

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное
подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН

ГРНТИ 30.17.15

№ АААА-А18-118011890025-2

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора ФИЦ КНЦ СО РАН

_____ Шпедт А.А.
«__» _____ 2020 г.

ОТЧЕТ

О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА

«КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИХ
ОБЪЕКТОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ»

(промежуточный)

Номер проекта 0356-2019-0012

Приоритетное направление: Индустрия наносистем

Программа ФНИ (номер и наименование): III.22 Механика жидкости, газа и
плазмы, многофазных и неидеальных сред, механика горения, детонации и
взрыва

Протокол Ученого совета _____

№ _____ от «__» _____ 2020 г.

Руководитель проекта

д.ф.-м.н., профессор

_____ В.К. Андреев

"__" _____ 2020 г.

Красноярск, 2020

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В.К. Андреев
	(подпись, дата)	
Исполнители: г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.М. Белолипецкий
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е.Н. Лемешкова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е.П. Магденко
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько
	(подпись, дата)	

н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

А.В. Шмидт

м.н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

Т.В. Якубайлик

м.н.с.

(подпись, дата)

О.С. Володько

Старший инженер

(подпись, дата)

Н.Ф. Ильина

Нормоконтролер

(подпись, дата)

А.В. Вяткин

Отчёт 36 с., 18 рис., 2 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФфуЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач гидродинамики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

Неизотермические течения жидких сред с поверхностями раздела широко используются в различных технологиях химической, энергетической и электронной промышленности, в теплофизике и материаловедении. Изучение динамики конвективных течений, возникающих в разнообразных системах, представляет собой комплекс задач, требующий применения различных методов математического и численного моделирования.

В результате исследований за отчётный период построены на основе метода симметрий и развитой техники изучения совместности дифференциальных систем новые точные решения уравнений жидких сред (конвекции, термодиффузии, закрученного следа); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных сил; разработаны комплексы программ расчётов конвективных течений с поверхностями раздела, стратифицированных течений в солёных озёрах; одномерных моделей использованных для изучения сезонного протаивания вечной мерзлоты на суше и в болотно-озерных ландшафтах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано. Опубликовано 21 работа в журналах входящих в системы базы данных WoS и SCOPUS.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Исследование течений и устойчивости сопряжённых задач механики жидких сред.....	7
2 Теоретико-групповой анализ уравнений новых моделей гидродинамики с усложнёнными свойствами.....	15
3 Применение математических моделей при изучении природных гидрофизических процессов	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	29
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	33
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	36

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом гидродинамики. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях. Кроме того, поверхности раздела возникают и при изучении гидрофизики озёр, водохранилищ и структуры вечной мерзлоты в условиях меняющегося климата.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

В связи с вышесказанным, в отчетный период проводились исследования течений жидких сред с поверхностями раздела, причём учитывалось влияние тепло- и массопереноса, турбулентности, гидрофизических процессов протаивания вечной мерзлоты.

Настоящий отчет является промежуточным по теме: «Комплексный анализ гидродинамических аспектов функционирования природных систем и технических объектов в экстремальных условиях».

1 Исследование течений и устойчивости сопряжённых задач механики жидких сред

План 2019 года: изучение влияния теплофизических параметров рабочих сред на характеристики устойчивости двухслойных течений, в том числе двумерных течений с массопереносом через границу раздела.

1.1 Исследована задача о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в канале с учетом энергии межфазного теплообмена на плоской поверхности раздела. Для анализа течения в двухслойной системе записаны уравнения Навье – Стокса, неразрывности, теплопроводности и массопереноса для каждого из слоёв жидкости. Система ограничена неподвижными твердыми стенками с параболическим распределением температуры. Считается, что через них отсутствует поток вещества и задано условие прилипания. На недеформируемой поверхности раздела учитывается условие энергообмена, а также выполнены кинематическое, динамическое условия, условия равенства скоростей, температур, отсутствие потока вещества через поверхность раздела. Коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(\theta - \theta_0) - \sigma_C(c - c_0)$.

Поле скоростей задачи термодиффузионной конвекции описывается в специальном виде. Будем считать, что одна из компонент скорости линейно зависит от продольной координаты $u_j(\tau, \xi, \eta) = U_j(\tau, \eta)\xi$, $v_j(\tau, \xi, \eta) = V_j(\tau, \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $j = 1, 2$, поля температур и концентрации имеют квадратичную зависимость от горизонтальной координаты $\theta_j(\tau, \xi, \eta) = A_{j0}(\tau, \eta)\xi^2 + B_{j0}(\tau, \eta)$, $c_1(\tau, \xi, \eta) = H_0(\tau, \eta)\xi^2 + K_0(\tau, \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$. Такое поле скоростей соответствует хорошо известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости. Основными характерными параметрами задачи являются число

Марангони $M = \frac{\sigma_T l_2^3 A_{10}}{\rho_2 \nu_2 \chi_1}$, число Прандтля $Pr_j = \frac{\nu_j}{\chi_j}$, параметр энергообмена $E = \frac{\sigma_T A_{10}}{\rho_2 \nu_2 k_2}$,

l_2 - общая толщина системы.

В предположении, что движение в системе жидкостей является ползущим ($|M| \ll 1$), решена стационарная задача. В зависимости от значений определяющих параметров модельная задача может не иметь решений, иметь одно или два точных решения, которые получены в общем виде.

Для иллюстрации физических эффектов была использована модельная система с параметрами: $\rho = \rho_1 / \rho_2 = 0.945$, ρ_j - плотность жидкости j -го слоя, $\nu = \nu_1 / \nu_2 = 7.1$ -

отношение кинематических вязкостей жидкостей, $k = k_1/k_2 = 0.42$ - отношение коэффициентов теплопроводностей жидкостей, $\gamma = l_1/l_2 = 0.5$ - граница раздела жидкостей, $Pr_1 = 29$, $Pr_2 = 1.52$, $E = -0.328 \cdot 10^{-9}$.

На рис. 1, а представлены профили безразмерных составляющих $U(\eta), V(\eta), 0 \leq \eta \leq 1$ компонент скорости для исследуемой системы для случая, когда на твердых стенках заданы условия $\theta(\xi, 0) = -0.03\xi^2 + 25$, $\theta(\xi, 1) = 20$. Наличие термоконцентрационных сил на поверхности раздела вызывает возвратное течение около неё. На рис. 1 б показано векторное поле скоростей вблизи критической точки $\xi = 0$.

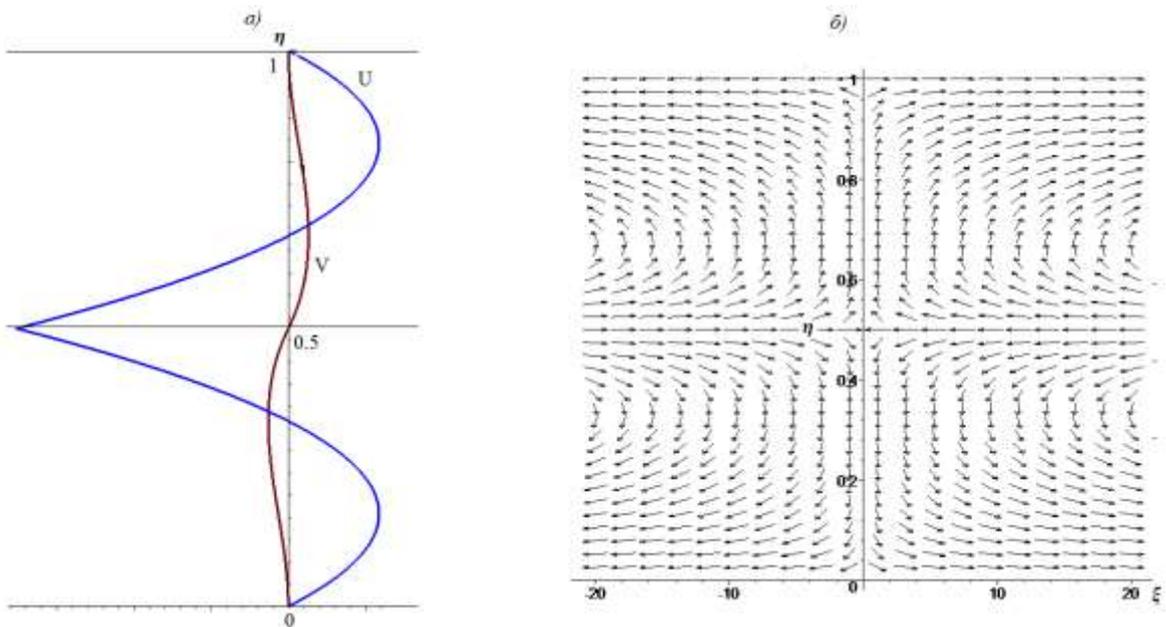


Рисунок 1 – Профили функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ компонент скорости (а) и векторное поле скоростей (б)

В предположении, что температурный и концентрационный коэффициент поверхностного натяжения связан соотношением $\sigma_T = \alpha\sigma_C$, получено, что в двухслойной системе жидкостей будет наблюдаться термодиффузионное равновесие, т.е. $U(\eta) = 0, V(\eta) = 0$.

В рамках линейной теории исследована устойчивость полученного решения. Для этого выписана линеаризованная задача для возмущений скорости, температуры и концентрации в каждом слое. Решение поставленной задачи искалось в виде нормальных волн $(U, V, P, T, K) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta)) \exp(i\alpha\xi - i\lambda\tau)$. В длинноволновом приближении получено трансцендентное уравнение для нахождения декремента λ , который определяет временной ход возмущений. Показано, что λ является чисто мнимой

величиной с отрицательной мнимой частью. А значит, возмущения основного течения будут затухать со временем. Выписано решение амплитудных уравнений.

1.2 Исследованы однонаправленные движения жидкости в плоском канале, описываемые формулами $\mathbf{u}=(U(y,t),0,0)$, $\theta=-A(y,t)x+T(y,t)$, $p=-B(y,t)x+P(y,t)$ (для двух жидкостей нужно поставить индекс $j=1,2$). Данный вид решения применяется для анализа движения одной жидкости и двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела в канале с твердыми непроницаемыми стенками в модели Обербека – Буссинеска. При этом на твердых стенках задается нестационарный градиент температуры, что позволяет управлять движением жидкостей в канале. Возникающие начально-краевые задачи для функций $U(y,t)$, $A(y,t)$ являются обратными, поскольку содержат неизвестный градиент давления. По известным функциям $U(y,t)$, $A(y,t)$ определяется $T(y,t)$ из решения классической задачи, а $B(y,t)$, $P(y,t)$ - с помощью квадратур. Для этих задач получены априорные оценки решения в равномерной метрике и указаны условия на входные данные, когда решения с ростом времени выходят на стационарный режим. Численными методами прослежена эволюция скоростей и температур для конкретных жидкостей и толщины канала для различных заданий градиентов $A_j(t)$ на твердых стенках. На рис. 2 изображены профили безразмерных

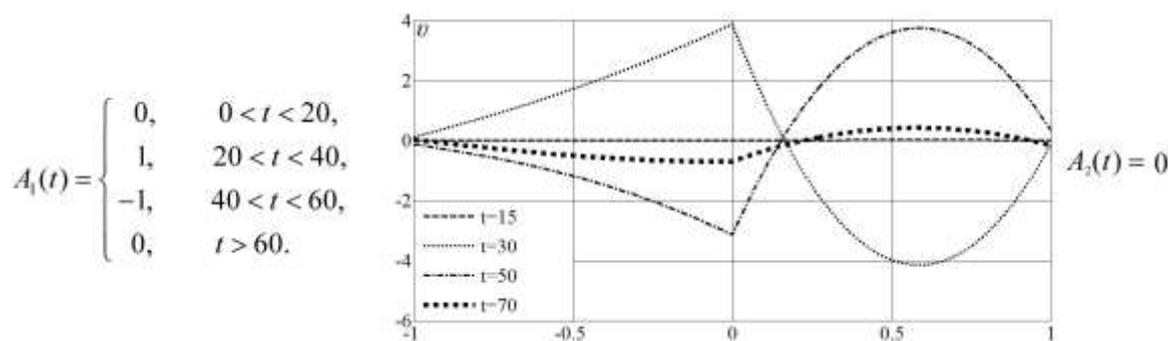


Рисунок 2 – Профили безразмерных скоростей \bar{U}_j

скоростей \bar{U}_j (поверхность раздела $y=0$), когда $A_1(t)$ (градиент температуры на нижней стенке) – разрывная функция, а $A_2(t)=0$. Заметим, что при $t=30$ только во втором слое возникает возвратное течение. Следовательно, задавая различный вид градиента температуры на стенке, можно влиять на характер течения.

1.3 Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твёрдыми стенками на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E . Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряжённая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения. В случае, когда отсутствует влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоёв ($E=0$), найдено два решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные структуры течения и проведён анализ влияния безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений. На рис. 3 приведены профили

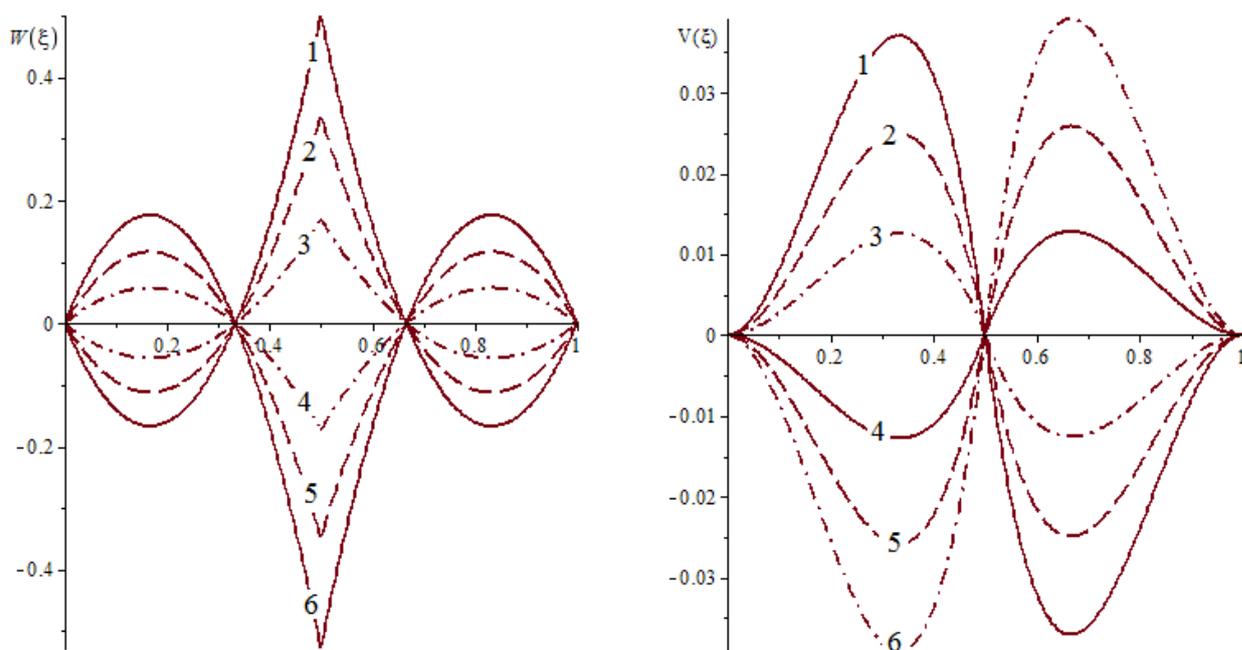


Рисунок 3 – Профили безразмерной функции и поперечной скорости в зависимости от параметра E : 1 – $E=0.6$; 2 – $E=0.4$; 3 – $E=0.2$; 4 – $E=-0.2$; 5 – $E=-0.4$; 6 – $E=-0.6$

безразмерной функции $W(\xi)$ и поперечной скорости $V(\xi)$, для одного из полученных решений, в зависимости от безразмерного параметра E . Случай, когда $E < 0$, означает, что температура на нижней стенке в точке $\xi = 0$ максимальна.

1.4 Решена задача об осесимметричном стационарном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном цилиндре с твёрдой боковой стенкой. Жидкости образуют общую подвижную недеформируемую цилиндрическую поверхность раздела. Массовые силы отсутствуют. Одна из основных особенностей задачи в том, что учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. При этом температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, который согласуется с полем скоростей типа Хименца. С математической точки зрения эта начально-краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давления вдоль оси цилиндра. Задача решается численно, с помощью модифицированного метода Галёркина. В итоге было показано, что при увеличении значения температурного коэффициента, выражающего квадратичную зависимость температуры жидкости на твёрдой стенке от осевой координаты, жидкости начинают течь более интенсивно (рис. 4).

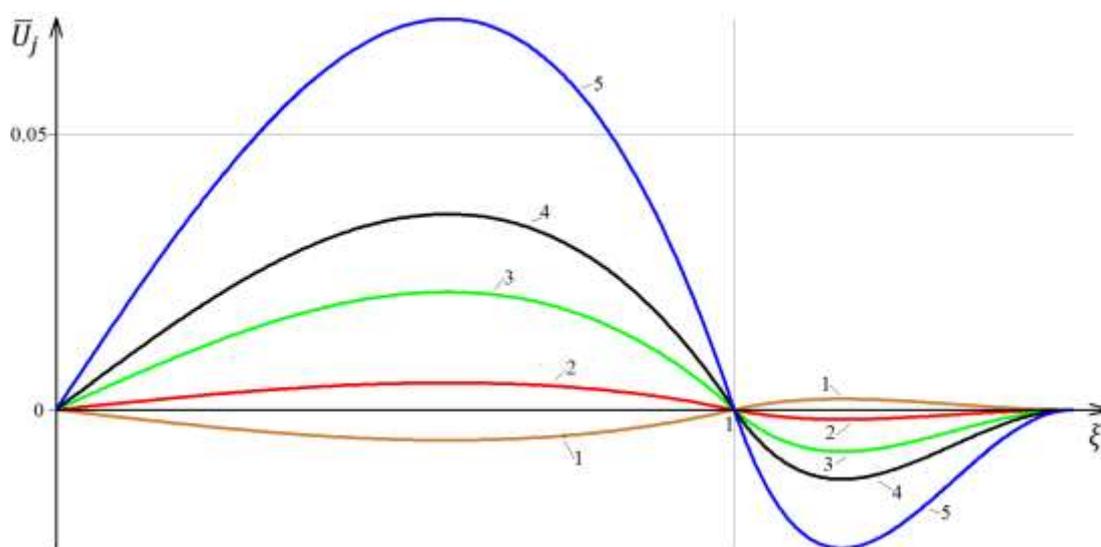


Рисунок 4 – Влияния числа Марангони на значение радиального профиля скорости $U_j(\xi)$. 1 - $M=-1$, 2 - $M=1$, 3 - $M=5$, 4 - $M=9$, 5 - $M=20$

Отрицательные значения числа Марангони (M), которое пропорционально температурному коэффициенту, говорит о том, что температура на твёрдой стенке при $z=0$ (z – осевая координата) имеет максимум, а при $M>0$ – минимум.

Стоит отметить, что численные результаты хорошо согласуются с аналитическими результатами, полученными при решении модельной задачи о ползущем течении.

Результаты могут быть использованы при движении жидких сред в нанотрубках, при этом жидкость вблизи стенки цилиндра играет роль смазки.

1.5 Исследовано одно частично инвариантное решение ранга два и дефекта три уравнения, описывающего осесимметричное движение вязкой теплопроводной жидкости. Оно интерпретируется как двухслойное движение несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном цилиндре с твёрдой стенкой при отсутствии массовых сил. Жидкости имеют общую подвижную недеформируемую цилиндрическую поверхность раздела. С математической точки зрения, возникающая начально-краевая задача является нелинейной и обратной, так как градиенты давления вдоль оси цилиндра являются искомыми. При некоторых (часто выполняющихся в практических приложениях) предположениях задача заменяется линейной. В результате получены не улучшаемые равномерные априорные оценки решений поставленной задачи для малого числа Марангони.

1.6 На основе точного решения уравнений тепломассопереноса исследованы характеристики течения тонкой жидкой плёнки, увлекаемой спутным газовым потоком, в миниканале. Подобные течения используются в системах жидкостного охлаждения микро- и миниэлектронных устройств. На внешних границах канала поддерживается линейное по продольной координате распределение температуры: $\theta(x, y, 0) = \theta_{l1}x + \theta_{l2}$, $\theta(x, y, H) = \theta_{g1}x + \theta_{g2}$, и выполнены условия прилипания. На внутренней границе раздела справедливы кинематическое, динамическое и энергетическое условия, а также условия непрерывности общего вектора скорости и температуры.

Система определяющих уравнений допускает точное стационарное решение вида

$$\mathbf{v}_{l,g} = (u(z), 0, 0), \quad p_{l,g} = p_{l,g}(x, z), \quad \theta_{l,g} = \theta_{l,g}(x, z), \quad (1.1)$$

где индексы l и g обозначают величины, характеризующие жидкость и газ, соответственно. Точный вид искоемых функций определяется путём подстановки решения (1.1) в исходную систему и граничные условия. Решение (1.1) интерпретируется как решение, описывающее совместное течение тонкой жидкой плёнки и ламинарного газового потока на рабочем участке длинного миниканала с приложенной на внешних границах тепловой нагрузкой. При этом основное состояние характеризуется продольным температурным градиентом A , который в силу вида решения совпадает на внешних границах канала и поверхности раздела. На примере системы сред FC-72 – азот исследованы режимы течений, возникающие в канале высоты 1.2 мм, при начальной толщине плёнки 100 – 400 мкм. Во всём рассмотренном диапазоне толщин решение (1.1)

описывает чисто термокапиллярные режимы, которые характеризуются формированием возвратного течения в жидком слое.

В рамках линейной теории устойчивости изучено влияние энергетических свойств границы раздела жидкость-газ и толщины жидкой плёнки на структуру возмущённого течения. Сформулирована и численно решена начально-краевая задача для функций возмущений. В качестве начальных данных использовались величины, составляющие 5% от осреднённых значений соответствующих характеристик основного течения. Для анализа характера и степени влияния изменений внутренней энергии межфазной границы проводилось сравнение распределений скорости и температуры, характеризующих возмущённое состояние, полученных в рамках классической постановки сопряжённой задачи, когда потоки тепла равны (*задача 1*), и задачи с полным условием теплового баланса (*задача 2*). Расчёты выполнялись для случая нормальной гравитации, при этом рассматривались системы с начальной толщиной плёнки 100 и 400 мкм. Установлено существенное влияние изменений внутренней энергии межфазной границы на структуру теплового и гидродинамического полей возмущённого течения. В отличие от основного температурного поля, которое характеризуется однородным градиентом в поперечном направлении, тепловые возмущения вызывают образование горячего пограничного слоя вблизи поверхности раздела (рис. 5 в, 5 г) и тепловых структур различной формы. Под действием возмущений, взаимодействующих с основным течением, в системе возникают термокапиллярные валиковые структуры (рис. 5 а, 5 б), в которых наблюдается

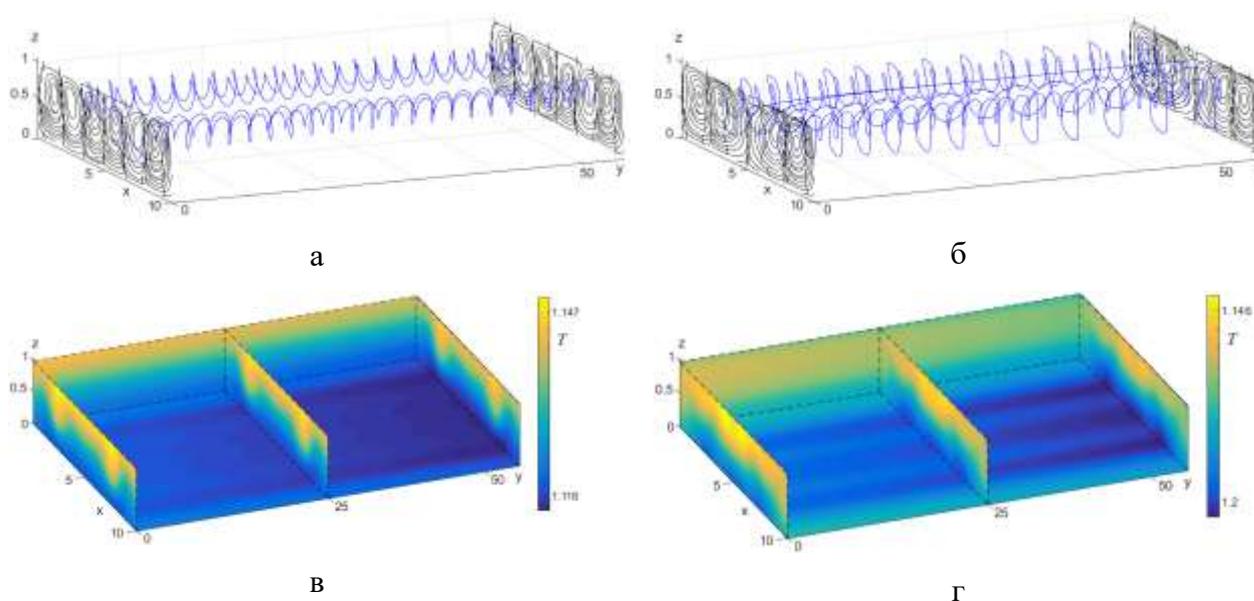


Рисунок 5 – Поле скорости и траектории движения частиц (а, б) и поле температуры (в, г) в системе FC-72 – азот с начальной толщиной жидкого слоя 100 мкм при $A = 1$ К/м в задаче с полным энергетическим условием (а, в) и в классической постановке (б, г).

вращательно-поступательное движение частиц. В любых двух соседних продольных валиках жидкость циркулирует в противоположном направлении. Работа термокапиллярных сил по изменению площади поверхности раздела приводит к уменьшению поперечного размера термокапиллярных продольных валов и слабому росту вращательной компоненты скорости. С увеличением толщины жидкого слоя ослабевает влияние вязких сил и, как следствие, растёт скорость движения. Полученные результаты указывают на необходимость использования полного энергетического условия при моделировании течений тонких плёнок. Это позволит более точно предсказать возможные кризисные явления, связанные с разрывом слоя жидкого теплоносителя в системах термостабилизации за счёт формирования термокапиллярных структур. Возникновение продольных термокапиллярных валов неизбежно сопровождается изменением формы границы раздела и утоньшением жидкого слоя в областях растекания жидкости в поперечном направлении из горячих областей в зоны с меньшей температурой.

2 Теоретико-групповой анализ уравнений новых моделей гидродинамики с усложнёнными свойствами

План 2019 года: построение автомодельных решений уравнений модели закрученной струи. Поиск приближённых решений для описания течений в дальнем турбулентном следе.

2.1 Рассмотрена модель (Деменков А. Г., Черных Г. Г., 2019), описывающая течение в дальних областях закрученной турбулентной струи. Найден базис алгебры Ли данной модели, построена автомодельная редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно.

Проведено построение приближённых решений для описания течений в дальнем турбулентном следе. Исследование проводилось на основе следующей модифицированной k - ω модели Вилкокса (версия 2006 года), записанной в приближении дальнего следа:

$$U_{\infty} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{k}{\omega} \frac{\partial u_1}{\partial y},$$
$$U_{\infty} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \sigma^* \frac{k}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{k}{\omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \beta^* k \omega,$$
$$U_{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \sigma \frac{k}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Искомыми величинами в данной модели являются дефект продольной осредненной компоненты скорости u_1 , турбулентная кинетическая энергия k и удельная скорость диссипации кинетической энергии ω . Здесь U_{∞} – скорость набегающего на тело невозмущенного потока. Получена автомодельная редукция уравнений рассматриваемой модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно. Для решения задачи привлекался модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными, что отражено на следующем рис. 6. Выполненное сопоставление с экспериментальными данными свидетельствует о том, что учет перекрестно-диффузионного члена в уравнении на ω позволил улучшить прогностические свойства модели k - ω в расчетах свободных сдвиговых турбулентных течений. Кроме того, на основе асимптотического разложения построено приближенное решение, описывающее течение в дальнем турбулентном следе за телом.

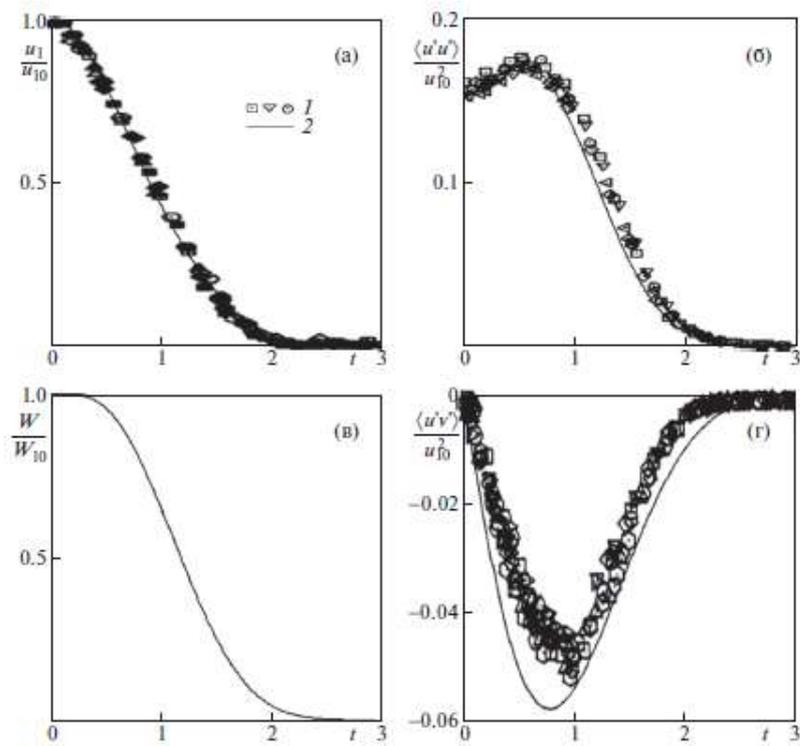


Рисунок 6 – Сравнение с экспериментальными данными

2.2 Введено новые понятия симметрий и законов сохранения для дифференциальных идеалов коммутативных колец с несколькими дифференцированиями. Определение симметрии идеала состоит из условий контактности и инвариантности, точнее, дифференцирование кольца является симметрией идеала, если оно сохраняет идеал и модуль заданных дифференцирований.

Получен критерий того, что дифференцирование кольца является симметрией идеала. Показано, что множество симметрий идеала образует кольцо Ли. Вводится понятие полиномиальной системы уравнений с частными производными с коэффициентами в некотором кольце. Получено условие того, что векторное поле является контактными.

2.3 С помощью линейных дифференциальных связей четвертого порядка найдены решения уравнения Буссинеска, зависящее от нескольких произвольных констант и выражающееся через элементарные функции. Методом Хироты получены специальные типы волн, такие как волновые пакеты, «танцующие» волны и волны на солитонах (рис. 7, 8). Представлена удобная мультипликативная форма принципа суперпозиции, позволяющая получать из специальных типов волн более сложные структуры. В частности, среди них имеются структуры, описывающие взаимодействие волновых

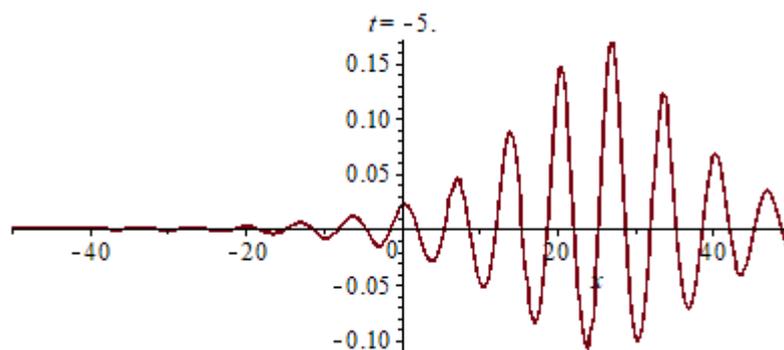


Рисунок 7 – Волновой пакет, являющийся точным решением уравнения Буссинеска

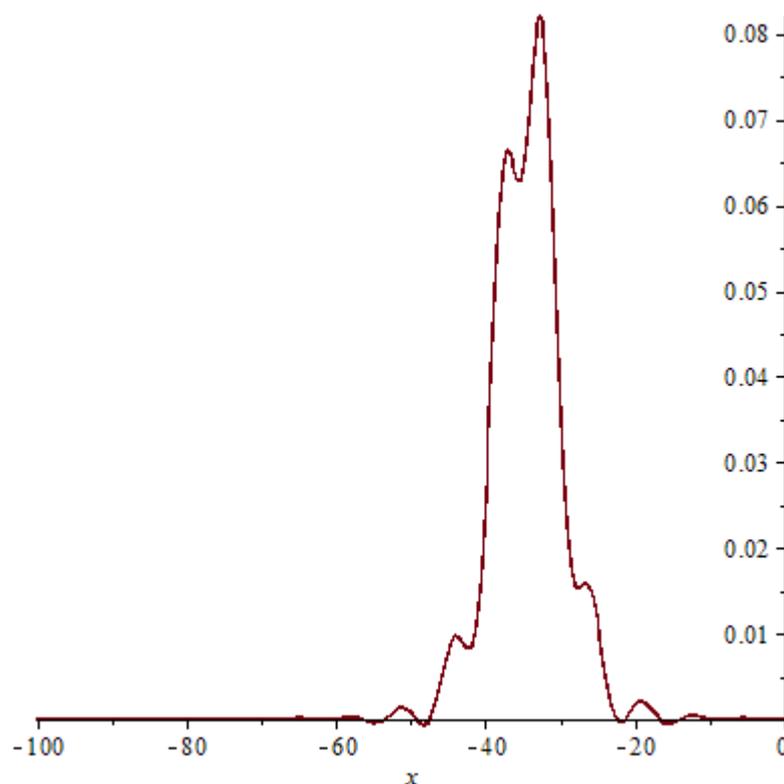


Рисунок 8 – Волны на солитоне полученные интегрированием уравнения Буссинеска.

пакетов с «танцующими» солитонами и между собой. Данные структуры упруго взаимодействуют между собой.

Кроме того, найдены новые решения уравнения Буссинеска, подобные солитонам, волновым пакетам, волнам на солитоне. Однако эти решения удовлетворяют нестандартным дисперсионным соотношениям и стремятся к некоторой константе при $|x|$, стремящемся к бесконечности.

2.4 Проведено исследование классов решений с функциональным произволом для уравнения

$$u_{tt} = c^2(x, y)(u_{xx} + u_{yy} - s(x, y)u),$$

к которому сводится двумерное уравнение распространения звука в неподвижной неоднородной среде.

В качестве примера рассмотрено двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$

которое обладает следующим классом решений:

$$u = f_0(x, y)\varphi^{(n)} + f_1(x, y)\varphi^{(n-1)} + \dots + f_n(x, y)\varphi.$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x+t)$, а

$$f_k(x, y) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k \lfloor k/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j C_{n-k+j}^j \frac{x^{k-2j}}{(k-2j)!} \frac{y^{2n-2k+2j}}{(2n-2k+2j)!}.$$

2.5 Свойства группы девятого порядка, которая является прямым произведением двух циклических групп третьего порядка, были использованы при изучении структуры легированных перовскитов.

Было показано, что пространственное распределение страйпов U и D сводится ко всем возможным картам в известной теореме о четырех красках.

2.6. Получено новое семейство «кривых добегания», определяющих изменение уровня воды в реке в данном месте в зависимости от уровня выше по течению.

Проведены численные эксперименты с различными кривыми добегания с использованием данных натуральных экспериментов, проведенных вниз по течению от Новотверецкой и Ивановской ГЭС.

2.7. Рассмотрены уравнения однонаправленного движения в приближении Обербека-Буссинеска, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_{yy} - p_x, \quad \theta + c = p_y, \\ \theta_t + \text{Gr} u \theta_x &= \frac{1}{\text{Pr}} (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad c_t + \text{Gr} u c_x = \frac{1}{\text{Sc}} (c_{xx} + c_{yy} - \psi(\theta_{xx} + \theta_{yy})), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где Gr, Pr, Sc – числа Грасгофа, Прандтля, Шмидта соответственно, остальные обозначения стандартные. В предположении, что поле температуры представимо

в виде $\theta(t, x, y) = A(t, y)x + B(t, y)$ выводится система нелинейных уравнений для определения поля концентрации, скорости и давления. Задача считается обратной в том случае, если горизонтальный градиент давления не задан и находится с использованием условия на расход жидкости. Для задачи о движении между двумя твердыми стенками, на которых заданы условия прилипания, линейное распределение температуры и отсутствие потока вещества получены априорные оценки на решение, показывающие, что если градиент температуры $A_1(t), A_2(t)$ на твердых стенках и его производные ограничены; функция $q(t)$, задающая расход жидкости, убывает при $t \rightarrow \infty$, тогда скорость и искомый градиент давления являются ограниченными функциями и сходятся к соответствующим стационарным распределениям при $t \rightarrow \infty$. Решение задачи получено в виде рядов, отмечено, что необходимым условием сходимости данного решения к построенному в работе стационарному решению является выполнение интегрального равенства

$$\int_0^1 N_0(y) dy = \frac{\psi(A_1^s + A_2^s)}{2} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} + \frac{A_2^s - A_1^s}{720q^s + \psi(A_1^s - A_2^s)} \right) \quad (2.2)$$

где N_0 — начальный градиент концентрации, величины с индексом s соответствуют стационарным значениям градиента температуры на стенках и расхода.

На рис. 9 представлены профили скорости при $q = 0$, $A_1(t) = A_1^s + 10\sin(0.02t)e^{-0.05t}$, $A_2 = A_2^s$ в зависимости от выполнения условия (2.1). Сплошная кривая соответствует стационарному решению, кривые 2-4 – нестационарные профили скорости в разные моменты времени: $t = 600c, 800c, 1500c$. Для построения рис. 9,а

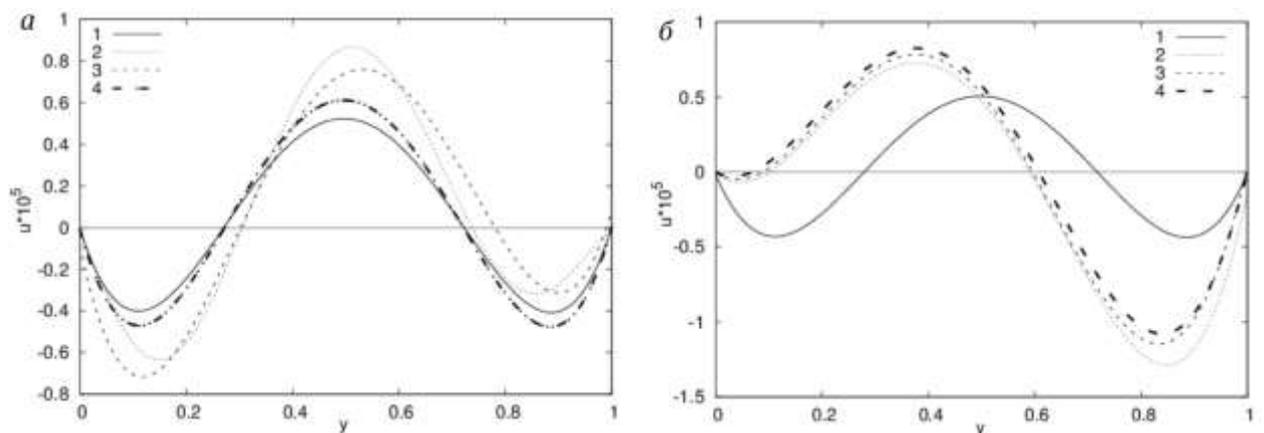


Рисунок 9 – Распределение скорости в различные моменты времени при выполнении (а) и невыполнении (б) равенства (2.2)

значение $N_0 = 0.00052$ вычислено по формуле (2.2), для построения рис. 9,б взято значение $N_0 = 0.0004$. Как видно при невыполнении равенства (2.2) нет сходимости нестационарного решения к стационарному. Заметим, что в условиях нулевого расхода функция скорости меняет знак, существуют зоны прямого и возвратного течения.

В случае стационарного течения и квадратичной зависимости поля температуры от переменной x , анализ совместности системы (2.1) приводит к уравнению на скорость

$$u^V - (a_0 y + a_1)u = 0 \quad (2.3)$$

При $a_0 = a_1 = 0$ уравнение (2.3) описывает поле скорости, соответствующее известному решению Остроумова – Бириха с линейным полем температуры, использованное для проверки сходимости построенного нестационарного решения, описанного выше. Если $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ решение уравнения (2.3) имеет вид

$$u = C_1 e^{\lambda y} + e^{\lambda \mu_1 y} (C_2 \cos \lambda \mu_2 y + C_3 \sin \lambda \mu_2 y) + e^{\lambda \mu_3 y} (C_4 \cos \lambda \mu_4 y + C_5 \sin \lambda \mu_4 y), \quad (2.4)$$

$$\lambda = \sqrt[5]{a_1}, \mu_1 = (\sqrt{5} - 1) / 4, \mu_3 = -(\sqrt{5} + 1) / 4, \mu_{2,4} = \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} / 4.$$

Соответствующие поля температуры и концентрации зависят от продольной координаты по квадратичному закону, давление является линейной функцией переменной x . При $a_0 \neq 0$ фундаментальная система решений уравнения (2.3) записывается как

$$u_j(\xi) = \xi^{j-1} E_{5,6/5,j/5}(m\xi^6), \quad j=1, \dots, 5, \quad m = a_0^{-5}, \quad \xi = a_0 y + a_1, \quad \text{где} \quad (2.5)$$

$$E_{5,6/5,j/5}(m\xi^6) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (m\xi^6)^k - \text{функция Миттаг-Леффлера,}$$

$$b_k = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\Gamma(6s + j + 1)}{\Gamma(6s + j + 6)}, \quad \Gamma(t) - \text{гамма-функция.}$$

Построенные точные решения (2.4) и (2.5) получены впервые и не являются обобщениями известных ранее решений.

В качестве физической интерпретации решения (2.4) с соответствующими квадратичными полями температуры и концентрации рассмотрена задача о течении между двумя твердыми стенками $y = 0$ и $y = 1$. Граничные условия на нижней стенке

$$u(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0 x^2 + \theta_1 x + \theta_0, \quad \theta_y(0) - \psi c_y(0) = 0$$

Верхняя стенка считается теплоизолированной. На ней выполнены равенства

$$u(1) = 0, \quad \theta_y(1) = 0, \quad c_y(1) = 0$$

Для замыкания задачи используется условие на среднюю концентрацию c_0 в сечении $x = 0$.

Решение задачи представлено на рис. 10 для смеси вода-изопропанол (30% / 70%). Необходимые безразмерные параметры таковы: $Pr = 398.403$, $Sc = 112040.8$, $\psi = -0.1144$. Число Грасгофа зависит от разности температур ΔT и толщины слоя L . Отметим, что течения такого рода реализуются в достаточно тонких слоях при малых перепадах температур, зафиксируем $\Delta T = 2K$, $\theta_1 = 0.01$, $\theta_2 = 0.1$.

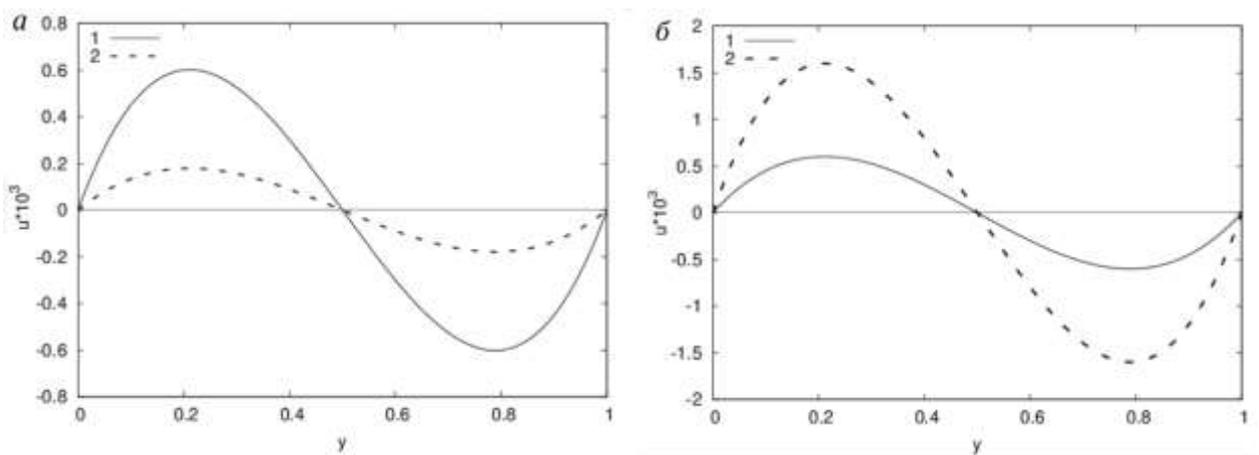


Рисунок 10 – Зависимость скорости от: а) θ_0 : кривая 1 при $\theta_0 = -0.0001$, кривая 2 при $\theta_0 = -0.00001$; б) толщины слоя L : кривая 1 при $L = 0.001$, кривая 2 при $L = 0.0005$

Как видно из рис. 10 убывание градиента температуры по абсолютному значению ведет к уменьшению скорости, в то время как уменьшение толщины слоя приводит к увеличению скорости. Для всех рассмотренных случаев можно наблюдать возникновение зоны возвратного течения, в центре слоя скорость меняет знак.

2.7 Математическое моделирование бесконечных дискретных объектов возможно, если эти объекты удовлетворяют каким-либо условиям конечности. Если все слои элементов в бесконечной группе конечны, то для такой группы возможно функциональное описание мощности слоев. Слоем называется множество всех элементов

группы одного порядка. Показано, что очень хорошо поддаются визуализации примарные слойно конечные группы и слойно конечные группы в случае двух простых делителей порядков элементов группы. Для примарного случая удобно использовать обычное графическое представление. В случае двух простых делителей порядков элементов слойно конечной группы, проведена визуализация функций мощности слоев при помощи поверхностей в трехмерном пространстве. Для большего числа простых делителей порядков элементов предложен подход моделирования слойной структуры полной слойно конечной группы при помощи подгруппового анализа.

3 Применение математических моделей при изучении природных гидрофизических процессов

План 2019 года: Оценка влияния изменения климата на вертикальную структуру вечной мерзлоты в различных широтах.

3.1 Разработанные компьютерные модели [Belolipetskii Victor M., Genova Svetlana N. A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2), 158-165; Belolipetskii V.M., Genova S.N. One-dimensional vertical model of permafrost dynamics /OP Conference Series: Earth and Environmental Science 2018] использовались для исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты на суше и в болотно-озерных ландшафтах. Проведена серия численных экспериментов по исследованию влияния метеоусловий, глубины болота (озера) на глубину протаивания.

Результаты модельных расчетов показывают, что сезонные протаивания в болотно-озерных ландшафтах могут проходить как с формированием талого слоя (талика) зимой, так и без него (рис.11). Талик – участок незамерзающей породы среди многолетней мерзлоты, распространяющийся вглубь от слоя сезонного промерзания.

Изменение климата ($\pm 2^{\circ}C$) приведет к изменению глубины протаивания на 10-15 см (рис. 12). Для районов, отличающихся широтой на 3° при одинаковых метеоусловиях, глубины протаивания практически совпадают (рис. 13).

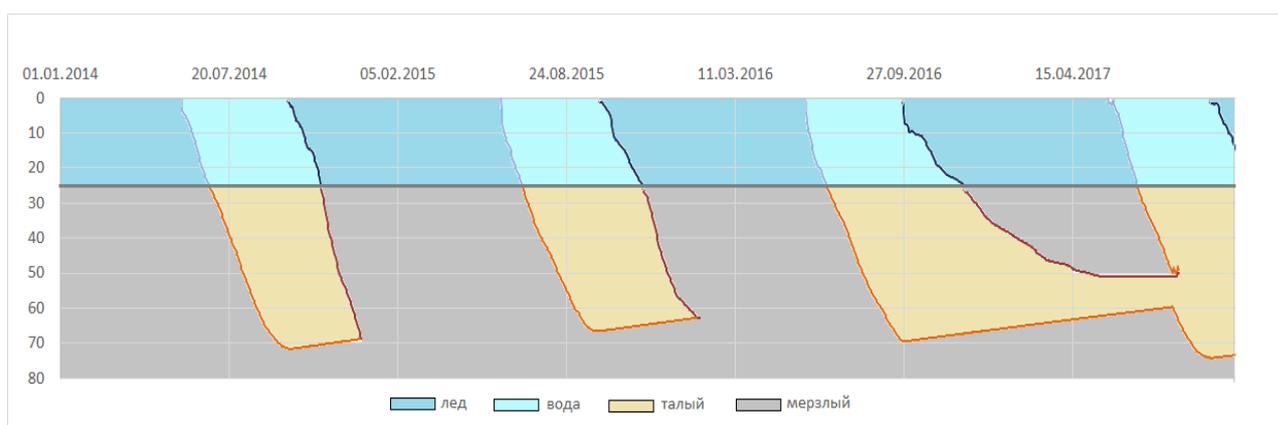


Рисунок 11 – Глубина протаивания грунта. Озерно-болотный ландшафт

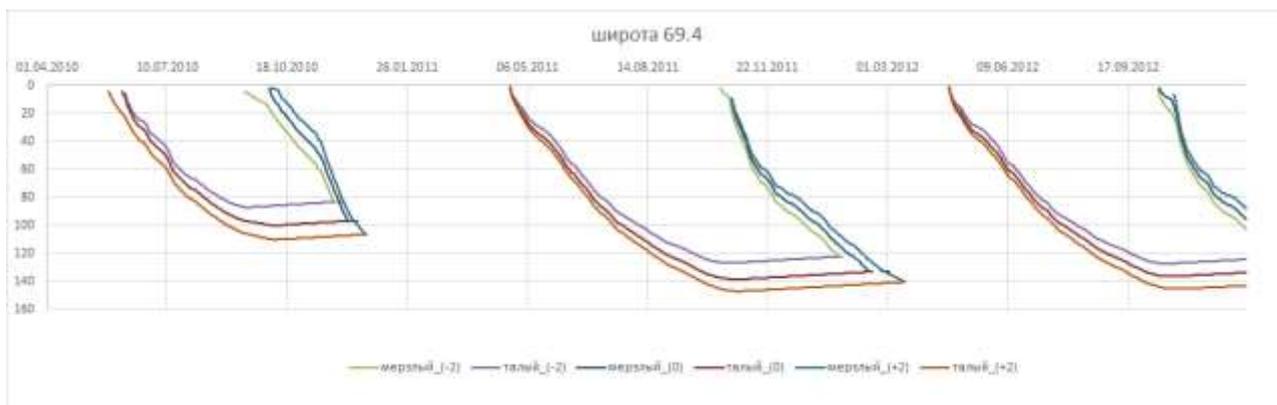


Рисунок 12 – Влияние температуры воздуха на глубину протаивания грунта. Суша. Сценарии потепления / похолодания климата

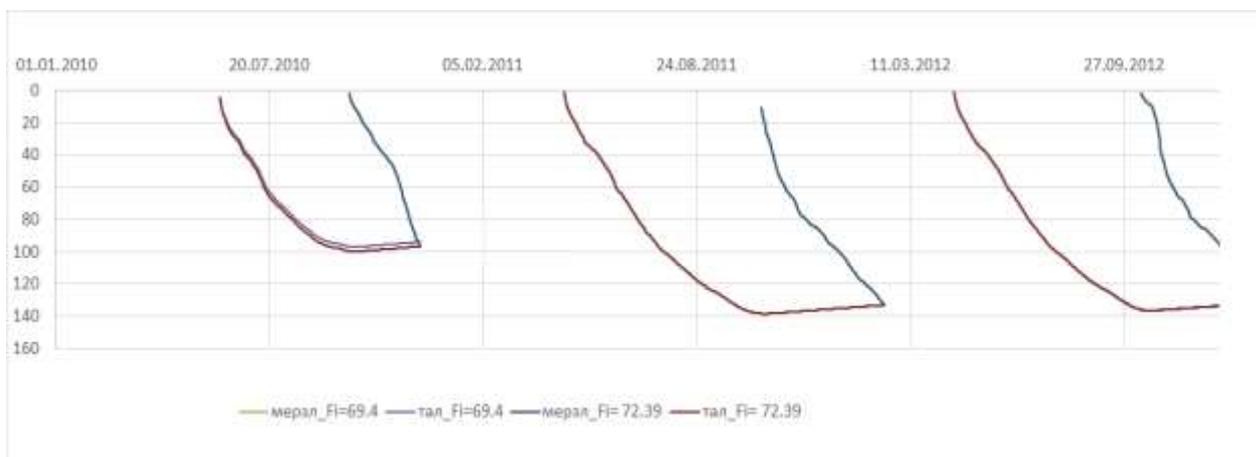


Рисунок 13 – Влияние широты местности на глубину протаивания грунта

3.2 Объектом исследований является стратифицированное Красноярское водохранилище. Для численного исследования гидротермического режима Красноярского водо-хранилища применяется схема ложа водохранилища в виде районов с непрерывным изменением глубины и скачкообразным изменением ширины. Рассматривается численный алгоритм для исследования двумерных в вертикальной плоскости стратифицированных течений в проточных водоемах с учетом силы Кориолиса.

Для мелких водоемов ($H < D$, D – глубина трения) влиянием параметра Кориолиса можно пренебречь. Для глубоких водоемов ($H > D$) предложен способ учета силы Кориолиса. На первом этапе определяется горизонтальная компонента скорости течения без учета напряжения ветра по двухмерной в вертикальной плоскости модели. На втором этапе по приближению Экмана вычисляются горизонтальные составляющие скоростей ветровых течений. На третьем этапе сумма найденных составляющих определяет окончательные значения скоростей.

Проведены численные эксперименты по определению температурного режима Красноярского водохранилища в летний период по упрощенной двумерной в вертикальной плоскости модели с учетом силы Кориолиса. [Belolipetskii V. M., Genova S.N. Simplified mathematical model of the hydrothermal regime of the Krasnoyarsk reservoir. Thermal science: Year 2019, Vol. 23, Suppl. 2, pp. 455-462]. Использовались подробные метеоданные для соответствующего периода. На рис. 14 показаны рассчитанные температурные профили (сплошные линии) в створах Красноярского водохранилища по метеоданным 1977г (на 10 июля). Начальные условия – натурные данные (25 мая 1977 г.). Результаты расчетов согласуются с натурными измерениями (точки). Разработанная компьютерная модель позволяет прогнозировать гидротермический режим проточного водохранилища для различных сценариев изменений погодных условий.

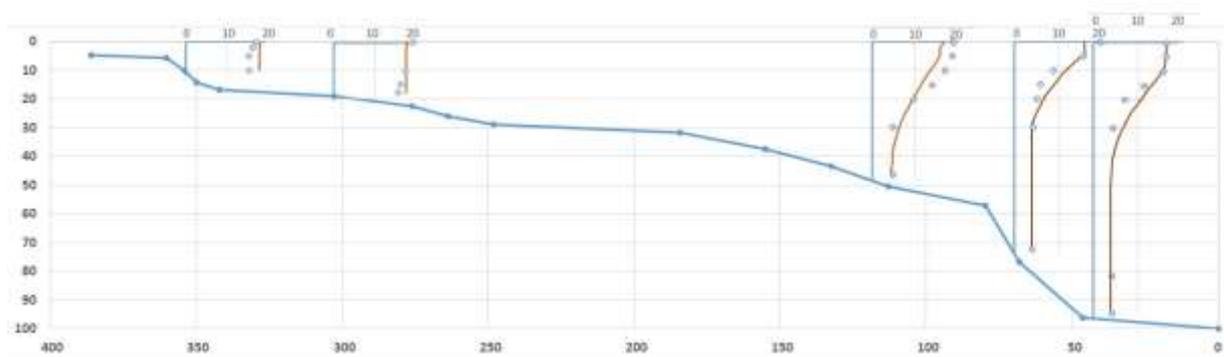


Рисунок 14 – Вертикальные распределения температуры воды в створах Красноярского водохранилища

Упрощенные математические модели тепло – массообмена применялись в определении динамики вертикальной термохалинной структуры соленого озера Учум, при построении модели нагрева материалов в печах для решения задач автоматизации.

3.3 Полученные для озера Шира данные длительных измерений температуры вдоль всего столба жидкости обрабатывались с использованием метода независимых компонент. Измерения температуры проводились в течение восьми дней 31.05.15-07.06.15 в точке глубиной 14 м с промежутком 0.5 минуты на 28 горизонтах по глубине. Картина течения на трех горизонтах представлена на рис. 15. Анализ корреляционной матрицы позволяет ограничить количество независимых компонент до 7 (рис. 16) и на основе их анализа выделить в середине периода измерений резкие колебания, гидрофизический смысл которых определяется прохождением внутренней волны (рис. 17).

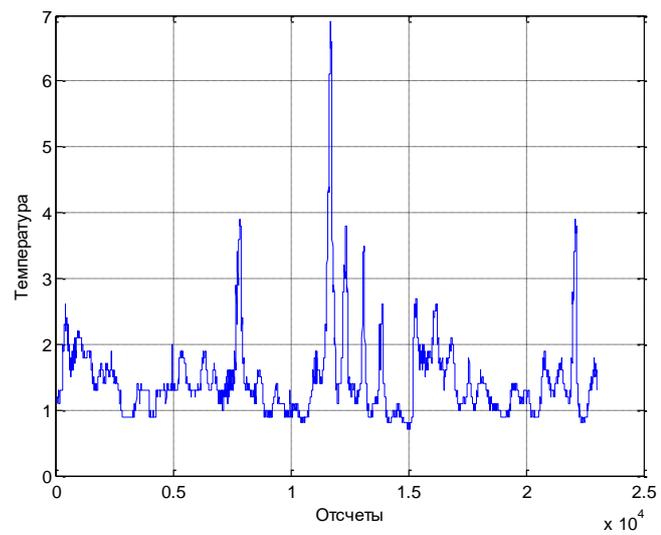
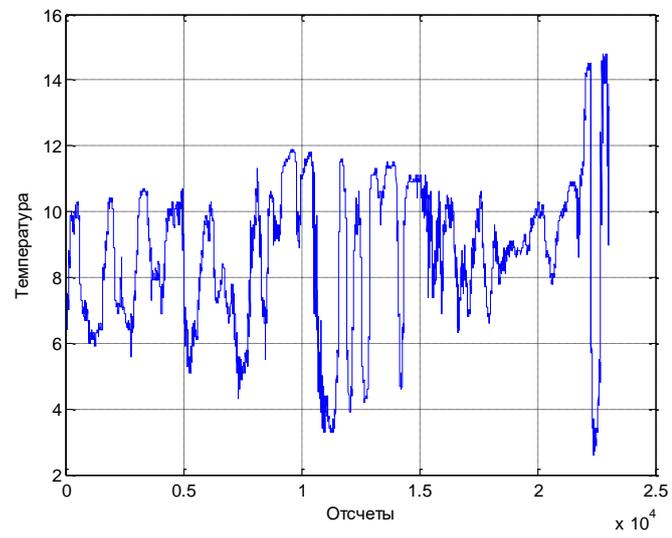
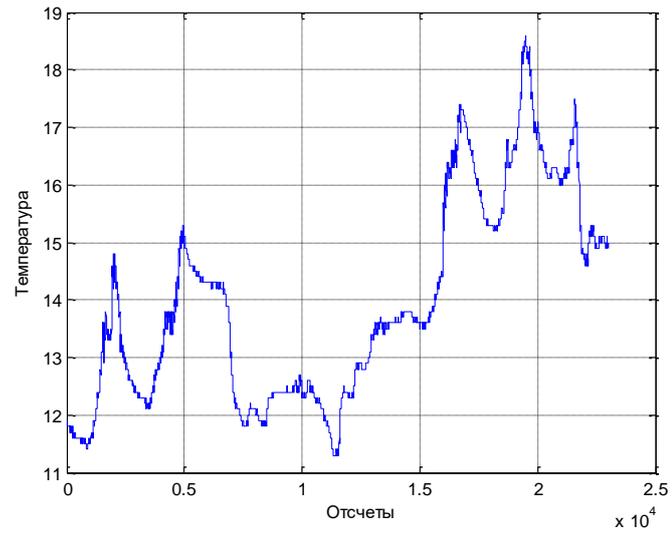


Рисунок 15 – Измерения температуры на горизонтах 0,3 м, 7,8 м, 13 м. По горизонтальной оси отложены отсчеты

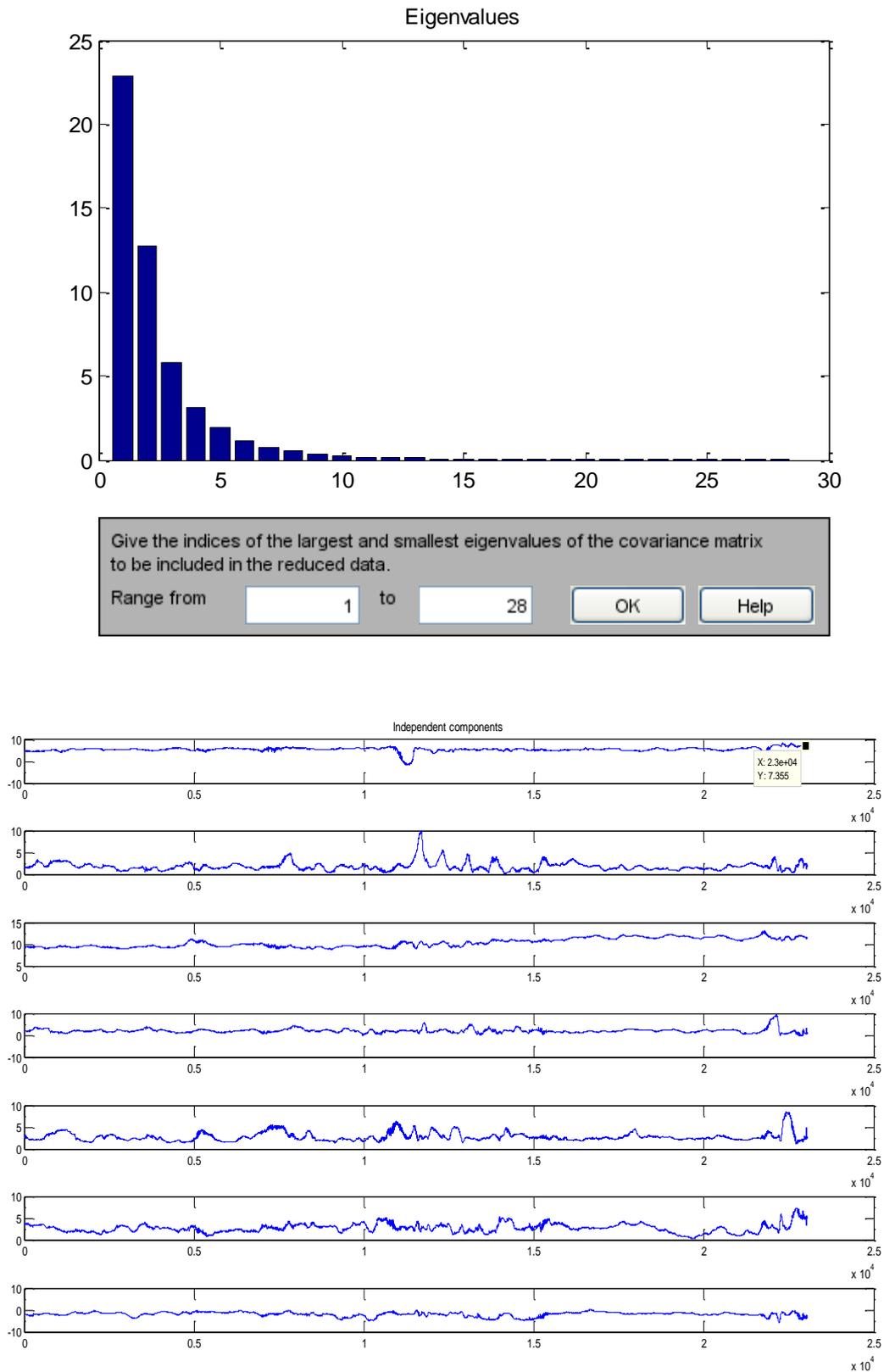


Рисунок 16 – Сверху собственные значения ковариационной матрицы; Снизу семь независимых компонент (по горизонтальной оси отложены отсчеты)

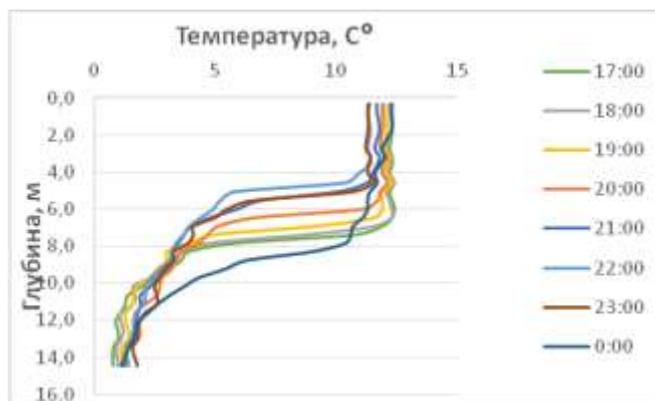


Рисунок 17 – График температуры на 3 июня

Обработаны натурные измерения с помощью квазилагранжевого дрейфера (эксперимент совместно с сотрудником Института Биофизики СО РАН, к.б.н. Толмеевым А.П.).

На рис. 18 сплошной белой линией обозначена траектория движения дрейфера во время эксперимента, точками на линии обозначены моменты времени, когда ветер по метео данным поселка Шира менял направление. Начало эксперимента 12.07.18 в 7:22, продолжительность – 23 часа. Средняя поверхностная скорость движения дрейфера 9 см/с.

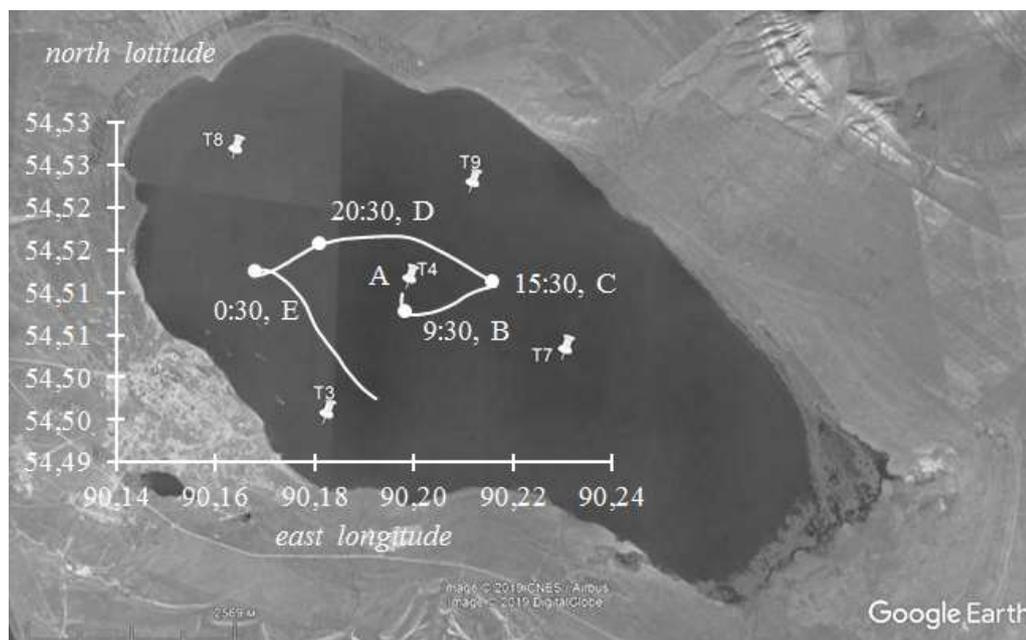


Рисунок 18 – Данные движения дрейфера

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За период выполнения проекта получены следующие результаты

1. Дан анализ задачи о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в канале с учётом энергии межфазного теплообмена на общей границе раздела. Стационарная задача о ползущем течении, когда малы термокапиллярные и термоконцентрационные числа Марангони, исследована на устойчивость. Показано, что длинные волны монотонно затухают со временем.

2. Исследованы однонаправленные движения жидкости в плоском канале, описываемые формулами $\mathbf{u}=(U(y,t),0,0)$, $\theta=-A(y,t)x+T(y,t)$, $p=-B(y,t)x+P(y,t)$ (для двух жидкостей нужно поставить индекс $j=1,2$). Данный вид решения применяется для анализа движения одной жидкости и двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела в канале с твёрдыми непроницаемыми стенками в модели Обербека – Буссинеска. При этом на твёрдых стенках задается нестационарный градиент температуры, что позволяет управлять движением жидкостей в канале. Возникающие начально-краевые задачи для функций $U(y,t)$, $A(y,t)$ являются обратными, поскольку содержат неизвестный градиент давления. По известным функциям $U(y,t)$, $A(y,t)$ определяется $T(y,t)$ из решения классической задачи, а $B(y,t)$, $P(y,t)$ - с помощью квадратур. Для этих задач получены априорные оценки решения в равномерной метрике и указаны условия на входные данные, когда решения с ростом времени выходят на стационарный режим. Численными методами прослежена эволюция скоростей и температур для конкретных жидкостей и толщины канала для различных заданий градиентов $A_j(t)$ на твёрдых стенках.

3. Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твёрдыми стенками на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E . Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряжённая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения. В случае, когда отсутствует влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоёв ($E=0$), найдено два решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа

Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные структуры течения и проведён анализ влияния безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений.

4. Решена задача об осесимметричном стационарном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном цилиндре с твёрдой боковой стенкой. Жидкости образуют общую подвижную недеформируемую цилиндрическую поверхность раздела. Массовые силы отсутствуют. Одна из основных особенностей задачи в том, что учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. При этом температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, который согласуется с полем скоростей типа Хименца. С математической точки зрения эта начально-краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давления вдоль оси цилиндра. Задача решается численно, с помощью модифицированного метода Галёркина. В итоге было показано, что при увеличении значения температурного коэффициента, выражающего квадратичную зависимость температуры жидкости на твёрдой стенке от осевой координаты, жидкости начинают течь более интенсивно. Результаты могут быть использованы при движении жидких сред в нанотрубках, при этом жидкость вблизи стенки цилиндра играет роль смазки.

5. Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой внешней стенкой и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Граница раздела обладает поверхностным натяжением, которое линейно зависит от температуры. Учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. С математической точки зрения, возникающая начально-краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль оси цилиндра. Для решения задачи применяется модифицированный метод Галёркина. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Построены характерные структуры течения. Исследовано влияние числа Марангони и параметра, характеризующего изменение межфазной энергии, на интенсивность возникающих течений.

6. Численно исследовано влияние энергетических характеристик границы раздела на структуру возмущений течений жидкой плёнки, увлекаемой спутным ламинарным газовым потоком в миниканале с приложенной внешней тепловой нагрузкой. Показано, что изменение внутренней энергии межфазной границы приводит к изменению топологической структуры и гидродинамических характеристик возмущённых течений и

перестройке теплового поля. При потере устойчивости в плёнке возникают продольные термокапиллярные структуры, поперечный размер которых зависит от величины дефекта тепла, характеризующего энергию, затрачиваемую термокапиллярными силами на деформацию границы раздела. Указанный эффект может быть значителен в системах, использующих микроплёнки, поскольку критические деформации могут приводить к формированию «сухих» пятен. Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий в системах термического контроля и в технологиях термического нанесения или осушения покрытий.

7. Введено понятие симметрии идеала для произвольных коммутативных дифференциальных колец. Оно является обобщением инфинитезимальных симметрий уравнений с частными производными. Получен удобный критерий того, что дифференцирование кольца является симметрией.

8. Найдены новые решения классического уравнения Буссинеска, описывающего волны на мелкой воде. Данные решения описывают волновые пакеты, волны на солитоне, «танцующие» солитоны, а также взаимодействие этих волн между собой. Следует отметить, что данные решения выражаются через элементарные функции. Указан нелинейный принцип суперпозиции решений.

9. Произведена редукция модифицированной k - ω модели Вилкокса в приближении дальнего следа к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Численными методами найдено решение соответствующей краевой задачи, которое описывает промежуточную асимптотику течения в дальнем турбулентном следе за движущимся телом. Произведено сравнение с экспериментальными данными. Совпадение с экспериментами на качественном уровне хорошее, количественные различия не превышают 10 – 15 процентов.

10. Для задачи о движении между двумя твердыми стенками, на которых заданы условия прилипания, линейное распределение температуры и отсутствие потока вещества получены априорные оценки на решение, показывающие, что если градиент температуры на твердых стенках и его производные ограничены, а функция, задающая расход жидкости, убывает при $t \rightarrow \infty$, тогда скорость и искомый градиент давления являются ограниченными функциями и сходятся к соответствующим стационарным распределениям при с ростом времени. Решение задачи получено в виде рядов, отмечено, что необходимым условием сходимости данного решения к построенному стационарному решению является выполнение интегрального равенства, связывающего начальный градиент концентрации со стационарным значением градиента температуры на стенках и расходом.

11. На основе метода независимых компонент разработана процедура, позволяющая по натурным наблюдениям температуры быстро выделять периоды прохождения внутренних волн в озере Шира. Анализ данных движения дрефтера показал, что во время эксперимента ветер, построенный по данным трех ближайших метеостанций (Ужур, Лебяжье, Уйбат) провоцировал циклонический вихрь, что полностью соответствует траектории движения дрефтера.

12. Результаты расчетов динамики вертикальной структуры вечной мерзлоты показали, что предложенная одномерная модель позволяет описать различные режимы сезонного промерзания/протаивания грунта в зоне вечной мерзлоты, в том числе, образование талика (талые слои среди многолетней мерзлоты).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Андреев В.К., Ефимова М.В. Свойства решений задачи совместного медленного движения жидкости и бинарной смеси в плоском канале // СибЖИМ. – 2018. – Т. XXI, № 3. – С. 3-17. DOI: 10.17377/sibjim.2018.21.301.
2. Belolipetskii V.M., Genova S.N. One-dimensional vertical model of permafrost dynamics // Труды конференции в журнале IOP Conference Series: Earth and Environment Science. – 2018. DOI: 10.1088/1755-1315/193/1/012005.
3. Iakubailik T., Kompaniets L. Flow analysis in closed oval-shaped salt lake based on numerical modeling and field observations in summer // SGEM-2018 Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 18, Iss. 3. – P. 327-334. DOI: 10.5593/sgem2018/3.1/S12.043.
4. Andreev V.K. Stability of Nonlinear Oscillations of a Spherical Layer of an Ideal Fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2019. – Vol. 60, № 2. – P. 303-313. DOI: 10.1134/S0021894419020111.
5. Черемных (Лемешкова) Е.Н. Априорные оценки решения задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском канале // Математические заметки. – 2018. – Т. 103, № 1. – С. 147-157. DOI: 10.4213/mzm11426.
6. Shchepetkin A.F., Volodko O.S. A method for reconstructing bottom topography for an enclosed basin from scattered, sparse measurement data // Океанические исследования. 2018. – Т. 46. № 3, – С. 67-84. DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2018.46(3).5.
7. Шмидт А.В. Автомодельные решения $k-\omega$ модели дальнего турбулентного следа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 1. DOI: 10.1134/S0568528119010134.
8. Schmidt A.V. Self-Similar Solutions of the $k-\omega$ Model for a Turbulent Far Wake // Fluid Dynamics. – 2019. – V. 54. №2. – P. 239-243. DOI: 10.1134/S0015462819010130.
9. Andreev V. K., Magdenko E. P. Two-dimensional stationary flow of two immiscible fluids in a cylinder taking into account the internal energy of the interface // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1268. DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012045.
10. Andreev V. K., Magdenko E. P. A priori estimates of the conjugate problem describing an axisymmetric thermocapillary motion for small Marangoni number // Journal of SFU. Mathematics and physics. – 2019. – V.12, No. 4. – P. 483-495. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-4-483-495.

11. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Thermocapillary Convection with Phase Transition in the 3D Channel in a Weak Gravity Field // *Microgravity Science and Technology*. – 2019. – V. 31 (4). – P. 357-376. DOI: 10.1007/s12217-019-9691-4.
12. Bekezhanova V.B., Ovcharova A.S. Convection regimes induced by local boundary heating in a liquid-gas system // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2019. – Vol. 873. – P. 441-458. DOI: 10.1017/jfm.2019.433.
13. Степанова И. В. Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор) // *Вестник Омского гос. ун-та*. – 2019. – Т. 24, № 2. – С. 51-65. DOI: 10.25513/1812-3996.2019.24(2).51-65.
14. Andreev V.K., Stepanova I.V. On the Conditions for Existence of Unidirectional Motions of Binary Mixtures in the Oberbeck-Boussinesq Model // *J. Appl. Indust. Math.* – 2019. – Vol. 13. № 2. – P. 185-193. DOI: 10.1134/S1990478919020017.
15. Stepanova I. V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // *Applied Mathematics and Computation*. – 2019. – Vol. 343. – P. 57-66. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036.
16. Burakov D.A., Karepova V.D., Shan'ko Yu.V. Model of flow propagation in a river channel taking into account disparity in the “water stage vs water volume” curves corresponding to the rise and recession of a flood wave // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2019. – Vol. 232. – P. 012002. DOI: 10.1088/1755-1315/232/1/012002
17. Капцов О.В., Капцов Д.О. Волны и структуры уравнения Буссинеска // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2019. – Т. 60, № 2. – С. 220-225. DOI: 10.15372/PMTF20190218
18. Kartsov O.V. Symmetries of Differential Ideals and Differential Equations // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2019. – Vol. 12, No 2. – P. 185-190. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-12-2-185-190
19. Gavrichkov V.A., Shan'ko Yu., Zamkova, N.G., Bianconi A. Is There Any Hidden Symmetry in the Stripe Structure of Perovskite High-Temperature Superconductors? // *The Journal of Physical Chemistry Letters*. – 2019. – Vol. 10. – P. 1840-1844. DOI: 10.1021/acs.jpcllett.9b00513.
20. Belolipetskii V.M., Genova S.N., Degermendzhy A.G., Zykov V.V., Rogozin D.Yu. One-dimensional model for studying seasonal changes of vertical structure of salt lake Uchum // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2019. – Vol. 12 (1). P. 100-108. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-1-100-108.

21. Belolipetskii, V. M., Genova S.N. Simplified mathematical model of the hydrothermal regime of the Krasnoyarsk reservoir // Thermal science. – 2019. – Vol. 23, Sup. 2. – P. 455-462. DOI: 10.2298/TSCI19S2455B.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2020 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
1 Численный анализ задач о двухслойных течениях в замкнутых областях и характеристик устойчивости.	1 Карты режимов течений и карты устойчивости конкретных жидкостей в замкнутых областях. Исследование влияния гравитации и толщины жидкого слоя на структуру течений и характер деформаций границы раздела в двухслойной системе при локальном термическом воздействии.
2 Теоретико-групповой анализ полуэмпирических моделей закрученной турбулентной струи; построение точных решений нелинейных уравнений теплопереноса и уравнений мелкой воды.	2 Автомодельные решения задачи о течениях закрученной турбулентной струи; физически содержательные точные решения уравнений теплопереноса и мелкой воды с учетом дисперсии.
3 Применение одномерной в вертикальном направлении математической модели для исследования динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных дистанционных измерений температуры поверхностного слоя земли. Апробация 3-d численной модели с высоким горизонтальным разрешением для изучения течения в озере Шира. Применение методов распараллеливания при проведении длительных расчетов с реальным ветром и тепловыми потоками на поверхности.	3 Создание комплекса численных алгоритмов и программ на ЭВМ для исследования глубины оттаивания в районах вечной мерзлоты с учетом дистанционных измерений