

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «КРАСНОЯРСКИЙ
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СО РАН –
ОБОСОБЛЕННОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ
ФИЦ КНЦ СО РАН (ИВМ СО РАН)

УДК 517.958:536.25
Рег. № НИОКТР АААА-А18-118011890025-2

УТВЕРЖДАЮ

Директор ФИЦ КНЦ СО РАН,
д. ф-м. н

«30» января 2019 г. Н.В. Волков

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

“КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ
В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ”
(промежуточный за 2018 год)

Направление фундаментальных исследований
Ш.22 Механика жидкости, газа и плазмы, многофазных и неидеальных сред,
механика горения, детонации и взрыва

(номер 0356-2017-0003)

Протокол Ученого совета ФИЦ КНЦ СО РАН
№ 02/2019 от «30» января 2019 г.

Руководитель НИР
Главный научный сотрудник,
д-р физ.-мат. наук, профессор

В.К. Андреев

Красноярск 2018

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В.К. Андреев
	(подпись, дата)	
Исполнители: г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.М. Белолипецкий
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	А.В. Шмидт
	(подпись, дата)	
м.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Т.В. Якубайлик
	(подпись, дата)	

М.Н.С., к.ф.-М.Н.

(подпись, дата)

Е.П. Магденко

Н.С., к.ф.-М.Н.

(подпись, дата)

Е.Н. Черемных

М.Н.С.

(подпись, дата)

О.С. Володько

Старший инженер

(подпись, дата)

Н.Ф. Ильина

Нормоконтроль

(подпись, дата)

А.В. Вяткин

Отчёт 37 с., 16 рис., 1 табл., 2 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФфуЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач гидродинамики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

В результате исследований за отчётный период построены на основе метода симметрий и развитой техники изучения совместности дифференциальных систем новые точные решения уравнений жидких сред (идеальной жидкости и газа, конвекции, термодиффузии, турбулентного следа); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных сил; разработаны комплексы программ расчётов конвективных течений с поверхностями раздела, стратифицированных течений в солёных озёрах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Комплекс программ расчёта нелинейной устойчивости двухслойных конвективных течений, карты устойчивости и области допустимых физических параметров.....	7
2 Получение достаточных условий пассивности гладких уравнений с частными производными	19
3 Оценка потоков метана в атмосферу при изменении климата в зоне вечной мерзлоты. Оценка влияния различных гидрофизических режимов в солёном стратифицированном озере на экологические процессы на основе трёхмерного численного моделирования.....	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	31
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	34
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом гидродинамики. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях. Кроме того, поверхности раздела возникают и при изучении гидрофизики озёр, водохранилищ и структуры вечной мерзлоты в условиях меняющегося климата.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

В связи с вышесказанным, в отчетный период проводились исследования течений жидких сред с поверхностями раздела, причём учитывалось влияние тепло- и массопереноса, турбулентности.

Настоящий отчет является промежуточным по теме: «Комплексный анализ гидродинамических аспектов функционирования природных систем и технических объектов в экстремальных условиях».

План 2018 года: комплекс программ расчёта нелинейной устойчивости двухслойных конвективных течений, карты устойчивости и области допустимых физических параметров.

В рамках модели Обербека – Буссинеска изучена задача об устойчивости равновесия двухслойной системы жидкость – газ в условиях локального нагрева. Действие точечных тепловых источников, расположенных на подложке, индуцирует конвективное движение в слоях и деформацию термокапиллярной границы раздела Γ . Следует отметить, что в рамках полной постановки задача рассматривается впервые; все известные исследования подобного рода проводились в приближении тонкого слоя, которое не позволяет должным образом учесть влияние вертикальной компоненты скорости. Уравнения движения и теплообмена записывается в каждом слое в безразмерных переменных «функция тока – вихрь – температура» $\psi_i, \omega_i, \theta_i = (T_i - T_0) / \delta T$, где T_i – истинная температура i -ой жидкости, $T_0, \delta T$ – характерные значения температуры и перепада температуры в системе. Определяющие соотношения содержат безразмерные параметры Re_i, Gr_i, Pr_i – числа Рейнольдса, Грасгофа и Прандтля i -ой жидкости, соответственно. Жидкий слой ($i = 2$) характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma(T_2) = \sigma_0 [1 - \sigma_T (T_2 - T_0)]$ на межфазной границе.

На границе раздела Γ справедливы обычные условия равенства скоростей, температуры и тепловых потоков, динамическое и кинематическое условия. Для искомых функций на Γ они переписываются в виде следующих функциональных соотношений:

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - \kappa \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0,$$

$$\omega_2 - \rho \nu \omega_1 = F_1(t, x), \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \rho \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial n} = F_2(t, x),$$

где $\kappa = \kappa_1 / \kappa_2, \rho = \rho_1 / \rho_2, \nu = \nu_1 / \nu_2$ – отношения коэффициентов теплопроводностей, плотностей и вязкостей, соответственно, а функции F_1, F_2 – записаны в терминах касательной v_s и нормальной v_n компонент скоростей жидкостей, которые считаются равными для обеих сред на Γ . Функция F_1 учитывает влияние термокапиллярных сил на Γ , F_2 отражает вклад скачка давления и нестационарности. Кинематическое условие позволяет определить положение межфазной границы $f(t, x): f_t + \sqrt{1 + f_x^2} \partial \psi_2 / \partial s = 0$, где

s – единичный вектор касательной к Γ . На верхней и боковых границах системы температура задана, а условия для функции тока на твёрдых внешних стенках соответствуют условиям вязкого прилипания. Условия для температуры на нижней стенке ($y = 0$) учитывают наличие локальных источников тепла: $\theta_1|_{y=0, x \notin Q_j} = 0$, $\theta_1|_{y=0, x \in Q_j} = q_j(t)$. Здесь Q_j – область, занятая j -м нагревателем, q_j – температура j -го нагревателя. Важным моментом является то, что замыкающие соотношения (граничные условия) не только получены из законов сохранения, но и сами записаны в форме законов сохранения.

Для решения поставленной задачи была разработана и реализована программа на языке Фортран для расчёта всех искомых характеристик системы (возмущённые скорости и температуры сред, положение границы раздела), основанная на идее метода Овчаровой, использующего декомпозицию исходной задачи на два унитарных модуля с некоторым набором правил их сопряжения друг с другом. Для этого расчётные области G_i , занятые i -ой жидкостью, отображаются на прямоугольники, с помощью следующих преобразований:

$$G_1 \rightarrow \left\{ \xi = x, \eta = \frac{y - f(t, x)}{y_1 - f(t, x)} \right\}, \quad G_2 \rightarrow \left\{ \xi = x, \eta = \frac{y}{f(t, x)} \right\},$$

тогда все границы вычислительных областей, включая границу раздела, будут совпадать с координатными линиями новой сетки.

Каждый модуль в численном методе представляет собой однотипную модель, в которой расчёт характеристик производится независимо от второго модуля. Набором правил сопряжения этих модулей в одну систему являются граничные условия на Γ . Существенное преимущество подобного подхода состоит в том, что исходную физическую модель можно расширять, добавляя к ней новые данные о физических процессах, обеспеченных выполнением законов сохранения (например, влияние энергетических свойств границы раздела, процессов массопереноса на границе раздела, переменные коэффициенты переноса и т. п.). Кроме того, численный метод допускает обобщение на случай произвольного числа слоёв в системе, включая случай системы со свободными внешними границами. Характерной особенностью численного метода является решение задачи в переменных «функция тока – вихрь», при котором отправной точкой расчётов оказывается решение уравнения для определения касательной скорости, которое есть следствие динамического условия, а положение границы раздела находится исходя из кинематического условия. Определяющие уравнения для всех искомых функций решаются конечно-разностным методом стабилизирующей поправки

с использованием дробных шагов. Полная аппроксимация исходного уравнения проводится на первом дробном шаге, а второй дробный шаг является корректирующим и позволяет повысить устойчивость схемы.

Метод содержит следующие основные этапы: 1) новое положение границы раздела на следующем шаге по времени и нормальные скорости v_n точек на Γ (во всех узлах сетки) определяются, используя кинематическое условие; 2) производится расчёт коэффициентов, необходимых для решения уравнений движения и переноса тепла в каждом слое с помощью итерационной процедуры; 3) рассчитываются граничные условия для решения уравнений движения (определяются функция F_1 , значения касательных скоростей v_s точек, лежащих на границе раздела, функция F_2); 4) из решения определяющих уравнений с коэффициентами, рассчитанными на шаге (2), находятся значения всех искомых функций на новом временном слое.

При численной реализации метода для определения значения завихренностей ω_i на твёрдых стенках использовались условия Тома. Визуализация результатов проводится с помощью инструментальных средств пакета прикладных программ MathLab. Программный комплекс позволяет визуализировать картину течений в системе (рис. 1) в каждый момент времени, а также поле температуры и положение границы раздела (рис. 2).

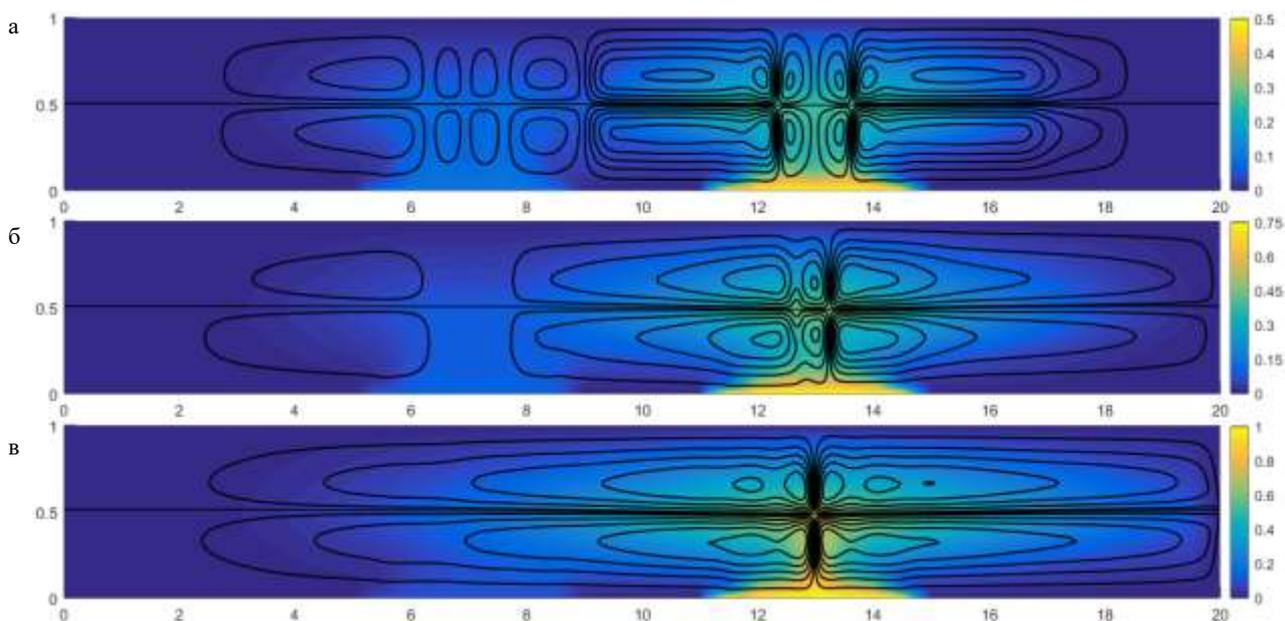


Рисунок 1 – Перестройка структуры течения в системе этанол – азот с комбинированным нагревом двумя нагревателями в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2$. Линии тока и поле температуры в моменты времени $t = 47$ (а), $t = 64$ (б), $t = 88$ (в)

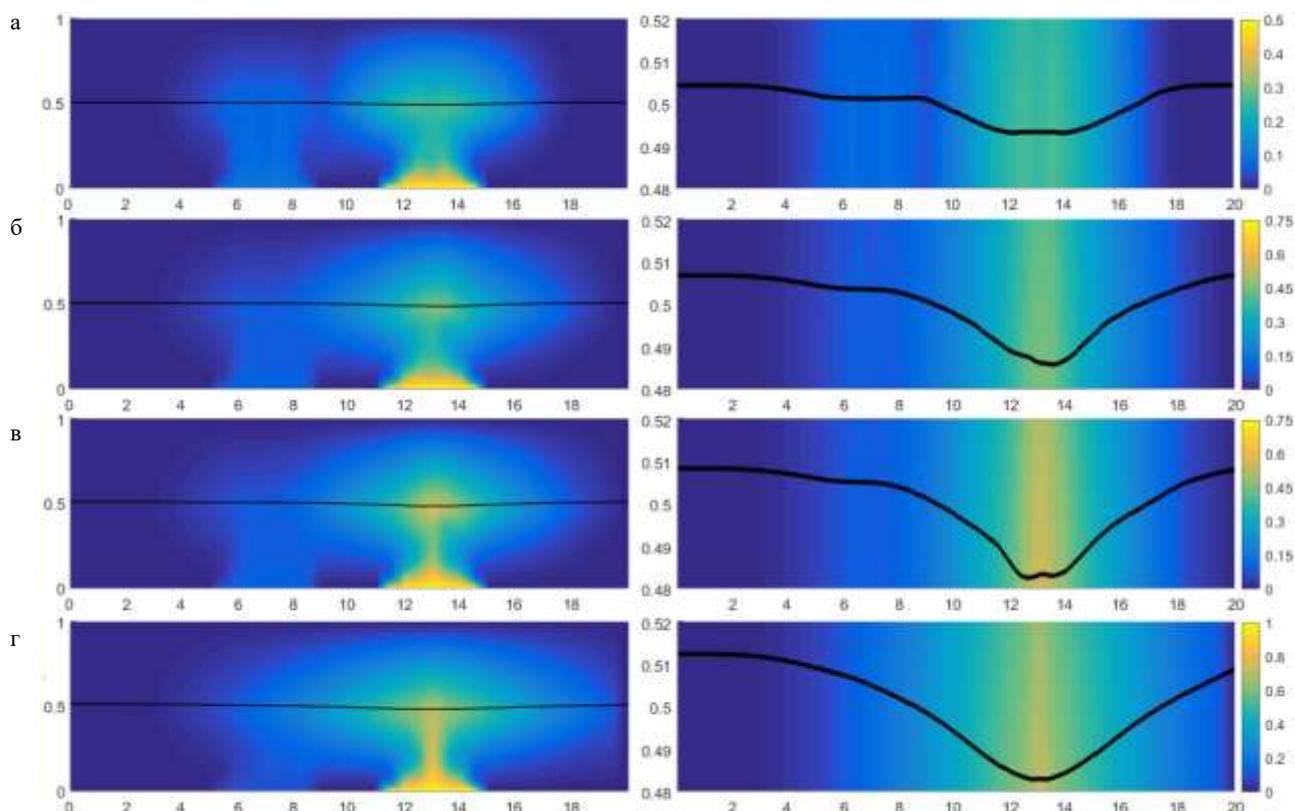


Рисунок 2 – Эволюция теплового поля (слева) и формы границы раздела (справа) в системе этанол – азот с комбинированным нагревом двумя нагревателями в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2$ в моменты времени $t = 47$ (а), $t = 64$ (б), $t = 67$ (в), $t = 88$ (г)

С помощью разработанной программы исследована устойчивость двухслойной системы этанол – азот, ограниченной твёрдыми стенками, на которых поддерживается постоянная температура. На нижней границе системы симметрично размещены два нагревателя A и B , которые могут работать в различных режимах. Рассмотрен случай комбинированного нагрева, когда в начальный момент времени оба нагревателя включаются с одинаковой температурой $q_A(0) = q_B(0) = 0.1$, затем температура одного теплового источника (A) остаётся неизменной, а второго (B) скачкообразно увеличивается через равные промежутки времени: $q_B(20) = 0.25$, $q_B(40) = 0.5$, $q_B(60) = 0.75$, $q_B(80) = 1$. Рассчитаны основные характеристики течений, возникающих при потере устойчивости в системе в условиях пониженной гравитации ($g = g_0 \cdot 10^{-1}$, $g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2$).

При каждом увеличении температуры нагревателя существует некоторое время задержки, с которым система отвечает на изменение тепловой нагрузки. Наблюдается явление гистерезиса, которое характеризуется возникновением колебаний границы раздела жидкостей с изменением амплитуды её деформаций не только над нагревателем,

но и по всей длине рабочего участка (рис. 2а) и, как следствие, осциллирующих режимов. В таких режимах вблизи горячего пятна в каждом слое формируются малые вихри, которые отщепляются и дрейфуют к боковым стенкам (рис. 1). Присутствие слабого нагревателя A нарушает симметрию течений, приводит к деформации вихревых структур и формированию краткосрочных несимметричных менисков над более мощным нагревателем с некоторой временной задержкой после каждого скачкообразного изменения температуры q_B (рис. 2б, 2в). С течением времени вихревые структуры, возникающие в зоне действия слабого нагревателя A , поглощаются течением, индуцированным вторым тепловым источником B (рис. 1в). При этом термокапиллярная деформация границы раздела над нагревателем A полностью подавляется (рис. 2г).

Образование колебательных режимов и осцилляций межфазной границы является характерной особенностью системы с комбинированным нагревом. Колебательные явления возникают лишь в таких режимах работы тепловых источников, при которых имеет место рост температуры q_B со временем. Если температура теплового источника B далее не увеличивается, то имеет место стабилизация вторичного режима с устойчивым термокапиллярным прогибом границы раздела в зоне действия более мощного нагревателя.

Таким образом, за счёт соответствующего размещения нагревателей и контроля интенсивности тепловой нагрузки, можно обеспечить подавление термокапиллярных деформаций поверхности раздела между жидкостями для предотвращения появления сухих пятен.

Экспериментально и численно исследовано двухфазное течение в жидком мосте, которое развивается в результате действия сил плавучести и термокапиллярной конвекцией в присутствии потока газа, параллельного границе раздела сред. Воздействие газа в этой системе осуществляется через сдвиговые напряжения приповерхностного слоя, а также через теплообмен между жидкостью и газом. Рассмотренная система экспериментальных сред (а именно n -декан-азот) и диапазон параметров задачи соответствуют сценарию, когда влияние потока газа воздействует на жидкость главным образом через теплообмен (рис. 3). В этих условиях изучено влияние температуры газа на динамику системы для сверхкритической разницы температур между холодным и горячим стержнями жидкого моста. В зависимости от параметров обнаружены различные колебательные режимы: периодичный, квазипериодичный с тремя частотами, а также случаи, когда изначальные колебания затухают и система переходит к стационарному

течению в жидком мосте, что делает возможным управлять динамикой системы посредством изменения скорости и температуры газового потока (рис. 4).

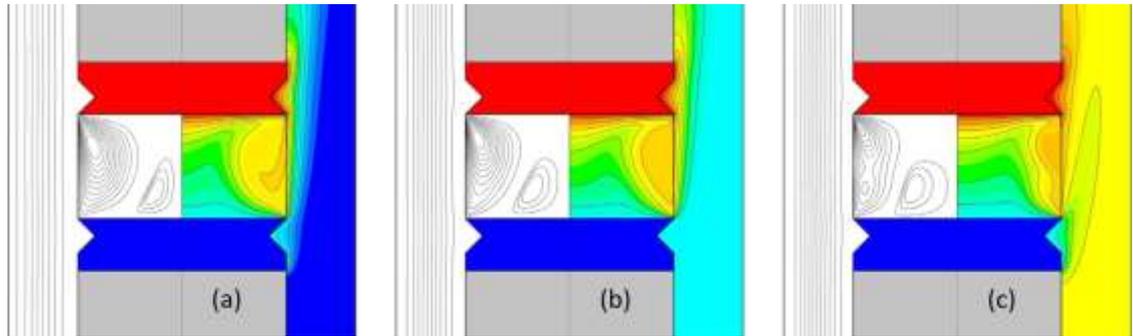


Рисунок 3 – Влияние температуры вдуваемого газа на функцию тока и распределение температуры в двух фазах при $\Delta T = 9.8^\circ\text{C}$, $U_g = 0.5 \text{ м/с}$ и $v = 1$, (a) $T_g = 16^\circ\text{C}$; (b) $T_g = 20^\circ\text{C}$; (c) $T_g = 25^\circ\text{C}$

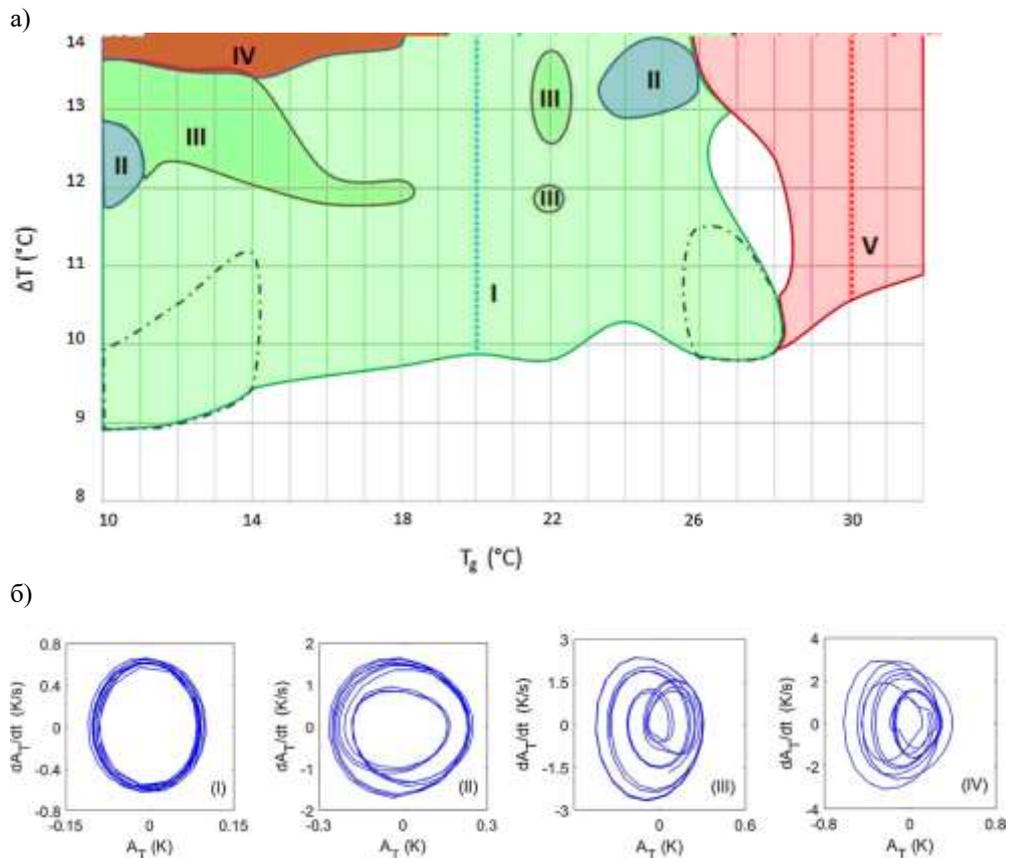


Рисунок 4 – а) Глобальный вид колебательных состояний, разделенных на 5 режимов в зависимости от температуры газа (T_g) и приложенной разности температур (ΔT). Наблюдаемые режимы: (I) периодический; (II) квазипериодический с двумя частотами; (III) квазипериодический с тремя частотами; (IV) зашумленный квазипериодический с тремя частотами; (V) периодический. Вертикальные линии показывают температуры холодного и горячего дисков при пороге неустойчивости. б) Фазовые портреты, соответствующие четырём колебательным режимам при $T_g = 10^\circ\text{C}$ и $\Delta T = 11.2^\circ\text{C}$, 12.2°C , 13.5°C и 14.4°C

Изучена связь между неустойчивостью в системе двух смешивающихся жидкостей и жидкой смесью с линейным распределением плотности. В обоих случаях жидкости изначально располагались в замкнутой ячейке и были подвержены воздействию горизонтальных вибраций с различными амплитудами и частотами в условиях микрогравитации. Исследования включали в себя эксперименты в параболических полётах и численное моделирование. Была проанализирована трансформация структур переходной зоны между жидкостями в условиях, когда начальная толщина интерфейса составляла 4 %, и влияние её расширения до пределов, когда толщина зоны становилась равной высоте ячейки. Обнаружено, что для тонких переходных зон характерно формирование структур, когда каждый из компонентов смеси формирует прямоугольные колонны разной толщины (рис. 5). Увеличение начальной толщины переходной зоны приводит к уменьшению числа формируемых колонн.

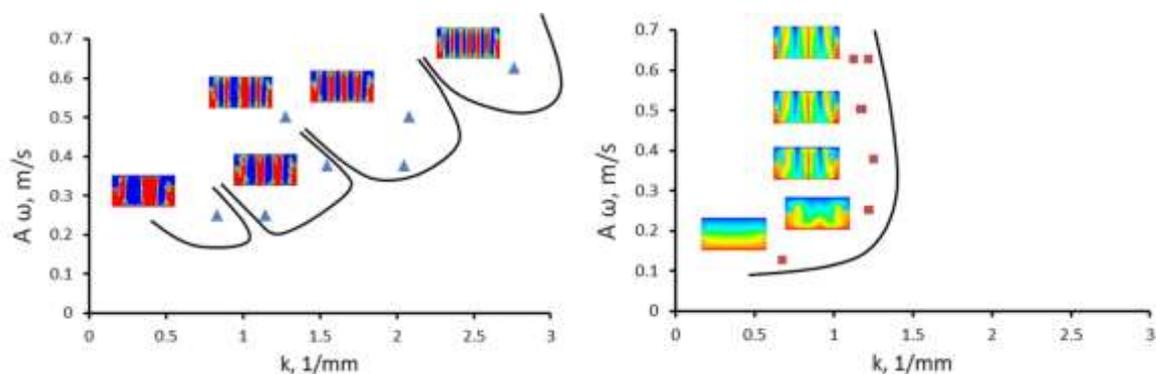


Рисунок 5 – Результат воздействия горизонтальных вибраций на плоский интерфейс для различных значений начальной толщины интерфейса в координатах модифицированного волнового числа k и вибрационной скорости $V_{os} = A\omega$. Символы обозначают точки, в которых наблюдались различные структуры, а кривые отображают границы смены режимов структур. Слева представлены результаты для тонкого интерфейса с толщиной $\delta = 0.3$ мм для момента времени $t = 5$ с, справа – для широкого интерфейса при $\delta = 7.5$ мм, где $t = 10$ с. Вставленные структуры распределения концентрации имеют одинаковую цветовую шкалу, где концентрация меняется от 0 до 1

Для количественной оценки наблюдаемых структур предложено использовать осреднённый массовый поток через срединное горизонтальное сечение ячейки (рис. 6). На рисунке также представлены мелкие соответствующие структуры распределения концентрации.

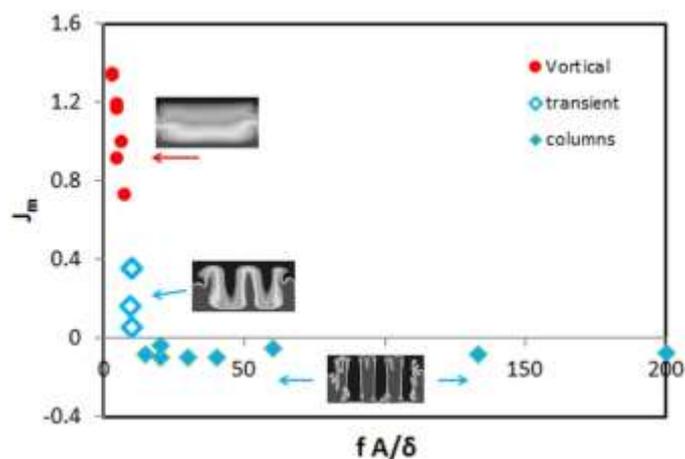


Рисунок 6 – Различные режимы формирования структур распределения концентрации, представленные как зависимость осредненного массового потока J_m через середину ячейки от параметра $R = fA/\delta$. В этих режимах могут различаться: (I) колоннообразующие режимы $J_m < 0$ и $R \geq 15$; (II) переходные режимы $0 < J_m < 0.35$ и $R \approx 10$; режимы вихревого осредненного течения $J_m > 0.7$ и $R \leq 8$

Рассмотрена задача о малых осесимметрических монотонных возмущениях равновесного состояния двух покоящихся несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрическом контейнере при наличии плоской границы раздела, которое обладает поверхностным натяжением, линейно зависящим от температуры. При этом предполагается, что в конвективном состоянии поверхность раздела образует с боковой поверхностью цилиндрического контейнера угол контакта, равный $\pi/2$, и является недеформируемой. Также учитывается энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности раздела. Для решения возникающей спектральной задачи был применён модифицированный метод Галёркина. В результате для конкретных жидкостей были построены нейтральные кривые зависимости числа Марангони Mn от отношения температур, задаваемых на основаниях цилиндра (рис. 7, кривая 1), и от размеров контейнера (рис. 7, кривая 2). Таким образом, зная размеры контейнера и физические параметры жидкости, можно вычислить критическую разность температур, задаваемых на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, при которой внутри сосуда возникает движение.

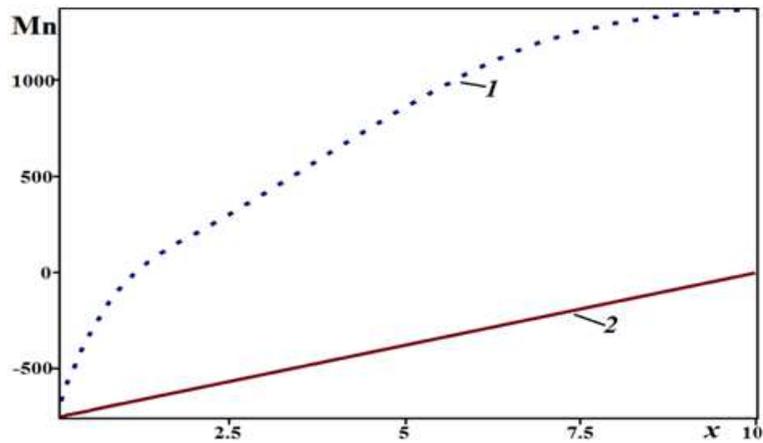


Рисунок 7 –Зависимости нейтрального числа Марангони от температур $x = \theta_0/\theta_1$ (кривая 1), высоты и радиуса цилиндра $x = h/r_0$ (кривая 2)

Были построены графики поля скоростей при различных значениях параметра E , характеризующего значимость процесса освобождения или поглощения теплоты при локальных приращениях площади межфазной поверхности для развития конвективного движения вблизи поверхности раздела, при анализе которых установлено, что при увеличении E область возмущений, возникающих на поверхности раздела, также увеличивается.

Исследована задача о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в канале с плоской поверхностью раздела. Математическая формулировка задачи включает уравнения Навье – Стокса, неразрывности, теплопроводности и массопереноса, записанные для каждого из слоёв жидкости. На твёрдых стенках задаётся условие прилипания, отсутствие потока вещества и параболический закон распределения температуры. На поверхности раздела выполнены кинематическое, динамическое условия, условия равенства скоростей, температур, потоков тепла, отсутствие потока вещества через поверхность раздела.

Решение уравнений термодиффузионной конвекции описывается в специальном виде, когда одна из компонент скорости линейно зависит от продольной координаты, поля температур и концентрации имеют квадратичную зависимость от горизонтальной координаты. Такое поле скоростей соответствует хорошо известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости. Для медленных движений рассматриваемая задача сводится к обратной сопряжённой задаче для параболических уравнений со сложными условиями на границе сопряжения. Построено точное стационарное решение задачи в предположении, что движение в системе жидкостей возникает под действием термоконцентрационных и гравитационных сил при малых числах Марангони. Для

возникающей обратной задачи получены априорные оценки решения в равномерной метрике и установлены условия на входные данные, при которых решение с ростом времени стремится к стационарному. Этот результат можно трактовать как устойчивость совместного стационарного двухслойного течения бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в плоском канале.

Для иллюстрации физических эффектов была использована модельная система с параметрами: $Pr_1 = 29$, $Pr_2 = 1.52$, $l_1 = 0.001$, $l_2 = 0.002$, $\rho = \rho_1/\rho_2 = 0.945$, $\nu = \nu_1/\nu_2 = 7.1$, $k = k_1/k_2 = 0.42$.

На нижней твёрдой стенке градиент температуры $A_{10} = 0$; на верхней – $A_{20} = -3 + \exp(-0,05\tau) \sin \tau$, τ – безразмерное время. В этом случае согласно априорным оценкам выполняются условия стабилизации движения. На рис. 8а представлен профиль безразмерной составляющей $U(\eta)$, $0 \leq \eta \leq 2$, продольной скорости для системы, находящийся в условиях невесомости. Наличие термоконцентрационных сил на поверхности раздела вызывает возвратное течение около неё. Поперечная слою компонента скорости $V(\eta)$ в различные моменты времени представлена на рис. 8б.

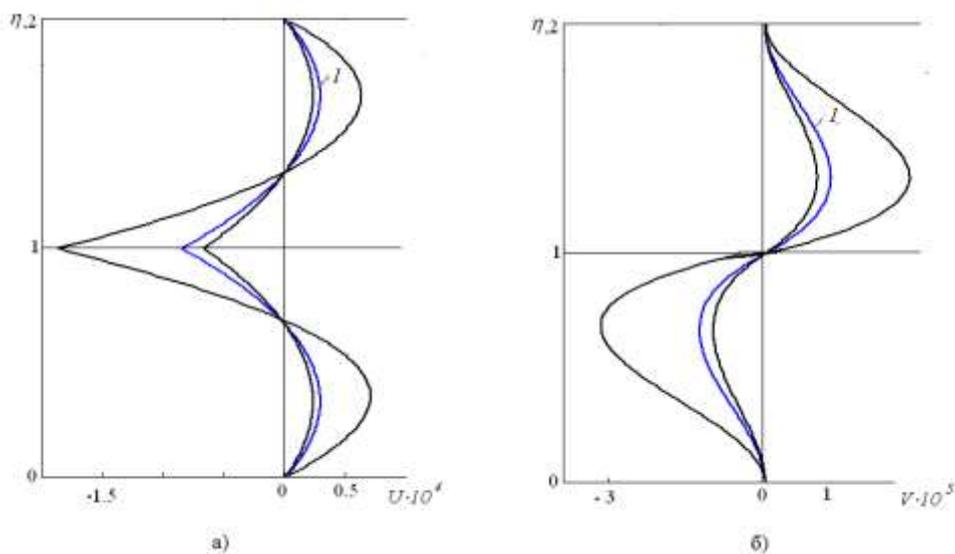


Рисунок 8 – Профиль функции $U(\eta)$ продольной скорости (а) и поперечной скорости $V(\eta)$ (б) в различные моменты времени. Кривая 1 – стационарное распределение

Таким образом, выбирая температурное распределение на неподвижных твёрдых стенках, можно управлять движением жидкостей внутри слоя.

Исследована начально-краевая задача, описывающая однонаправленное движение

жидкости в модели Обербека – Буссинеска в плоском канале с твёрдыми неподвижными стенками, на которых задано распределение температур (или верхняя стенка теплоизолирована). Найдено точное стационарное решение. Решение нестационарной задачи для скорости получено в виде квадратур в изображениях по Лапласу, а для температуры – в виде быстро сходящихся рядов по специальному базису. Установлены априорные оценки решения в равномерной метрике для любого конечного момента времени и доказано, что с ростом времени нестационарное движение стремится к данному стационарному состоянию, если на твёрдой стенке температура стабилизируется со временем. Приведены примеры численного решения для конкретной жидкой среды, подтверждающие теоретические расчёты.

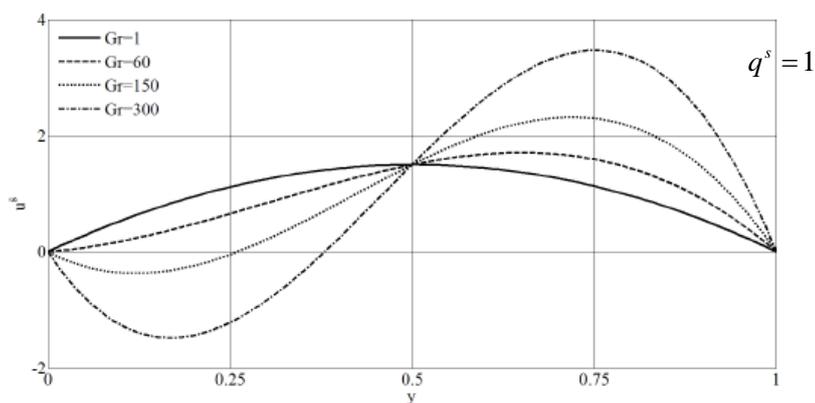


Рисунок 9 – Стационарный профиль безразмерной скорости при различных числах Грасгофа

На рис. 9 изображен стационарный профиль безразмерной скорости при различных числах Грасгофа. Число Грасгофа отвечает за влияние термогравитационных сил, а безразмерный расход q^s – за влияние сил инерции. Если $q^s \gg Gr$, то преобладают силы инерции в слое и профиль скорости является параболическим типа Пуазейля. Когда $q^s \ll Gr$, главными становятся термогравитационные силы и возникает зона возвратного течения. На рис. 10 показан профиль безразмерной скорости $u(y,t)$ для конкретной жидкости – силикона, когда $q(t) = q^s = 0$, продольный градиент температуры на нижней стенке $A_1(t) = 1 - 5e^{-0.01t} \sin(0.1t)$, верхняя стенка теплоизолирована.

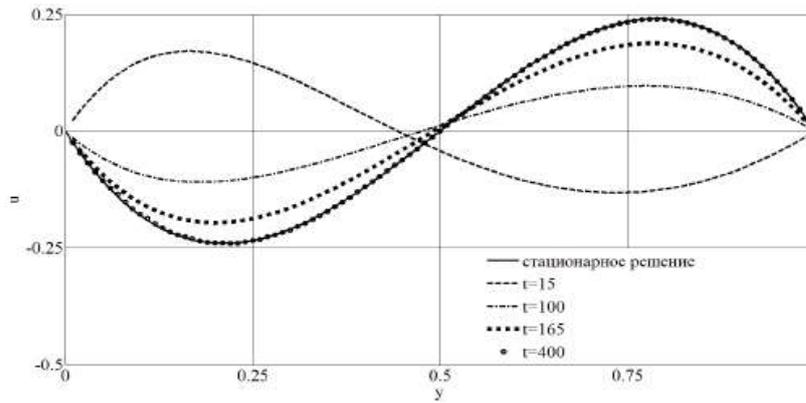


Рисунок 10 – Профиль безразмерной скорости $A_1(t) = 1 - 5e^{-0.01t} \sin(0.1t)$

Исследовано нестационарное движение сферического слоя идеальной жидкости, когда внутри газовой полости давление распределено по адиабатическому закону, а вне слоя внешнее давление постоянно. Эволюция движения описывается сильно нелинейным ОДУ второго порядка, решение которого зависит от пяти безразмерных параметров. Доказано, что при определённых условиях на эти параметры уравнение имеет периодическое решение, описывающее нелинейные колебания слоя, и найден их период. Исследованы предельные случаи колебаний сферического пузыря и «мыльного» пузыря (плёнки), стационарное состояние слоя.

Дан вывод уравнений малых возмущений нестационарных движений слоя с учётом капиллярных сил на его поверхностях. После специального разделения угловых переменных по сферическим функциям получена система амплитудных уравнений. Для потенциальных возмущений её удаётся проинтегрировать по радиальной переменной и свести к задаче Коши для системы ОДУ 6-го порядка. Её численное исследование показывает, что при нулевой сферической гармонике имеются периодические возмущения внутренней и внешней границ слоя. С ростом номера гармоник и начальной толщины слоя амплитуда возмущений увеличивается. Численно построены области устойчивости на плоскости «безразмерное внутреннее и внешнее давления». Доказано, что равновесное состояние сферического слоя (оно возможно только при наличии внутреннего давления) является устойчивым.

2 Теоретико-групповой анализ уравнений новых моделей гидродинамики с усложнёнными свойствами

План 2018: *получение достаточных условий пассивности гладких уравнений с частными производными.*

Изучена задача о течении в дальнем закрученном безимпульсном турбулентном следе за телом. Важными интегральными характеристиками закрученных турбулентных следов являются продольная компонента избыточного импульса J и момент количества движения M . Для описания течения в дальнем безимпульсном закрученном турбулентном следе с ненулевым моментом импульса привлекается следующая полуэмпирическая модель турбулентности, предложенная в статье Деменков А.Г., Черных Г.Г. (2017):

$$\begin{aligned}
 U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_u r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{W^2}{r'} dr', \\
 U_0 \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} C_w r^3 \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial (W/r)}{\partial r}, \\
 U_0 \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_e r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial r} + C_u r^2 \frac{e^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon, \\
 U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_\varepsilon r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} C_u r^2 e \left(\frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e},
 \end{aligned}$$

где $U_1 = U - U_0$ – осреднённый дефект продольной компоненты скорости U , W – тангенциальная осреднённая компонента скорости, e – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации энергии турбулентности. Жидкость предполагается несжимаемой, а течение установившимся. Кроме того, без потери общности можно считать скорость набегающего на тело невозмущённого потока U_0 равной единице. Эмпирические постоянные модели: $C_u = C_w = 0.25$, $C_e = 0.147$, $C_\varepsilon = 0.113$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$.

Выполнен теоретико-групповой анализ исследуемой модели. Получена автомодельная редукция к системе ОДУ. Установленные законы вырождения течения согласуются с известными результатами моделирования. Краевая задача для системы ОДУ решалась численно методом стрельбы. Процедуру решения осложняло то обстоятельство, что коэффициенты системы имеют особенности. Использовалось асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. На рисунке 11 представлены результаты сопоставления расчётов для плоского турбулентного следа,

полученных методом стрельбы, с расчётами по полной модели, представленными в статье Деменкова А. Г., Черных Г. Г. (2017).

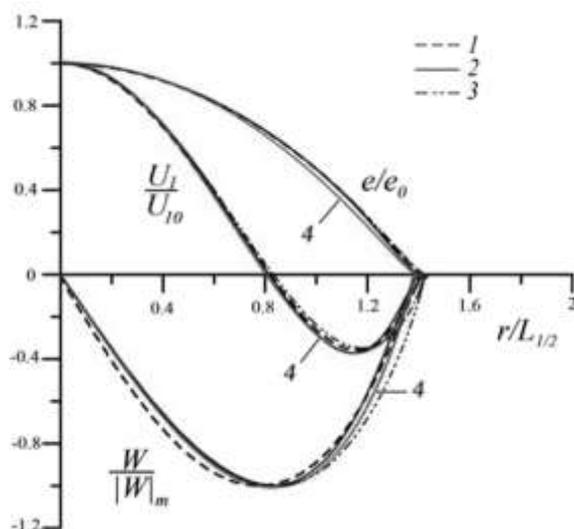


Рисунок 11 – Автомодельные нормированные профили дефекта продольной компоненты скорости, тангенциальной компоненты скорости и энергии турбулентности (1, 2, 3 – расчёты по иерархии моделей, 4 – расчёты, полученные методом стрельбы)

Предложен новый алгебраический подход к изучению совместности уравнений с частными производными. В основе подхода лежат методы коммутативной и дифференциальной алгебры, алгебраической геометрии и базисов Грёбнера. Основным является понятие пассивной системы уравнений, которое формулируется в терминах дифференциальных идеалов. Получен достаточный критерий пассивности системы уравнений с частными производными. Доказано, что при выполнении этих достаточных условий система задает гладкое бесконечномерное многообразие в пространстве джетов. Приведены примеры редукции систем к пассивной форме.

2.3. Предложен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Метод основан на поиске так называемых промежуточных систем, каждое решение которых удовлетворяет исходному уравнению. Основное внимание уделяется нелинейному волновому уравнению второго порядка, а также нелинейному диффузионному уравнению. Приведены примеры промежуточных систем и соответствующих решений.

Один из первых методов интегрирования нелинейных уравнений с частными производными, восходящий к Монжу и Амперу, в простейшем варианте можно сформулировать следующим образом. Пусть задано уравнение второго порядка

$$\Phi(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) = 0. \quad (1)$$

Требуется найти уравнение первого порядка

$$V(t, x, u, u_t, u_x) + c = 0, \quad (2)$$

зависящее от произвольной константы $c \in R$, такое, что любое его неособое решение удовлетворяет (1). Уравнение (2) называют первым, или промежуточным, интегралом уравнения второго порядка (1). Предложен подход к интегрированию уравнений типа (1), основанный на нахождении таких систем

$$u_t = G(x, u, u_1, \dots, u_m), \quad u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \quad (3)$$

$$H(x, u, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (4)$$

что каждое решение этой системы удовлетворяет одновременно уравнению (1). При этом требуется, чтобы многообразие (4) было инвариантно относительно уравнения (3). В этом случае найденная система называется промежуточной.

Построены промежуточные системы для уравнений типа

$$u_{tx} = f(u), \quad (5)$$

используя их высшие симметрии. Показано, что если уравнение (5) допускает оператор высшей симметрии

$$\eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{n=1}^{\infty} D_x^n(\eta) \frac{\partial}{\partial u_n},$$

где D_x — оператор полного дифференцирования по x , то система

$$u_t + \eta = 0, \quad D_x(\eta) + f = 0 \quad (6)$$

является промежуточной для уравнения (5). Для решения системы (6) можно использовать численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа Рунге – Кутты. Найдены промежуточные системы для уравнения (5) без использования симметрий. Оказывается, что уравнение $u_t = e^u(u_2 - u_1^2)$ имеет общее решение с уравнением sh-Гордон, а эволюционное уравнение третьего порядка $u_t = e^u(u_3 - 2u_1u_2)$ – с уравнением Цицейки.

Получены инвариантные многообразия для диффузионных уравнений

$$u_i = (u^k u_x)_x. \quad (7)$$

Для специальных показателей k найдены дифференциальные связи, зависящие от третьих, четвёртых и пятых производных по x . Приведены примеры точных решений уравнения (7), полученные интегрированием дифференциальных связей.

Получено точное решение для уравнений модели ползущего течения с полем скоростей типа Хименца, описывающее термокапиллярную конвекцию в слоях. Оно интерпретируется как движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдыми стенками и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют. С математической точки зрения, возникающая начально-краевая задача является обратной и нелинейной, так как учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. Установлено, что может существовать два таких решения. Показано, что при увеличении параметра внутренней энергии поверхности раздела значения функций скоростей уменьшаются.

Изучена задача о двумерном стационарном течении жидкости в плоском канале со свободной границей, вдоль которой поверхностное натяжение линейно зависит от температуры, а на дне поддерживается её заданное распределение. Температура в жидкости распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Течение возникает под действием термокапиллярных сил, приложенных вдоль свободной границы, которые вызывают конвекцию Марангони, причём коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры. Такая конвекция может преобладать в условиях микрогравитации или при движении тонких плёнок жидкостей. Возникающая краевая задача является сильно нелинейной и обратной относительно градиента F давления вдоль канала. Установлена неединственность решения этой задачи: для числа Био (безразмерного коэффициента теплоотдачи) $Bi \neq 0$ найдено три различных решения, а для $Bi = 0$ – одно. Численно показано, что найденные решения с уменьшением числа Марангони стремятся к единственному нетривиальному решению линейной задачи, описывающей ползущее движение жидкости в открытом канале. Для каждого из решений построены характерные структуры течения.

В случае теплоизолированной свободной границы ($Bi = 0$) получено одно значение безразмерной постоянной F . Это решение с уменьшением числа Марангони стремится к единственному решению линейной задачи, описывающей ползущее течение. На рис. 12 изображены профиль функции $A(\xi)$ (продольный градиент температуры) и линии тока в

слое. Поскольку $A(1) < 0$, то жидкость вблизи свободной границы течёт в направлении оси x . Видно, что наиболее интенсивное течение формируется вблизи $\xi = 1$, т. е. свободной границы. Стоит также сказать о влиянии безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений: с ростом числа Марангони M скорость движения увеличивается, а с ростом числа Прандтля Pr – уменьшается.

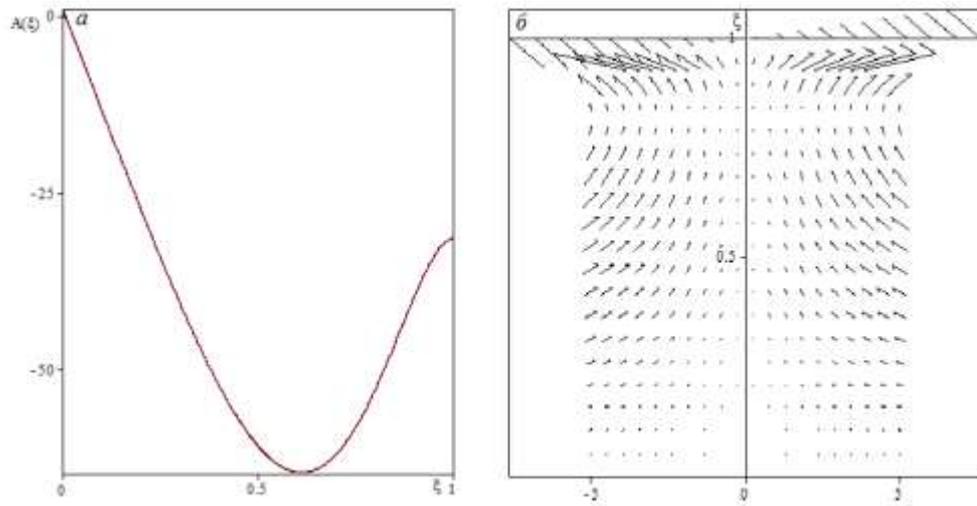


Рисунок 12 – Профиль безразмерного градиента температуры $A(\xi)$ и линии тока в слое при $F = 3.97$, $M = -10$

Решена задача групповой классификации трёхмерных уравнений термодиффузии в случае, когда коэффициент температуропроводности χ зависит от температуры по степенному закону. Необходимо отметить, что число пространственных переменных влияет на показатель степени. Так, в случае одномерного уравнения теплопроводности (Овсянников, 1959) этот показатель есть $-4/3$; для двумерного уравнения теплопереноса он равен -1 (Дородницын, 1983); в случае трёх пространственных переменных – $-4/5$. Уравнения термодиффузии описывают совместный перенос тепла и концентрации с учётом эффекта Соре. Для этой системы из двух несимметричных уравнений решена задача групповой классификации относительно коэффициентов диффузии D и термодиффузии D^θ , зависящих от температуры T и концентрации C . Показано, что основная алгебра операторов, допускаемая исследуемой системой при произвольных значениях обоих классифицируемых параметров, в случае $\chi = \chi_0 T^{-4/5}$ совпадает с основной алгеброй при произвольной функции $\chi(T, C)$: она состоит из четырёх операторов переноса по независимым переменным, трёх операторов вращения и одного оператора растяжения независимых переменных. Анализ исходной системы интересен тем, что при указанной степенной зависимости коэффициента температуропроводности

получается нелинейная зависимость коэффициентов инфинитезимального оператора от пространственных переменных. Вследствие несимметричности уравнений термодиффузии по искомым переменным T и C задача групповой классификации сводится к рассмотрению двух случаев: 1) функции D и D^θ имеют одинаковый характер зависимости от параметров состояния; 2) коэффициент диффузии имеет тот же вид, что и коэффициент температуропроводности $D = D_0 T^{-4/5}$, а коэффициент термодиффузии имеет общий вид $D^\theta = D^\theta(T, C)$. В результате анализа переопределённых систем определяющих дифференциальных уравнений получилось шесть пар различных представлений для классифицируемых функций, две из которых содержат произвольные функции сложного аргумента (T/C и $(C - qT)T^{-6/5}$), а оставшиеся четыре – не содержат производных функций. Каждой паре коэффициентов соответствует алгебра операторов, представляющая расширение основной алгебры. Для получившихся коэффициентов переноса $\chi = \chi_0 T^{-4/5}$, $D = 5\chi_0 T^{-4/5}$, $D^\theta = -4\chi_0 C T^{-9/5}$ построено пять редукций исходной системы к обыкновенным дифференциальным уравнениям, некоторые из них проинтегрированы в явном виде.

Проведён анализ совместности уравнений нестационарного однонаправленного движения бинарной смеси в модели Обербека – Буссинеска. Показано, что система совместна в случае, когда начальная температура удовлетворяет уравнению Пуассона с линейной правой частью относительно горизонтальной координаты. Доказано, что в этом случае возможно представление функции температуры в виде линейной, квадратичной и кубической зависимости от горизонтальной координаты. Физический смысл имеет только нестационарное решение с линейной зависимостью температуры; в случае стационарного решения возможна также квадратичная зависимость.

В случае линейного распределения температуры, а значит, и концентрации (это следует из анализа совместности исходных уравнений) от горизонтальной координаты получено решение прямой (градиент давления задан) и обратной (градиент давления требуется определить вместе с остальными неизвестными функциями) стационарной задачи, являющееся обобщением давно известного решения для однородной жидкости (Остроумов, 1952, Бирих, 1966). Практический же интерес представляет решение обратной задачи, когда по известному расходу жидкости следует найти градиент давления. Нестационарная прямая и обратная задачи решены для функций скорости и градиентов температуры и концентрации в горизонтальном направлении посредством численного обращения образов по Лапласу соответствующих функций. Доказаны теоремы

о сходимости решения нестационарной задачи к решению стационарной, построены априорные оценки скорости сходимости. На рисунке 13 представлены зависимости безразмерной функции скорости для смеси вода – изопропанол в разные моменты времени и их сходимость к решению стационарной задачи при увеличении времени в двух ситуациях: слева – в отсутствие нагрева твёрдых стенок при ненулевом расходе (пуазейлевский профиль), справа – при нагреве обеих стенок и условии замкнутости потока, которое с необходимостью влечет изменение направления движения и смену знака скорости.

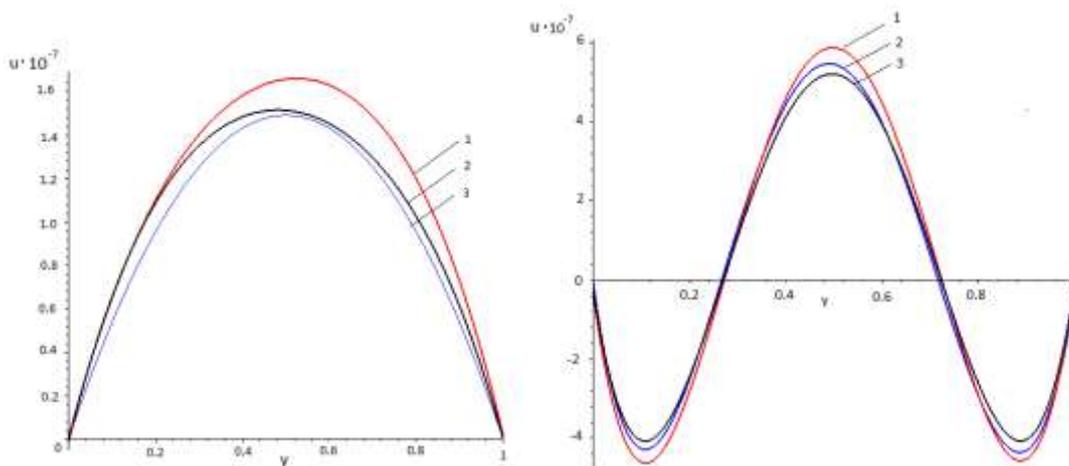


Рисунок 13 – Профили скорости для бинарной смеси вода – изопропанол (30 %/70 %): 1, 2 – решения нестационарной задачи в разные моменты времени, с увеличением которого кривые приближаются к решению стационарной задачи 3

Исследованы функции мощности слоев для полных слойно конечных групп и некоторых конечных расширений этих групп, продемонстрированы их графические представления. Нижним слоем группы называется множество её элементов простых порядков. Установлены условия, при которых группа распознается по нижнему слою. Получена характеристика групп Шункова: Пусть G – периодическая группа Шункова, централизаторы каждой инволюции которой черниковские. Если нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G почти слойно конечен, то G – почти слойно конечная группа.

3. Применение математических моделей при изучении природных гидрофизических процессов

План 2018 года: *оценка потоков метана в атмосферу при изменении климата в зоне вечной мерзлоты. Оценка влияния различных гидрофизических режимов в солёном стратифицированном озере на экологические процессы на основе трёхмерного численного моделирования.*

Для исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты в болотно-озёрных ландшафтах построена одномерная малоразмерная численная модель (Belolipetskii V.M., Genova S.N., 2016). Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мёрзлых и талых слоёв. Рассматриваются территории, на которых имеются озёра или болота. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются следующие слои: талый грунт, мёрзлый грунт, вода, лёд, снег. Возможны различные варианты расположения этих слоёв (таблица 1).

Таблица 1. Варианты расположения мерзлых и талых слоев в болотно-озёрных ландшафтах

№ варианта	Вода	Лёд (снег)	Вода	Талый грунт	Мёрзлый грунт	Талый грунт	Мёрзлый грунт	Талый грунт
1	+					+	+	+
2		+	+			+	+	+
3		+			+	+	+	+
4		+					+	+
5	+	+					+	+
6	+	+			+	+	+	+
7	+			+	+	+	+	+
8	+	+	+			+	+	+

При переходе с одного варианта на другой слои добавляются или исключаются. Предложен упрощённый численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоёв, позволяющий описать годовую динамику замерзания/оттаивания вечной мерзлоты в болотно-озёрных

ландшафтах и оценить влияние изменения климата. На рис. 14 показаны варианты для весеннего и летнего периодов.

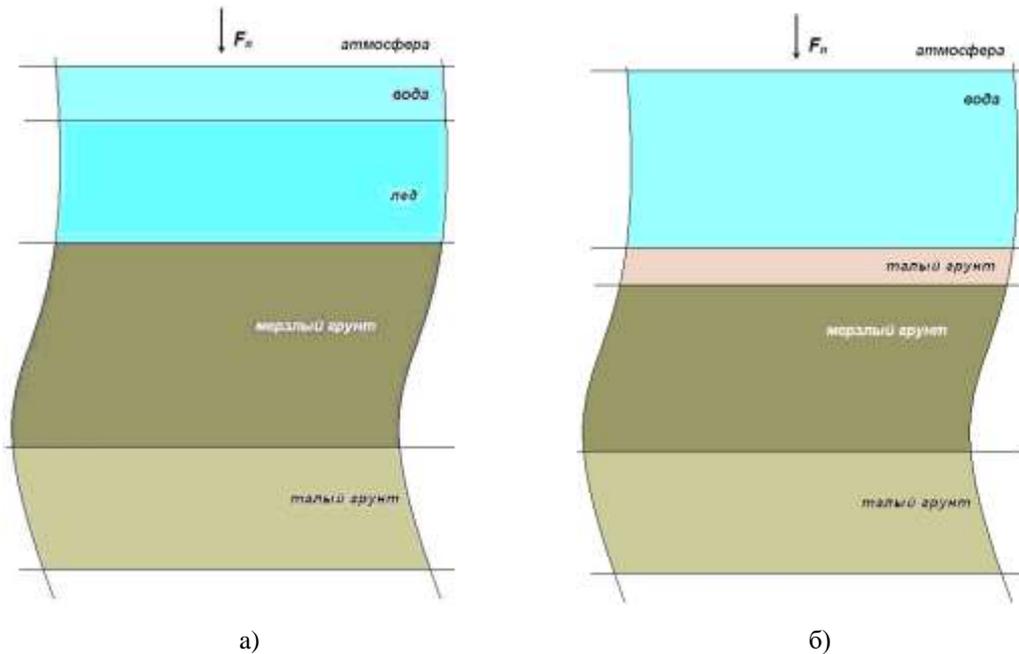


Рисунок 14 – Вариант 5 (а), вариант 1 (б)

После вычисления толщин мёрзлых и талых слоёв, распределений температуры в слоях оцениваются вертикальные распределения биохимических компонентов. Математическая модель динамики концентраций биохимических компонентов основана на уравнении диффузии:

$$\frac{\partial S_{m,i}}{\partial t} = K_{m,i} \frac{\partial^2 S_{m,i}}{\partial z^2} + f_{m,i}(t, z, S_{m,j}, T, \dots), \quad m=1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

здесь t – время, z – вертикальная координата (направлена вниз), $S_{m,i}$ – концентрация соответствующей компоненты в i -ом слое, $K_{m,i}$ – коэффициенты диффузии, функции $f_{m,i}(t, z, S_{m,j}, T, \dots)$ описывают процессы биохимической трансформации субстанций S_m .

Рассмотрим произвольный i -й слой: $h_{i-1} \leq z_i \leq h_i$, $\delta_i = h_i - h_{i-1}$, где δ_i – толщина слоя. Введём новые независимые переменные (t, ξ_i) : $\hat{t} = t$, $\xi_i = (z_i - h_{i-1}) / \delta_i$, $0 \leq \xi_i \leq 1$.

Поскольку

$$w_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{1}{\delta_i} \left[(\xi_i - 1) \frac{dh_{i-1}}{dt} - \xi_i \frac{dh_i}{dt} \right],$$

то уравнение (8) запишется в виде

$$\frac{\partial S_{m,i}}{\partial t} + w_i \frac{\partial S_{m,i}}{\partial \xi_i} = \frac{K_{m,i}}{\delta_i^2} \frac{\partial^2 S_{m,i}}{\partial \xi_i^2} + f_i^n(t, \xi_j, S_j^n, T^n, \dots) \quad (9)$$

Предполагается, что в мёрзлой фазе (мёрзлый грунт, лёд) отсутствует диффузия примесей и прекращается трансформация субстанций (т. е. при замерзании воды или талого грунта биохимические компоненты депонируются), $K_{m,i} = 0$, $f_i^n = 0$. При таянии льда или мёрзлого грунта биохимические процессы и диффузия примесей возобновляются.

Для каждого варианта из таблицы 1 ставится задача с условиями сопряжения на границах слоёв и условиями на верхней и нижней границах. На верхней границе вода – атмосфера ставится условие третьего рода:

$$\frac{K_{m,i}}{\delta_i} \frac{\partial S_{m,i}}{\partial \xi_i} = \alpha_{m,i} \left[S_{m,i} \Big|_{\xi_i=0} - S_{m,атм} \right],$$

$S_{m,атм}$ – концентрация соответствующей компоненты в атмосфере, $\alpha_{m,i}$ – коэффициент массоотдачи. На нижней границе слоя вечной мерзлоты задаются концентрации биохимических параметров $S_{m,H}$. На границах между талыми слоями (вода – талый грунт) ставятся условия сопряжения: равенства концентраций и потоков вещества по обе стороны раздела:

$$S_{m,i} = S_{m,i+1}, \quad \frac{K_{m,i}}{\delta_i} \frac{\partial S_{m,i}}{\partial \xi_i} = \frac{K_{m,i+1}}{\delta_i} \frac{\partial S_{m,i+1}}{\partial \xi_{i+1}}.$$

На границах фазового перехода задаются равенства концентраций биохимических параметров. Предполагается, что на этих границах происходит либо депонирование веществ из талого слоя, либо расконсервация из мёрзлого слоя. Пусть i -й и $(i+1)$ -й – смежные слои, один из которых мёрзлый, другой – талый. Условия на границах фазового перехода запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{m,i}}{\partial t} + w_i \frac{\partial S_{m,i}}{\partial \xi_i} = 0, \quad S_{m,i+1} = S_{m,i} \quad \text{при } w_i > 0, \\ \frac{\partial S_{m,i+1}}{\partial t} + w_{i+1} \frac{\partial S_{m,i+1}}{\partial \xi_{i+1}} = 0, \quad S_{m,i} = S_{m,i+1} \quad \text{при } w_i < 0. \end{aligned}$$

Задаются начальные условия: $S_{m,i} = S_{m,i}^0$.

Рассматривается примитивная модель эмиссии метана в болотно-озёрных ландшафтах. Используется упрощённый вариант математической модели из работы

(Анисимов О.А., Лавров С.А., Ренева С.А, 2005). Для описания транспорта метана f_i^n в уравнении (9) запишется в виде

$$f_i^n(t, \xi_j, S_{m,j}^n, T^n, \dots) = \frac{\mu}{\delta_i} \frac{\partial S_{m,i}}{\partial \xi_i} + P_H,$$

где $S_{m,j}^n$ – концентрация метана в j -ом слое, $q = \mu S_{m,j}^n$ – поток метана в виде пузырьков, $P_H = a_p [\exp(0,16T) - 1]$ – интенсивность производства метана, T – температура, при $T < 0$ $P_H = 0$.

Сформулированная задача решается численно по неявной схеме с учётом вычисленных толщин мёрзлых и талых слоёв, вертикальных распределений температуры. Выполнены пробные расчёты. При потеплении увеличивается глубина сезонного оттаивания грунта, возрастает концентрация метана в грунте и увеличивается эмиссия метана.

Создан программный модуль для исследования биохимических процессов, встроенный в компьютерную модель процессов замерзания/оттаивания в болотно-озёрных ландшафтах.

Проводилась разработка одномерной численной модели на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон» для анализа влияния температурного режима на концентрацию биологических компонентов в стратифицированном водоеме.

Полученные для озера Шира данные длительных измерений температуры вдоль всего столба жидкости обрабатывались с использованием метода главных компонент. Разложение на модальные компоненты позволяет выделить репрезентативные моды и дать им физическую интерпретацию. На рис. 15 – накопленная доля энергии и первая мода поверхностной температуры, позволяющая определить более прогретые области в целом за летний период (измерения 2015 г.).

Определён коэффициент корреляции между температурой воздуха и первым модальным коэффициентом поверхностной температуры, полученным в методе главных компонент. При удалении из значений температуры воздуха суточных колебаний методом скользящего среднего по восьми точкам коэффициент корреляции между температурой воздуха и первым модальным коэффициентом поверхностной температуры равен 0,705 (рис. 16).

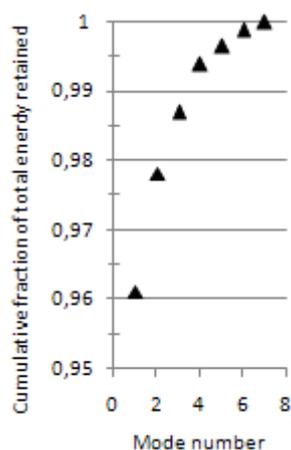


Рисунок 15 – Слева – накопленная доля энергии, справа – первая мода для поверхностной температуры

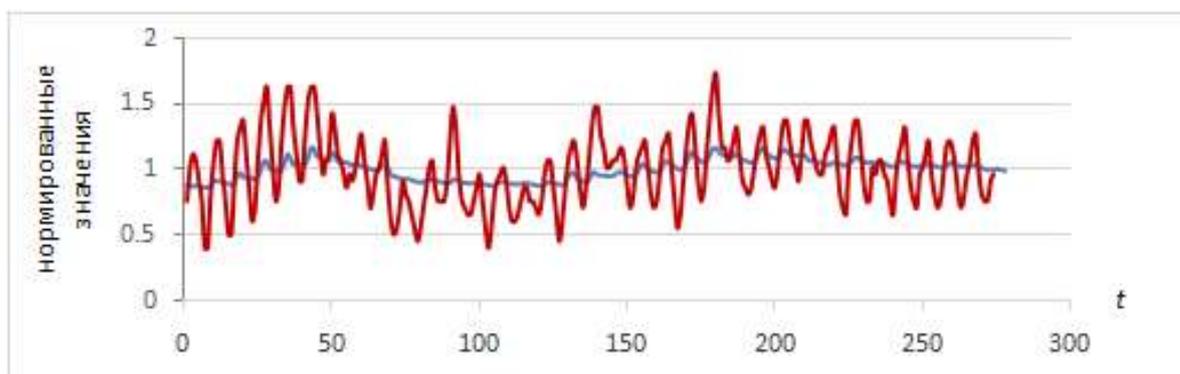


Рисунок 16 – Красный цвет – температура воздуха, отнесенная к среднему значению, синий цвет – первый модальный коэффициент для поверхностной температуры, отнесенный к среднему значению (измерения с 27.06.2015 по 01.08.2015)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За период выполнения проекта получены следующие результаты

1. На языке Фортран реализован авторский код для расчёта характеристик нестационарных течений в двухслойной системе с деформируемой поверхностью раздела. Программный комплекс может применяться для расчётов как основных, так и возмущённых течений двухслойной жидкости (последние возникают при потере устойчивости основного состояния под действием произвольных нестационарных возмущений), и позволяет визуализировать картины течений в динамике и в заданные моменты времени. На его основе изучена задача об устойчивости двухслойной системы в условиях локального нагрева в полной постановке. За счёт соответствующего размещения нагревателей и контроля интенсивности тепловой нагрузки, можно обеспечить подавление термокапиллярных деформаций поверхности раздела между жидкостями для предотвращения появления сухих пятен.

2. Экспериментально и численно исследовано двухфазное течение в жидком мосте, которое развивается в результате действия сил плавучести и термокапиллярной конвекцией в присутствии потока газа, параллельного границе раздела сред. Воздействие газа в этой системе осуществляется через сдвиговые напряжения приповерхностного слоя, а также через теплообмен между жидкостью и газом. В зависимости от параметров обнаружены различные колебательные режимы: периодичный, квазипериодичный с тремя частотами, а также случаи, когда изначальные колебания затухают и система переходит к стационарному течению в жидком мосте, что делает возможным управлять динамикой системы посредством изменения скорости и температуры газового потока.

3. Дан полный анализ начально-краевых задач, описывающих сопряжённые однонаправленные движения в плоских слоях. Найдены достаточные условия для температуры на твёрдых стенках, когда движение с ростом времени выходит на стационарный режим. Решены и аналогичные задачи о совместном двумерном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости при малых числах Марангони.

4. Предложен новый алгебраический подход к изучению совместности уравнений с частными производными. В основе подхода лежат методы коммутативной и дифференциальной алгебры, алгебраической геометрии и базисов Гребнера. Основным является понятие пассивной системы уравнений, которое формулируется в терминах дифференциальных идеалов. Получен достаточный критерий пассивности системы уравнений с частными производными. Доказано, что при выполнении этих достаточных условий система задает гладкое бесконечномерное многообразие в пространстве джетов. Приведены примеры редукции систем к пассивной форме.

Предложен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Метод основан на поиске так называемых промежуточных систем, каждое решение которых удовлетворяет исходному уравнению. Основное внимание уделяется нелинейному волновому уравнению второго порядка, а также нелинейному диффузионному уравнению. Приведены примеры промежуточных систем и соответствующих решений.

5. Проведён анализ совместности уравнений нестационарного однонаправленного движения бинарной смеси в модели Обербека – Буссинеска. Показано, что система совместна в случае, когда начальная температура удовлетворяет уравнению Пуассона с линейной правой частью относительно горизонтальной координаты. Доказано, что в этом случае возможно представление функции температуры в виде линейной, квадратичной и кубической зависимости от горизонтальной координаты. Физический смысл имеет только нестационарное решение с линейной зависимостью температуры; в случае стационарного решения возможна также квадратичная зависимость. В случае линейного распределения температуры решены нестационарная прямая и обратная задачи для функций скорости и градиентов температуры и концентрации в горизонтальном направлении посредством численного обращения образов по Лапласу соответствующих функций. Доказаны теоремы о сходимости решения нестационарной задачи к решению стационарной, построены априорные оценки скорости сходимости.

6. Построен программный модуль для исследования биохимических процессов, встроенный в компьютерную модель процессов замерзания/оттаивания в болотно-озёрных ландшафтах. Разработанный программный комплекс позволяет рассчитывать динамику вечной мерзлоты для различных сценариев изменения климата и использовать различные модели эмиссии метана.

На основе метода главных компонент разработана процедура, позволяющая по натурным наблюдениям температуры выделять более прогретые области в целом за период измерений.

Планы работ по проекту выполнены полностью на высоком научном уровне. Это подтверждается публикациями в высокорейтинговых журналах и выступлениями на конференциях разного уровня по теме проекта.

Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий (термостабилизации приборов и систем жизнеобеспечения на борту МКС), нанесении тонких покрытий, оценке скоростей движения жидкости в наноканалах; при моделировании однонаправленных течений в океанах, расчётах конвекции в озёрах и водохранилищах; определены структуры вечной мерзлоты; при верификации

программных комплексов расчётов сложных течений, определении турбулентных следов и их характеристик вдали от препятствий.

Отметим, что результаты п. 3 в развёрнутом виде вошли в монографию Андреева В.К., Лемешковой Е.Н. «Линейные задачи конвективных движений с поверхностями раздела». Красноярск: СФУ, 2018. 204 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Андреев В.К., Магденко Е.П. Возникновение конвекции в цилиндрическом контейнере со свободной границей // Изв. РАН. МЖГ. – 2018. – № 2. – С. 105-112. DOI: 10.7868/S056852811802010X.
2. Andreev V.K., Magdenko E.P. Onset of Convection in a Cylindrical Container with a Free Boundary // Fluid Dynamics. – 2018. – V. 53, № 2. – P. 277-284. DOI: 10.1134/S0015462818020039.
3. Andreev V.K.; Sobachkina N.L. The Motion of a Binary Mixture with a Cylindrical Free Boundary at Small Marangoni Numbers // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – V. 11(2). – P. 194-205. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-2-194-205.
4. Efimova M.V., Darabi N. Thermal-Concentration Convection in a System Of Viscous Liquid and Binary Mixture in a Plane Channel with Small Marangoni Numbers // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – Vol. 59 (5). – P. 847-856. DOI: 10.1134/S0021894418050115.
5. Andreev V.K., Efimova M.V. Properties of Solutions for the Problem of a Joint Slow Motion of a Liquid and a Binary Mixture in a Two-Dimensional Channel // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – Vol. 12 (3). Vol. 395-408. DOI: 10.1134/S1990478918030018.
6. Andreev V.K., Efimova M.V. A Priori Estimates of the Adjoint Problem Describing the Slow Flow of a Binary Mixture and a Fluid in a Channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – V. 11(4). – P. 482-493. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-4-482-493.
7. Bekezhanova V.B., Shefer I.A. Influence of Gravity on the Stability of Evaporative Convection Regimes // Microgravity Science and Technology. – 2018. – V. 30(4). – P. 543-560. DOI: 10.1007/s12217-018-9628-3.
8. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Характеристики двухслойного течения с испарением в плоском канале при нагреве снизу // Известия Алтайского государственного университета. Физико-математические науки. – 2018. – Т. 102, Вып. 4. – С. 56-61. DOI 10.14258/izvasu(2018)4-10.
9. Bekezhanova V.B. Analysis of the characteristic perturbations spectrum of the exact invariant solution of the microconvection equations // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2018. – V. 118. – P. 570-586. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.021.

10. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations // *Int. J. Thermal Sciences*. – 2018. – Vol. – 130. – P. 323-332. DOI:10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.001.
11. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Analysis of an Exact Solution of Problem of the Evaporative Convection (Review). Part I. Plane Case // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2018. – Vol. 11 (2). – P. 178-190. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-2-178-190.
12. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Analysis of an Exact Solution of Problem of the Evaporative Convection (Review). Part II. Three-dimensional Flows // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2018. – Vol. 11 (3). – P. 338-351. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-3-338-351.
13. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Modeling of three dimensional thermocapillary flows with evaporation at the interface based on the solutions of a special type of the convection equations // *Appl. Math. Modell.* – 2018. – V. 62. – P. 145-162. DOI: 10.1016/j.apm.2018.05.021.
14. Belolipetskii V.M., Belolipetskii P.V., Genova S.N. Numerical modelling of the hydrothermal regime of the Krasnoyarsk reservoir // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2018. – V. 11(5). – P. 569-580. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-5-569-580.
15. Новые методы и результаты исследований ландшафтов в Европе, Центральной Азии и Сибири (в пяти томах). Т. 3. Мониторинг и моделирование ландшафтов. Глава III/65: ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ В БОЛОТНО-ОЗЕРНЫХ ЛАНДШАФТАХ. Белолипецкий В. М., Генова С. Н. / Под редакцией академика РАН В.Г. Сычева, Л. Мюллера. М.: изд-во ФГБНУ «ВНИИ агрохимии». – 2018. – С. 311-314. DOI: 10.25680/6852.2018.29.22.258.
16. Володько О.С., Компаниец Л.А. Вихревая структура озера Шира по результатам натуральных наблюдений и численных расчетов. // *Материалы международного симпозиума «Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере»*. – М., 2018. – С. 79-90. DOI: 10.29006/978-5-9901449-4-12018-1.
17. Yasnou V., Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V. Influence of a coaxial gas flow on the evolution of oscillatory states in a liquid bridge // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. – 2018. – V. 123. – P. 747-759. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer
18. Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V. Pattern selection in miscible liquids under periodic excitation in microgravity: effect of interface width // *J. Physics of Fluids*. – 2018. – V. 30. – № 6. – P. 062103. DOI: 10.1063/1.5032107.

19. Ефимова М.В., Дараби Н. Термоконцентрационная конвекция в системе вязкой жидкости и бинарной смеси в плоском канале при малых числах Марангони // ПМТФ. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 93-103. DOI: 10.15372/PMTF20180511.
20. Kartsov O.V. Intermediate Systems and Higher-Order Differential Constraints // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – V. 11 (5). – P. 550-560. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-5-550-560.
21. Паращук И.А., Сенашов В.И. Восстановление информации о группе по нижнему слою // Сибирский журнал науки и технологий. – 2018. – Т. 19, № 2. – С. 223-226. DOI: 10.31772/2587-6066-2018-19-2-223-226.
22. Stepanova I.V. Symmetry of heat and mass transfer equations in case of dependence of thermal diffusivity coefficient either on temperature or concentration // Mathematical Methods in the Applied Science. – 2018. – Vol. 41(8). – P. 3213-3226. DOI: 10.1002/mma.4811.
23. Cheremnykh E.N. A Priori Estimates of the Solution of the Problem of the Unidirectional Thermogravitational Motion of a Viscous Liquid in the Plane Channel // Mathematical Notes – 2018. – Vol. 103. – № 1-2. – P. 145-154. DOI:10.1134/S0001434618010169.
24. Cheremnykh E.N. Unidirectional heat-gravitational motion of viscous fluid in a flat channel with a given flow rate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – Vol. 59. – № 3. – P. 416-421. DOI: 10.1134/S0021894418030045.
25. Черемных Е.Н. Однонаправленное термогравитационное движение вязкой жидкости в плоском канале при заданном расходе // Прикладная математика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 3. – С. 36-42. DOI: 10.15372/PMTF20180304.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2019 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
<p>1 Программы расчёта выбора оптимальных параметров (в частности внешней температуры) на характеристики течений в плоских и цилиндрических слоях.</p> <p>Критические характеристики устойчивости для конкретных жидких сред и практические рекомендации для проведения экспериментов.</p>	<p>1 Численный анализ нелинейных задач конвекции при наличии полного энергетического условия на поверхности раздела. Построение бифуркационных диаграмм зависимости интенсивности течений от внешних параметров.</p> <p>Изучение влияния теплофизических параметров рабочих сред на характеристики устойчивости двухслойных течений, в том числе двумерных течений с массопереносом через границу раздела.</p>
<p>2 Групповой анализ и построение приближённых решений иерархии моделей свободной турбулентности.</p>	<p>2 Построение автомодельных решений уравнений модели закрученной струи. Поиск приближённых решений для описания течений в дальнем турбулентном следе.</p>
<p>3 Оценка влияния изменения климата на вертикальную структуру вечной мерзлоты в различных широтах.</p> <p>Анализ пространственно-временной структуры течения в водоёме на основе натурных наблюдений.</p>	<p>3. Численные эксперименты по оценке влияния различных сценариев изменения климата на динамику вертикальной структуры вечной мерзлоты на основе разработанных одномерных математических моделей.</p> <p>Анализ натурных наблюдений с использованием методов с уменьшением размерности данных</p>