожими свойствами, в результате чего возникает неидеальная блочная структура, которая на модельном уровне заменяется периодической средой. На предыдущих этапах проекта была разработана математическая модель, описывающая волновые процессы в идеальной блочной среде типа кирпичной кладки, в которой упругие блоки взаимодействуют друг с другом через податливые прослойки со сложными механическими свойствами. Были рассмотрены три различных варианта модели. В первом варианте упругое взаимодействие между блоками моделируется на основе линейной теории упругости; во втором учитываются эффекты вязкоупругого сдвига в межблочных прослойках с помощью реологической схемы Пойнтинга–Томсона. В третьем варианте в прослойках используется модель упругого пористого скелета, в котором поры схлопываются при резком приложении сжимающих напряжений с пороговым измерением жесткости материала. Были разработаны параллельные вычислительные алгоритмы и программные комплексы для численного решения на многопроцессорных ЭВМ краевых задач с заданными начальными данными и граничными условиями, моделирующими внешнее импульсное или периодическое воздействие.

В 2016 году изучался случай пористого материала с флюидонасыщенными открытыми порами. Определяющие соотношения прослойки были получены на основе уравнений Био. Эффект схлопывания пор описан с помощью обобщенного реологического метода. Показано, что при этом обеспечивается термодинамическая согласованность модели – выполняется уравнение баланса энергии для блочной структуры в целом, включая пористый скелет и насыщающую жидкость, в котором кинетическая и потенциальная энергии системы представляют собой сумму кинетических и потенциальных энергий блоков и прослоек. Для численной реализации уравнений прослойки построена бездиссипативная конечноразностная схема по методу Иванова, в блоках использовался метод расщепления по пространственным переменным в сочетании с методом распада разрыва Годунова. На стыках горизонтальных и вертикальных прослоек ставились внутренние граничные условия, которые следуют из закона Кирхгофа для потоков жидкости. Следует заметить, что учет схлопывания пор в рамках данной

модели позволяет анализировать течения с застойными зонами, когда из-за больших сжимающих напряжений проток жидкости через прослойки локально блокируется и перераспределяется между смежными прослойками.

По технологии MPI (Message Passing Interface) разработаны параллельные программные приложения для моделирования волновых движений в двумерной постановке. Выполнен численный анализ волн, вызванных вращением блоков, результаты которого показали сильную анизотропию блочной среды даже при достаточно малой толщине прослоек. На рисунках 1-3 представлены результаты расчетов распространения волн, вызванных мгновенным вращением центрального блока в массиве из 100 x 100 квадратных блоков. Размер блоков (5 см) и механические параметры среды примерно соответствуют параметрам кирпичной кладки с прослойками из застывшего бетонного раствора, насыщенного водой. По эллиптической форме волновых фронтов, изображенных на рисунке 1, можно судить о степени анизотропии блочной среды, нарастающей с увеличением толщины. Для сравнения на рисунке 2 приведены результаты расчетов аналогичной задачи, в которой прослойки считаются упругими, то есть не учитывается пористость и насыщение жидкостью. Сравнение показывает, что при наличии жидкости в порах сглаживаются осцилляции вращательного движения блоков за фронтами упругих волн. На рисунке 3 изображены линии уровня циркуляции потока жидкости в прослойках вокруг блоков. Желтый цвет на рисунках соответствует зонам нулевой циркуляции, появление которых в движущейся среде за фронтами головных волн обусловлено схлопыванием пор. Расчеты были выполнены на 100 процессорах малого кластера Сибирского федерального университета MBC–1000 (cluster-sfu.krasn.ru).

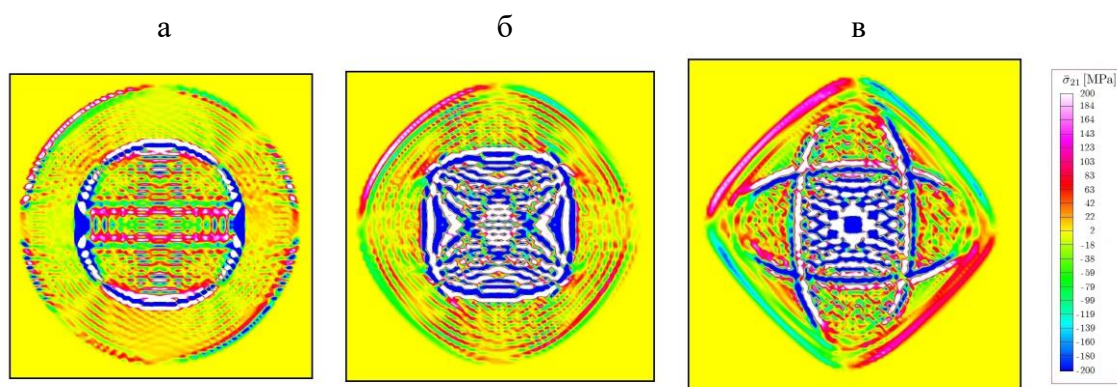


Рисунок 1 – Линии уровня касательного напряжения в блочной среде с пористыми флюидонасыщенными прослойками разной толщины: а) 0.1 мм, б) 1 мм, в) 5 мм

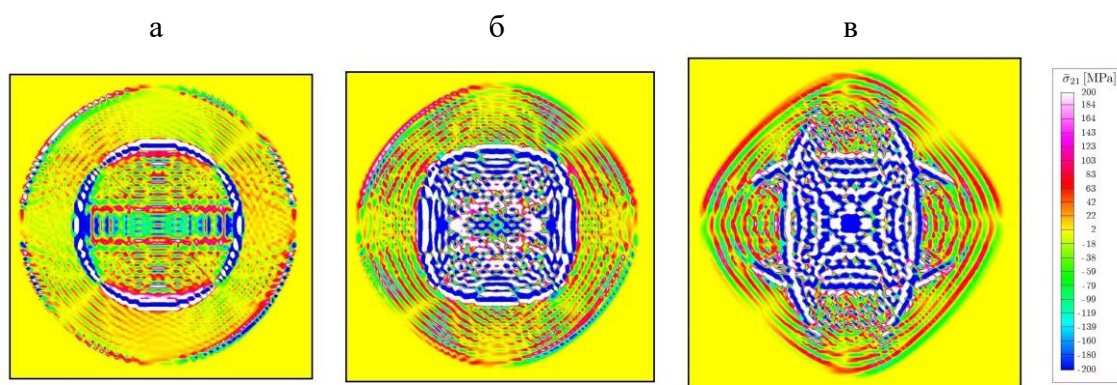


Рисунок 2 – Линии уровня касательного напряжения в блочной среде с упругими прослойками разной толщины: а) 0.1 мм, б) 1 мм, в) 5 мм

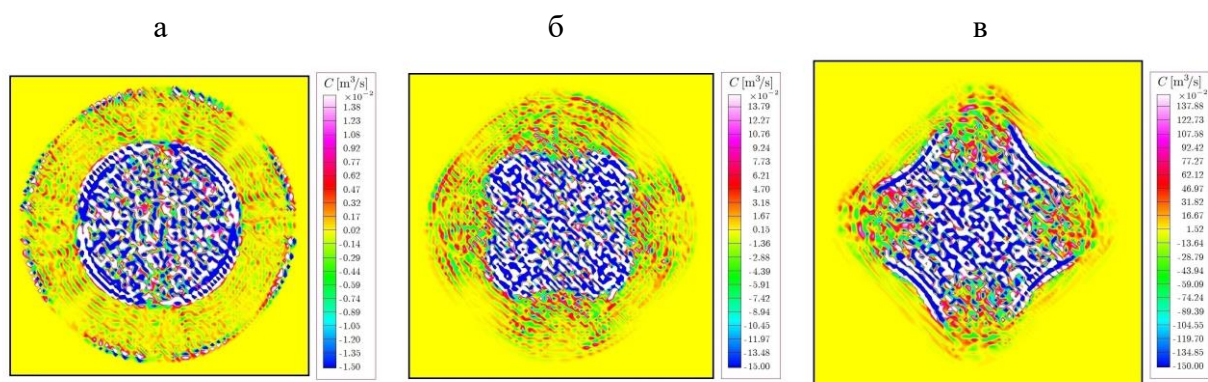


Рисунок 3 – Линии уровня циркуляции потока жидкости вокруг блоков для прослоек разной толщины: а) 0.1 мм, б) 1 мм, в) 5 мм

Графики на рисунке 4 показывают производительность разработанного программного кода. На них по оси абсцисс отложены линейные размерности сетки в блоках, от 10 x 10 до 50 x 50 ячеек, по оси ординат – время счета в минутах 1000 временных шагов на 100 процессорах кластера. Блочный массив в целом включал 100 x 100 блоков, каждым процессором рассчитывалась горизонтальная цепочка из 100 блоков на сетке 20 x 20 ячеек в блоке. Синяя ломаная на рисунке соответствует теоретической зависимости $T_{10k} = T_{10} * k^2$, где T_{10} – фактическое время счета задачи на сетке 10 x 10 ячеек, T_{10k} – оценочное время счета задачи на кратной сетке 10k x 10k ячеек ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Эта зависимость выражает линейный рост времени вычислений с увеличением числа ячеек в предположении, что на операции обмена между процессорами требуется время, не зависящее от размерности сетки. Фиолетовые точки соответствуют фактическим значениям времени счета задач на рассматриваемых сетках. Сравнение показывает, что теоретическая зависимость дает хорошее приближение фактического времени счета. Незначительная разница объясняется тем, что количество операций обмена между процессорами существенно увеличивается с увеличением размерности сетки.

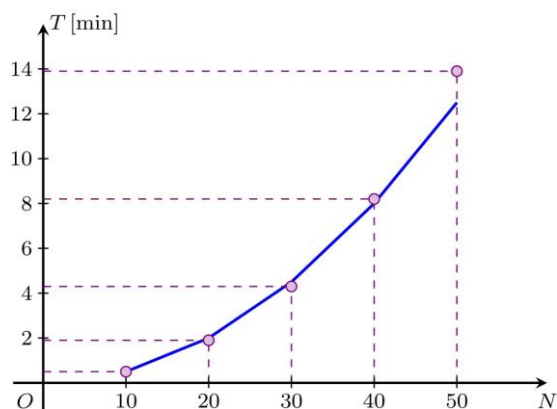


Рисунок 4 – Зависимость времени счета от линейной размерности сетки в блоках

Для оценки эффективности распараллеливания варьировалось число используемых процессоров от 10 (для массива из 100 x 10 блоков) до 100 (для массива из 100 x 100 блоков). Расчеты выполнялись на сетке 20 x 20 ячеек в каждом блоке. Вычисления показали, что с увеличением числа процессоров происходит незначительный рост времени счета, близкий к линейному. Это вызвано пропорциональным увеличением суммарного по всем процессорам числа обменных операций. Так, для выполнения 1000 шагов по времени на 10 процессорах требуется примерно 100 с, на 100 процессорах – примерно 112 с. Показатель эффективности при таких параметрах задачи лежит в пределах 80 – 90 %.

2 Разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов анализа данных геомониторинга катастрофических геодинамических природных процессов для решения прямых и обратных задач.

Разработаны алгоритмы построения аппроксимационных функций при решении прямых и обратных задач по результатам анализа данных наблюдений геомониторинга очаговых зон подготовки сильных цунамигенных землетрясений. Выполнено исследование задачи аппроксимации экспериментальных данных геомониторинга специального вида. Разработаны модели, алгоритмы и вычислительная методика, основанные на применении тригонометрических многочленов в задаче численного анализа данных и приближения эмпирических функций. Выполнен сравнительный анализ алгоритмов, который показал, что: формула суммы Валле–Пуссена дает наилучший тригонометрический образ исследуемого процесса, так как в ней особое внимание уделяется гармоникам малой частоты. Ее частный случай – формула суммы Фейера – восстанавливает значения функций в точках, при этом гармоники низших номеров вносят вклад в приближение больше высших (рис. 5).

Проведены расчеты и выполнен детальный анализ экспериментальных данных для обнаружения закономерностей, описывающих процесс подготовки сильнейших землетрясений в районе Средних Курильских островов. Получены тригонометрические аппроксимации эмпирических функций, описывающих физические характеристики исследуемого природного процесса. Разработанные алгоритмы используются в рамках вычислительной методики при анализе эмпирических данных геомониторинга процесса подготовки сильного землетрясения.

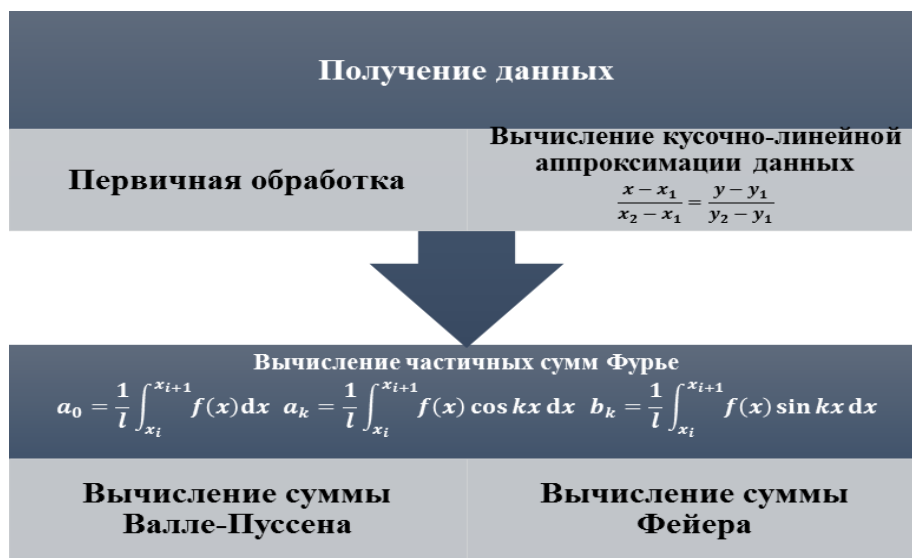


Рисунок 5 – Общая алгоритмическая схема построения аппроксимационных функций

Для обработки данных геомониторинга специального вида разработан также алгоритм построения модели (аппроксимационной функции) на основе разложения в ряд Фурье по ортогональным с единичным весом многочленам Лежандра на отрезке $[-1,1]$ Суть предлагаемого алгоритма заключается в разбиении графика рассматриваемой функции на конечное число частей, которые затем аппроксимируются. Далее строится общая аппроксимационная функция по всем получившимся частям. В качестве узлов интерполяции используются корни многочленов Чебышева первого рода.

Предлагаемый алгоритм оказывается эффективным при достаточно гладких данных. Одним из его преимуществ является большая скорость реализации, что позволяет обрабатывать данные в реальном времени по мере поступления. Алгоритм обработки данных геомониторинга включает в себя процедуру выделения “прогностического клина”. Для оценки положения искомой вершины (пересечение двух аппроксимирующих функций) решается задача экстраполяции, поэтому важна не только степень близости

получившегося многочлена к имеющимся данным, но и насколько точно он отражает внутренние особенности описываемых процессов.

Тестирование разработанного алгоритма выполнено на основе анализа данных геомониторинга о подготовке сильного цунамигенного землетрясения в районе Средних Курильских островов (15.11.2006). При помощи разработанного алгоритма получены искомые модели – аппроксимационные функции (рис. 6).

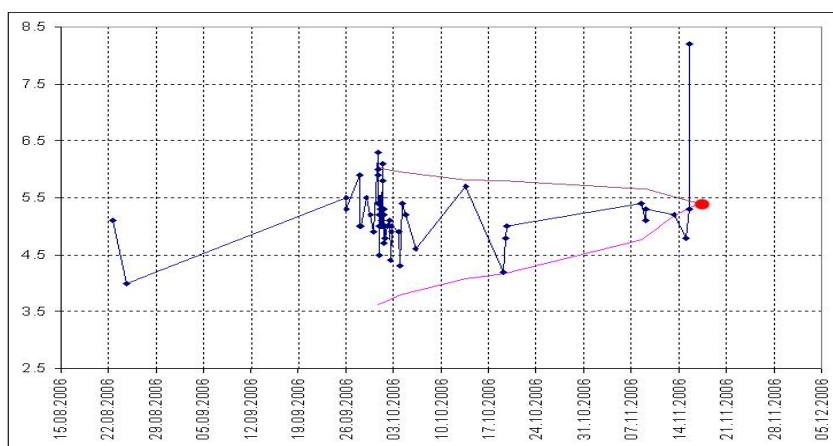


Рисунок 6 – Построение аппроксимационной функции методом разложения в ряд Фурье на примере землетрясения 15.11.2006 г.

На основе предложенных алгоритмов разработаны компьютерные программы и вычислительная методика построения моделей, позволяющих решать прямые и обратные задачи геомониторинга с учетом данных гидрофизического мониторинга, включая следы морских природных катастроф, а также с учетом данных о внешних геофизических факторах. Дальнейшие исследования направлены на распараллеливание указанных алгоритмов на уровне вычислительных узлов кластера для анализа каталогов данных серии катастрофических землетрясений.

3 Разработка, реализация и отладка параллельных высокопроизводительных алгоритмов для нестационарных уравнений гидродинамики на основе разработанной технологии

В отчетный период был проведен анализ параллельной реализации двух подходов к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Первый подход основан на совмещении методов Узавы и простой итерации. Он эффективно распараллеливается в рамках технологии MPI для вычислительных систем с

распределенной памятью. Во втором подходе применяются нелинейные итерационные процессы типа метода сопряженных градиентов и его параллельная реализация более естественна для систем с общей памятью (например, с использованием технологии OpenMP). Современные гибридные технологии массового параллелизма, например, CUDA, недостаточно эффективны для обоих подходов из-за ограничений по памяти и на доступных вычислительных системах неконкурентоспособны по сравнению с классическими технологиями.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений Навье–Стокса, моделирующая движение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале. На входной границе задаются скорости потока, на жестких стенках ставится условие прилипания, на выходной границе используется модифицированное граничное условие “do nothing”. Дискретный аналог уравнений построен на основе полулагранжева подхода. На первом этапе слагаемое, соответствующее субстанциональной производной, рассматривается как правая часть уравнений движения. На основе конечных элементов Тейлора–Худа строится устойчивый метод для задачи Стокса. Затем аппроксимируется производная вдоль траектории. В результате на каждом шаге по времени возникает следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\left(\frac{1}{\tau} I + A_h \right) \mathbf{U}_h^k + B_h^T \mathbf{P}_h^k = \mathbf{F}_h^k + \frac{1}{\tau} \hat{\mathbf{U}}_h^{k-1}, \quad (1)$$

$$B_h \mathbf{U}_h^k = 0, \quad (2)$$

где I – единичная матрица, $A_h \mathbf{U}_h^k$ – дискретизация вязких слагаемых, $B_h \mathbf{U}_h^k$ – дискретизация дивергенции вектора скорости $\mathbf{U}_h^k$, $B_h^T \mathbf{P}_h^k$ – дискретизация градиента давления. Вклад в вектор правой части дает аппроксимация объемных сил и граничного условия “do nothing”, а также дискретизация производной вдоль траектории.

Полученная система относится к задачам с седловой точкой для симметричной плохо обусловленной матрицы. Это свойство необходимо учитывать при построении численного метода для решения системы. Кроме того, важно учесть, что метод конечных элементов требует обработки и хранения большого объема данных. В связи с этим разработаны вычислительные технологии, которые:

- не требуют сборки и хранения блоков глобальной матрицы системы (1) – (2) (большого объема данных), сборка невязки и произведения матрицы на вектор проводится поэлементно с использованием только локальных матриц жесткости;

- не требуют прямого обращения глобальной матрицы жесткости и ее блоков, а используют только итерационные методы;

– эффективно определяют седловую точку, используя методы типа Узавы.

Для решения системы (1) – (2) были реализованы и протестированы две модификации алгоритма Узавы. Первая модификация (метод Узавы – простой итерации) основана на линейном итерационном процессе без явного использования оператора Шура, вторая модификация (метод Узавы – сопряженных градиентов) для вычисления оператора Шура и его образа использует метод сопряженных градиентов. Предложенные модификации построены относительно отклонений скорости и давления от искомой седловой точки конечномерной задачи. В случае линейных итерационных процессов такая замена в постановке задачи не влияет на результаты вычислений. Однако эффективность вычислений значительно повышается при использовании нелинейного метода сопряженных градиентов для вычисления оператора Шура (второй подход). Число внутренних, связанных с вычислением образа оператора Шура, и внешних относительно оператора Шура итераций являются параметрами итерационного метода. Если эти параметры положить равными единице, то обсуждаемый процесс будет аналогичен градиентному спуску. При отсутствии же ошибок округления метод приводит к точному решению при числе внутренних и внешних итераций, равном размерностям искомым компонент скорости и давления, соответственно.

Численные эксперименты на модельных задачах (рис. 7) подтвердили сходимость и эффективность предложенных методов. На примере задачи Пуазейля проведены эксперименты по сравнению модифицированных методов с двумя широко известными методами – стабилизированным методом бисопряженных градиентов и методом Эрроу–Гурвица (табл. 1 – 2). Из табл. 1 – 2 видно, что разработанные методы имеют хорошую скорость сходимости и точность вычислений. Преимущество по количеству итераций и точности показывает нелинейный метод Узавы – сопряженных градиентов.

Был проведен анализ потенциального параллелизма разработанных подходов в рамках технологий OpenMP, MPI, CUDA для вычислительных систем с общей, распределенной памятью и гибридной архитектуры, соответственно.

Таблица 1. Количество итераций и время выполнения (в секундах) методов на одном временном шаге при решении задачи Пуазейля. $Re = 100$.

Размер сетки	Метод Эрроу– Гурвица		Метод Узавы – простой итерации		Метод Узавы – сопряженных градиентов		Стабилизированным методом бисопряженных градиентов	
	Итер.	Время	Итер.	Время	Итер.	Время	Итер.	Время
$N \times N$								
32×32	37	$O(10^{-2})$	21	$O(10^{-2})$	1	$O(10^{-1})$	35	$O(10^{-1})$
64×64	29	$O(10^{-1})$	24	$O(10^{-1})$	1	$O(10^{-1})$	9	$O(10^{-1})$
128×128	58	$O(1)$	56	$O(1)$	2	$O(1)$	12	$O(1)$

Таблица 2. Дискретные $\mathbb{L}_2$ – нормы ошибок вычислений. Сетка 64×64 , $Re = 100$.

Здесь $\mathbf{W}_h = (\mathbf{U}_h, \mathbf{P}_h)$, $\mathbf{W}_h^{\text{ex}} = (\mathbf{U}_h^{\text{ex}}, \mathbf{P}_h^{\text{ex}})$ – численное и точное решения системы.

Метод	$\ \mathbf{W}_h - \mathbf{W}_h^{\text{ex}}\ $	$\ \mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^{\text{ex}}\ $	$\ \mathbf{P}_h - \mathbf{P}_h^{\text{ex}}\ $
Эрроу–Гурвица	4,43E-05	9,05E-06	4,34E-05
Узавы – простой итерации	4,62E-05	9,06E-06	4,53E-05
Узавы – сопряженных градиентов	4,33E-05	9,05E-06	4,23E-05
Стабилизированных бисопряженных градиентов	4,33E-05	9,13E-06	4,23E-05

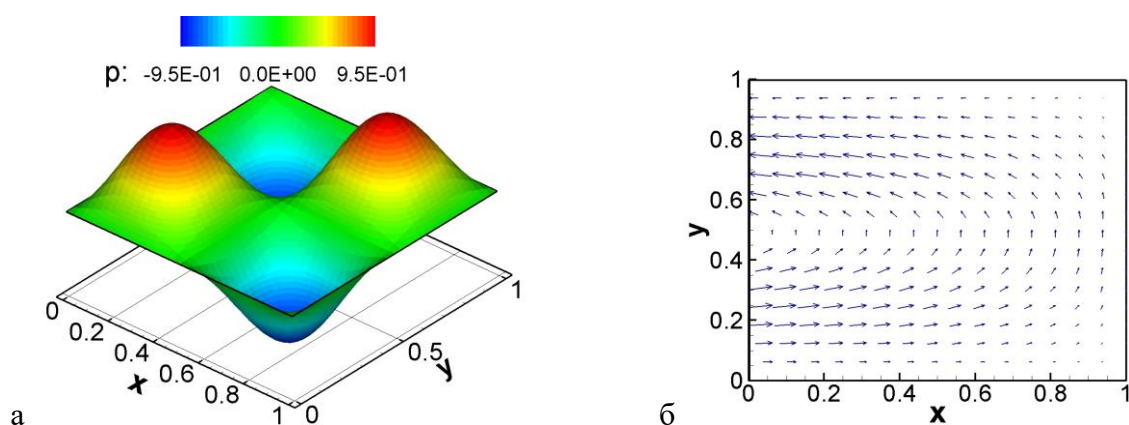


Рисунок 7 – Тестовый расчет задачи для уравнений Навье–Стокса: поверхность давления $\mathbf{P}_h$ и поле скоростей $\mathbf{U}_h$ при $Re = 100$

Поскольку в основе первого предложенного подхода лежит метод простой итерации, его эффективно распараллеливать с помощью MPI, используя стандартную для конечных элементов декомпозицию вычислительной области без теневых граней. Для реализации первого подхода для систем с общей памятью необходимо:

- изменить схему сборки невязки с поэлементной на поузловую;
- разработать специальную эффективно распараллеливающуюся процедуру останова итерационных процессов.

Второй подход для вычислительных систем с распределенной памятью наследует все проблемы параллельной реализации метода сопряженных градиентов. Применение подходов типа Шварца или блочных итерационных методов для распараллеливания метода сопряженных градиентов в нашем случае нецелесообразно. Во-первых, в этих методах реализуется двойной итерационный процесс, использующий некоторое приближение матрицы системы (1)–(2), что, в свою очередь, замедляет скорость сходимости “внешних” итераций и увеличивает объем вычислений в целом. Во-вторых, для повышения эффективности метода декомпозиции нужно использовать различные типы “внутренних” краевых условий на границах между подобластями или подобласти с

перекрытием. Однако в этом случае увеличиваются размеры подобластей, что приводит к “удорожанию” внутренних итераций. Методы декомпозиции имеют множество открытых вопросов, требующих исследований. В связи с этим, основной стратегией для распараллеливания второго подхода является применение технологии OpenMP совместно с поузловой сборкой невязки. В этом случае хорошо распараллеливаются вычисления скалярного произведения матрицы на вектор в методе сопряженных градиентов, однако полностью исключить синхронизацию потоков в основных циклах невозможно. Следовательно, приемлемое ускорение достигается только, если время собственно вычислений в потоках значительно превышает время, затрачиваемое на их синхронизацию.

Исследования эффективности подходов для гибридных архитектур сталкиваются с проблемами, связанными, прежде всего, с ограничением по памяти. Начаты исследования по эффективной векторизации разработанных подходов.

Было показано, что кроме распараллеливания повышения производительности разрабатываемого программного кода можно добиться за счет использования различных режимов компиляции и вычислительных инструментариев. Например, представление чисел с расширенной точностью для плохо обусловленных матриц, подбор оптимального критерия сходимости численного метода позволяет достичь приемлемой точности вычислений за число итераций меньшее, чем порядок системы. Построение алгоритмов, не включающих явного обращения глобальных матриц жесткости, позволяет хранить, собирать и обрабатывать только локальные матрицы жесткости, что существенно уменьшает время вычислений и дает возможность проводить расчеты на мелких сетках без жестких ограничений, накладываемых объемом оперативной памяти. Выделение памяти, использующее специальные возможности компиляторов, также улучшает производительность программы.

4 Повышение вычислительной эффективности алгоритмов решения больших систем линейных алгебраических уравнений на основе метода ортогонализации. Разработка численных методов второго и третьего порядка точности для решения гибридных задач, формулируемых в терминах систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

$$AX=B; \quad X, B \in \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

основанные на ортогонализации, являются наиболее устойчивыми к погрешностям округления при проведении компьютерных вычислений. В качестве примера можно привести метод ортогонализации – прямой метод решения систем, наиболее устойчивый из известных прямых методов. Другим примером является метод сопряженных градиентов – итерационный метод, в котором строится ортогональная в некоторой метрике последовательность векторов, на каждом шаге минимизирующая невязку. Планировалось в отчетный период построить и исследовать алгоритмы решения системы (3), объединяющие в себе положительные качества каждого из упомянутых методов и допускающие эффективную реализацию на многопроцессорных суперкомпьютерах.

Разработанные методы базируются на алгоритмах решения однородной системы

$$AX = 0 \in \mathbb{R}^m; \quad X \in \mathbb{R}^m, X \neq 0. \quad (4)$$

Эту систему уравнений можно интерпретировать как сопряженность искомого решения X к строкам матрицы A , а потому для построения приближенного решения задачи (4) было бы естественным применить метод ортогонализации.

Пусть в (4) квадратная матрица A порядка m и ранга $m-1$ симметрична и неотрицательно определена. Тогда при точных вычислениях решение задачи (4) может быть получено последовательной ортогонализацией:

- задается начальное приближение X^0 к решению X системы (4): $\langle X, X^0 \rangle \neq 0$;
- для любого натурального n вычисляется

$$X^n = X^{n-1} - \frac{\langle AX^{n-1}, X^{n-1} \rangle}{|AX^{n-1}|^2} AX^{n-1}. \quad (5)$$

Доказано, что для любого X^0 построенная последовательность $\{X^n\}$ сходится к решению задачи (4) со скоростью геометрической прогрессии. Если же воспользоваться известными алгоритмами ортогонализации на подпространствах Крылова, то при сделанных ограничениях удастся доказать, что решение задачи (4) может быть получено не более, чем за $m-1$ шаг итерационного процесса:

- задается начальное приближение X^0 к решению X системы (4): $\langle X, X^0 \rangle \neq 0$;
- полагая $C^1 = AX^0$, для любого натурального n вычисляется

$$X^n = X^{n-1} - \frac{\langle C^n, X^{n-1} \rangle}{|C^n|^2} C^n, \quad C^{n+1} = AX^n - \frac{\langle AX^n, C^n \rangle}{|C^n|^2} C^n. \quad (6)$$

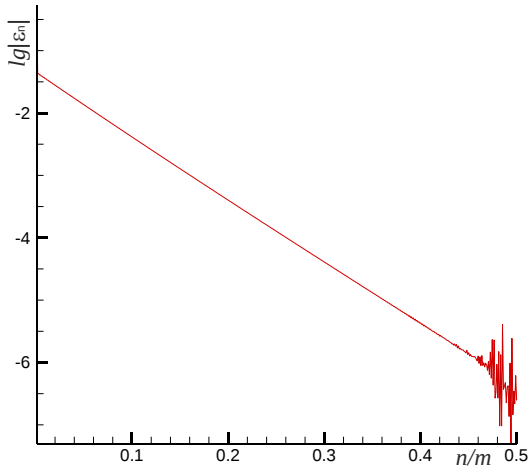
Эти алгоритмы позволили значительно продвинуться в решении частичной проблемы собственных значений и векторов. Поэтому естественно применить их для решения задачи (3), которая представима в эквивалентном виде:

найти вектор $Y = (y_0, y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ такой, что

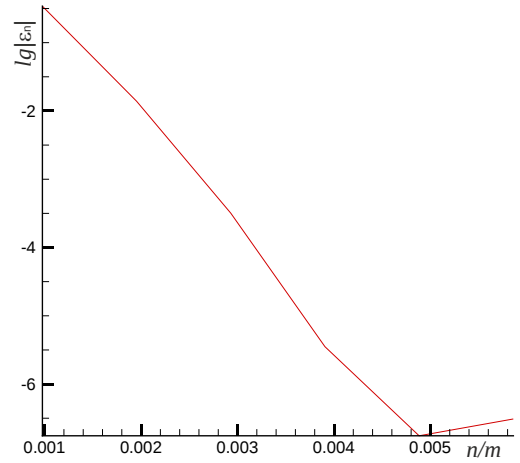
$$y_0 \neq 0, \quad \langle \mathbf{Y}, \mathbf{B}_k \rangle = 0 \text{ для любого } \mathbf{B}_k = (-b_k, a_{k1}, \dots, a_{km})^T \in \mathbb{R}^{m+1}. \quad (7)$$

Если $\mathbf{Y}$ – решение задачи (7), то $\mathbf{X} = (y_1, \dots, y_m)^T / y_0 \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет системе (3).

Однако алгоритмы (5) и (6) нельзя применить непосредственно к задаче (7) из-за того, что расширенная матрица системы (3) прямоугольная. Для ее симметризации можно использовать ортогональные проекторы на подпространства, натянутые на строки $\mathbf{B}_k^T$ расширенной матрицы. В частности, для задачи (7) в процессах (5) и (6) в качестве матрицы A можно взять сумму A_p ортогональных проекторов на одномерные подпространства коллинеарных $\mathbf{B}_k$ векторов $A_p = \sum_{1 \leq k \leq m} |\mathbf{B}_k|^2 \mathbf{B}_k \otimes \mathbf{B}_k$. В этом случае имеется простой способ организации параллельных вычислений при умножении матрицы A_p на столбец.



Итерационный процесс (5): $A = A_p$



Итерационный процесс (6): $A = A_p$

Рисунок 8 – Сходимость процессов (5) и (6) решения тестовой задачи при симметризации A_p

Была проведена серия тестовых расчетов для системы (3), являющейся разностным аналогом на равномерной сетке первой краевой задачи для одномерного эллиптического уравнения с постоянным коэффициентом; порядок системы $m = 1024$, а число обусловленности ее матрицы $\approx 2 \cdot 10^5$. На рис. 8 представлены результаты работы алгоритмов (5) и (6) на основе симметризации A_p ; здесь n – номер текущей итерации, а $\varepsilon_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}$ – невязка с точным решением. Во всех расчетах начальное приближение полагалось равным нулю. Правая часть в (3) выбиралась таким образом, чтобы составляющие x_k точного решения $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ системы (3) были независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ случайными величинами. Расчеты показали, что

симметризация A_p весьма эффективна, а процесс (6) приводит к приемлемому результату за относительно небольшое число итераций.

В направлении исследований, связанном с повышением вычислительной эффективности решения гибридных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в отчетном году были получены следующие основные результаты.

Разработан алгоритм интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Созданные численные схемы первого и второго порядков точности отличаются от традиционных тем, что в построенных методах приближенно вычисляется не только решение, но и производная искомого решения. Погрешность вычислений контролируется двумя неравенствами, одно из которых гарантирует точность приближенного решения, а другое обеспечивает нужную аппроксимацию производной. Тестирование на неявных задачах подтвердило эффективность созданных алгоритмов и показало, что использование двух неравенств позволяет значительно повысить надежность расчетов.

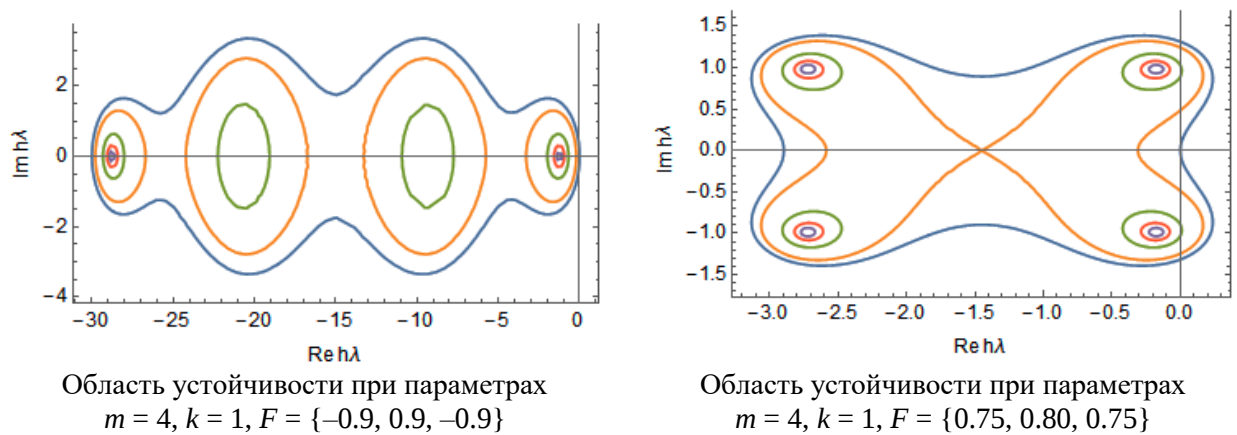


Рисунок 9 – Области устойчивости методов первого порядка

Создан набор вычислительных схем первого порядка, имеющих заданную расширенную вдоль действительной оси область устойчивости с количеством стадий до $m = 27$ включительно. Разработанные явные m -стадийные методы первого порядка точности, у которых области устойчивости промежуточных численных формул согласованы с областью устойчивости основной схемы (примеры областей устойчивости приведены на рис. 9), показывают высокую эффективность при интегрировании тестовых задач Коши умеренной жесткости. Построены неравенства для контроля точности и устойчивости численной схемы, предложен алгоритм выбора шага интегрирования с учетом грубой оценки максимального собственного числа матрицы Якоби системы. На основе методов первого порядка разработан алгоритм с переменным шагом и числом стадий. Переключение между методами внутри алгоритма осуществляется по критерию

устойчивости, что позволяет значительно повысить эффективность расчетов тех задач, при решении которых шаг интегрирования ограничен преимущественно требованиями устойчивости.

На основе набора методов первого порядка и схемы Мерсона четвертого порядка точности построен алгоритм переменного порядка и шага. Его программная реализация позволяет любой из набора методов первого порядка подключать к методу Мерсона, а переключение между методами осуществляется по критерию устойчивости. Это позволяет повысить эффективность за счет расчета переходных участков вычислительными схемами более высокого порядка (поскольку на таких участках шаг ограничен, в основном, требованиями точности), а участки установления (где шаг интегрирования ограничен преимущественно требованиями устойчивости) методом первого порядка, имеющим существенно больший интервал устойчивости по сравнению с методом Мерсона.

На языках программирования высокого уровня реализованы алгоритмы интегрирования неявных жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Запрограммированы тестовые примеры задач с различным коэффициентом жесткости. Проведены численные эксперименты, позволяющие оценить эффективность разработанных алгоритмов применительно к задачам разного типа.

5 Развитие методов построения гарантированных оценок решений и множеств достижимости для нелинейных управляемых систем. Исследование задач практической устойчивости при оценке живучести и безопасности систем.

В ходе выполнения проекта были изучены свойства численных методов гарантированного оценивания решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых зависят как от управляющих, так и от возмущающих воздействий. Были реализованы численные методы, использующие дефект (невязку) при вычислении верхних и нижних границ решений, а также при вычислении гарантированных границ множеств достижимости для нелинейных управляемых систем. С их помощью решались задачи практической устойчивости на конечном интервале времени и задачи определения живучести и безопасности технических систем и силовых конструкций.

Методы гарантированного оценивания применялись для вычисления гарантированных границ зон опасных состояний и пороговых значений параметров сложных систем, которые соответствуют границам этих зон. Для контроля попадания траектории системы в опасную зону вводится понятие предельного отклонения. К задачам

оценки предельных отклонений относится задача движения самолета на этапе автоматического захода на посадку, где определяется возможность нарушения ограничений, наложенных на кинематические параметры самолета, в момент касания взлетно-посадочной полосы. К таким задачам относится также оценка возможности потери устойчивости движения летательного аппарата на заданном интервале времени, упрощенным критерием которой может служить пороговое или критическое значение одного из параметров движения, например, угла атаки или угла скольжения.

В рамках выполненных работ были построены границы множеств решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение самолета. Текущие управления самолетом заданы как функции времени, характер их изменения по времени неизвестен, задаются только указанные геометрические ограничения на их величины. Строились также границы решений в упрощенных вариантах:

- исследовался только заключительный этап захода на посадку, на котором траектория представлена частью прямолинейной глissады снижения;
- учитывались только максимальные накопления боковых отклонений движения.

Расчеты с применением гарантированного метода позволяют выделить область начальных состояний, откуда гарантируется завершение посадки с хорошим показателем качества. На рисунке 10 по горизонтальной оси отложено смещение центра самолета от линии взлетно-посадочной полосы в метрах, по вертикальной оси – скорость изменения бокового смещения в метрах в секунду.

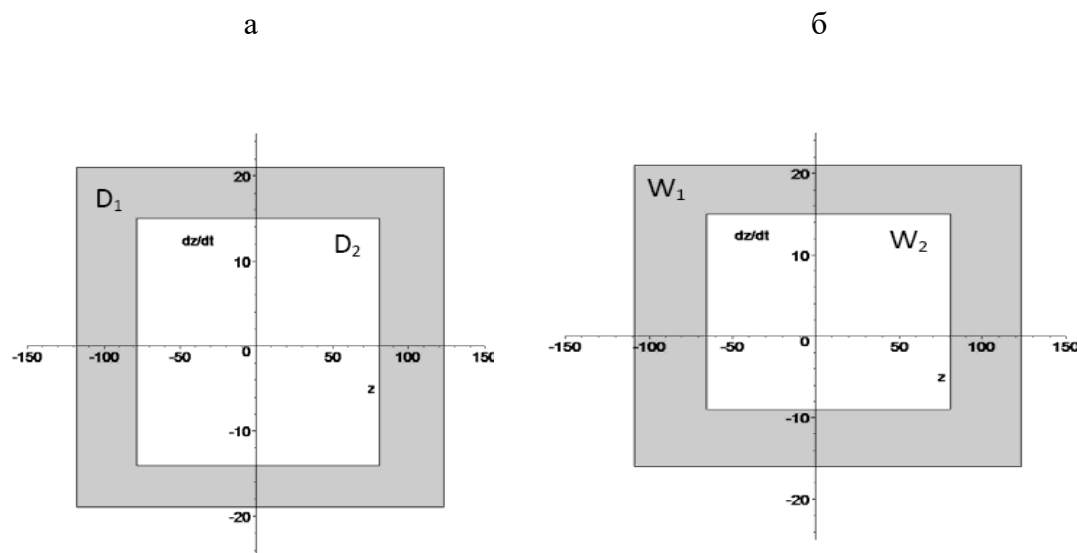


Рисунок 10 – Границы включений областей допустимых отклонений под влиянием быстрых изменений скорости бокового ветра (а), границы соответствующих данным возмущениям областей возможных отклонений (б)

Гарантированные методы – эффективный инструмент для вычисления включений множеств достижимости и предельных отклонений летательных аппаратов, а также для определения живучести и безопасности технических систем и силовых конструкций. В прошедшем году методы гарантированного оценивания применялись также для оценки траекторий модели, описывающей преследование маневрирующего объекта (преследуемого) другим объектом (преследователем) по заданному закону сближения под действием силы земного притяжения и силы аэродинамического сопротивления в атмосфере, плотность которой убывает с ростом высоты по экспоненциальному закону. Анализ практической устойчивости совместно с обратным анализом ошибок численных решений применялся для проверки точности численных решений в задаче оценки концентрации напряжений нестандартных трубопроводов с эксцентричным каналом под действием внутреннего давления. Разработанный подход позволяет повысить обоснованность и достоверность результатов расчета, что способствует повышению надежности и безопасности технических объектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За отчетный период выполнен полный цикл исследований, запланированных по данному проекту. В ходе его выполнения получены результаты, приоритет которых подтверждается рейтинговыми публикациями коллектива исполнителей проекта в ведущих Российских и зарубежных научных журналах.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные публикации

1. *Sadovskii V.M., Chentsov E.P.* Analysis of oscillation processes in a blocky medium by means of continuous models // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1773. – P. 080003-1–080003-9.
2. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Method of superposition of dislocations for finding stress-strain state around fan-shaped structure in a brittle rock // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1773. – P. 080004-1–080004-7.
3. *Tarasov B.G., Sadovskii V.M.* Modeling of fan formation in a shear rupture head on the basis of singular solutions of plane elasticity // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1773. – P. 080006-1–080006-7.
4. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Analyzing the deformation of a porous medium with account for the collapse of pores // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – V. 57, Iss. 5. – P. 808–818.
5. *Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 53–65.
6. *Тарасов Б.Г., Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ веерных волн в лабораторной модели, имитирующей распространение сдвиговых трещин в горных породах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 1. – С. 38–51.
7. *Тарасов Б.Г., Садовский В.М., Садовская О.В.* Моделирование веерообразования в вершине глубинной трещины сдвига на основе уравнений плоской теории упругости // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 28–37.
8. *Cadena L., Cadena F., Simonov K., Zotin A., Okhotnikov G.* Image compression algorithm using wavelet transform // Proceedings of SPIE, Vol. 9971: Applications of Digital Image Processing XXXIX.
9. *Быков А.А., Курако М.А., Симонов К.В.* Решение обратной задачи гидрофизического мониторинга на примере Чилийских цунами // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 2 (14). – С. 119–125.
10. *Курако М.А., Симонов К.В., Кудря Н.О.* Следы морских природных катастроф: численный анализ данных // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 2 (14). – С. 186–192.
11. *Кудря Н.О., Курако М.А., Симонов К.В.* Гидрофизический мониторинг аномально высоких волн: обработка данных и прогноз опасности // Региональные проблемы

- дистанционного зондирования Земли (РПД33-2016): материалы III Междунар. науч. конф. (13–16 сентября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СФУ, 2016. – С. 267–270.
12. *Перетокин С.А., Шарейко М.А., Симонов К.В.* Интерполяция годографов рефрагированных волн // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 1. – С. 376–377.
 13. *Сибгатулин В.Г., Перетокин С.А., Худобердин И.Р., Кабанов А.А., Симонов К.В.* Оперативные оценки геодинамической опасности Алтае-Саянского региона (2009 – 2016) // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 1. – С. 379–381.
 14. *Мацулев А.Н., Симонов К.В.* Анализ внешних геофизических факторов, сопутствующих сильным землетрясениям // Моделирование неравновесных систем – 2016: материалы XVIV Всеросс. семинара (7–9 октября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2016. – С. 75–80.
 15. *Dementyeva E., Karepova E., Kireev I.* Inexact Uzawa conjugate gradient method for the Stokes problem for incompressible fluid // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1773. – P. 100002-1–100002-9.
 16. *Дементьева Е.В., Карепова Е.Д., Киреев И.В.* Неточный метод Узавы – сопряженных градиентов для задачи Стокса для несжимаемой жидкости // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 2. – С. 129–131.
 17. *Киреев И.В.* Ортогонально-степенной метод решения частичной проблемы собственных значений и векторов для симметричной неотрицательно определенной матрицы. // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 44–54.
 18. *Novikov E.A., Rybkov M.V.* Application of explicit methods with extended stability regions for solving stiff problems // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – V. 9, No. 2. – P. 209–219.
 19. *Novikov E.A., Rybkov M.V., Novikov A.E.* Numerical algorithm for design of stability polynomials for the first order methods // 9th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation (12–16 сентября 2016 г., Оулу, Финляндия). – IEEE-Conference Publication Services, 2016.

20. *Новиков А.Е., Новиков Е.А.* Алгоритм переменного порядка с применением явных методов // Современное состояние науки и техники: сб. трудов Междунар. научно-практ. конф. (4–9 февраля 2016 г., Сочи). – Сочи: Оптима, 2016. – С. 114–120.
21. *Рогалев А.Н., Доронин С.В.* Использование критериев обусловленности при численных расчетах напряженного состояния силовых конструкций // Системы, методы, технологии. – 2016. – № 2 (30). – С. 91–100.
22. *Рогалев А.Н.* Использование функций чувствительности для расчета включений трубок траекторий управляемых систем // Вестник СибГАУ. – 2016. – Т. 17, № 2. – С. 350–358.
23. *Рогалев А.Н.* Гарантированные оценки фазового состояния в задачах проводки самолета под влиянием ветровых возмущений // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 2. – С. 81–83.
24. *Рогалев А.Н.* Исследование практической устойчивости технических систем на конечном интервале времени // Региональные проблемы дистанционного зондирования Земли (РПДЗЗ-2016): материалы III Междунар. науч. конф. (13–16 сентября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СФУ, 2016. – С. 300–304.
25. *Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.* Расчет композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных элементов // Вестник СибГАУ. – 2016. – Т. 17, № 3. – С. 587–594.
26. *Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.* Многосеточное моделирование трехмерных упругих цилиндрических панелей и оболочек // Информационные технологии и математическое моделирование: избр. статьи VIII науч. интернет-конф. с междунар. участием. – Красноярск: СибГАУ, 2016. – С. 85–115.
27. *Матвеев А.Д.* Многосеточные конечные элементы в анализе напряженного состояния трехмерных упругих тел с неоднородной структурой // Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы XI Междунар. конф. (20–25 октября 2016 г., Казань). – Казань: Казанский федеральный университет, 2016. – С. 206–212.
28. *Varygina M.* Numerical modeling of wave propagation processes in micropolar rods and thin plates // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1773. – P. 080007-1–080007-8.
29. *Варыгина М.П., Смолехо И.В.* Численное моделирование микрополярных тонких пластин // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 2. – С. 120–122.

30. *Смолехо И.В., Садовская О.В.* Анализ уравнений жидкого кристалла, учитывающих моментное взаимодействие // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 2 (14). – С. 369–374.
31. *Смолехо И.В.* Параллельный вычислительный алгоритм для анализа акустических волн в жидком кристалле с учетом моментных взаимодействий // Молодой ученый. – 2016. – № 11 (115). – Ч. I. – С. 69–75.
32. *Ченцов Е.П.* Модели блочной среды для исследования колебательных процессов в структурно неоднородных средах // Молодой ученый. – 2016. – № 11 (115). – Ч. I. – С. 79–84.
33. *Ченцов Е.П.* Моделирование волновых процессов в композитных материалах со слоистой и блочной структурой // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти акад. М.Ф. Решетнева (9–12 ноября 2016 г., Красноярск). – Красноярск: СибГАУ, 2016. – Ч. 2. – С. 148–150.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Сведения о созданной и оформленной интеллектуальной собственности

1. *Садовский В.М., Садовская О.В., Ченцов Е.П.* Программный комплекс для численного моделирования динамических процессов в многоблочных средах на кластерных системах (2Dyn_Blocks_MPI). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016615178 от 17.05.2016 // Программы, зарегистрированные в реестре программ для ЭВМ Российской Федерации. Электронный бюллетень – Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем (RU ОБПБТ № 6(116) от 20.06.2016). – М: ФИПС, 2016.
2. *Садовский В.М., Варыгина М.П.* Программный комплекс для расчета двумерных динамических задач в блочных средах с тонкими упругими и вязкоупругими прослойками на графических ускорителях (2Dyn_Blocks_CUDA). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016615361 от 23.05.2016 // Программы, зарегистрированные в реестре программ для ЭВМ Российской Федерации. Электронный бюллетень – Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем (RU ОБПБТ № 6(116) от 20.06.2016). – М: ФИПС, 2016.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Количество публикации по тематике проекта за весь период выполнения проекта по годам

индикатор	Ед. измерения	Всего за 2013-2016 гг.	2013	2014	2015	2016
Количество публикаций в ведущих российских и международных журналах по результатам исследований, полученных в процессе реализации проекта	единиц	131	26	39	36	30
Количество публикаций в мировых научных журналах, индексируемых в базе данных «Сеть науки» (WEB of Science)	единиц	31	7	8	16	5
Число тезисов в конференциях	единиц	132	41	27	31	33
Число охраняемых объектов интеллектуальной собственности зарегистрированных в России	единиц	4	1	1	0	2

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2016 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
1. Математическое моделирование течений жидкости в пористых прослойках блочной упругой среды. Численное исследование влияния ударных волн и резонансного возбуждения среды на картину течения.	1. Математическая модель блочной среды с флюидонасыщенными межблочными прослойками, программно реализованная на многопроцессорных супер-ЭВМ. Результаты численного исследования влияния ударных волн и резонансного возбуждения среды на течение флюида.
2. Разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов анализа данных геомониторинга катастрофических геодинамических природных процессов для решения прямых и обратных задач.	2. Математические модели и алгоритмы анализа данных геомониторинга катастрофических геодинамических природных процессов для решения прямых и обратных задач.
3. Разработка, реализация и отладка параллельных высокопроизводительных алгоритмов для нестационарных уравнений гидродинамики на основе разработанной технологии.	3. Параллельные алгоритмы, реализующие разработанную вычислительную технологию для нестационарных уравнений гидродинамики.
4. Повышение вычислительной эффективности алгоритмов решения больших систем линейных алгебраических уравнений на основе метода ортогонализации. Разработка численных методов второго и третьего порядка точности для решения гибридных задач, формулируемых в терминах систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	4. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью итерационной версии метода ортогонализации, реализованный на многопроцессорных суперкомпьютерах. Методы второго и третьего порядка точности для решения гибридных задач с учетом нелинейного поведения событийной функции, формулируемых в терминах систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Развитие методов построения	5. Методы, использующие дефект (невязку)

гарантированных оценок решений и множеств достижимости для нелинейных управляемых систем. Исследование задач практической устойчивости при оценке живучести и безопасности систем.	решений при вычислении верхних и нижних границ решений. Результаты построения гарантированных оценок и множеств достижимости для нелинейных управляемых систем. Результаты исследования задач практической устойчивости и их применение к определению живучести и безопасности систем.
---	---