

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «КРАСНОЯРСКИЙ
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958

Рег. № НИОКТР АААА-А18-
118011890025-2

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Врио директора ФИЦ КНЦ СО РАН,
д.с.-х.н.

_____ Шпедт А.А.

«27» января 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИХ
ОБЪЕКТОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ
(заключительный)

Направление фундаментальных исследований:
III.22 Механика жидкости, газа и плазмы, многофазных и неидеальных сред,
механика горения, детонации и взрыва
(№ 0356-2019-0012)

Руководитель проекта

главный научный сотрудник

д.ф.-м.н., профессор

_____ В.К. Андреев

Красноярск, 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В.К. Андреев (Раздел 1, 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
зав. отд., д.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
Исполнители: г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.М. Белолипецкий (Раздел 3)
	<i>(подпись, дата)</i>	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова (Раздел 3)
	<i>(подпись, дата)</i>	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец (Раздел 3)
	<i>(подпись, дата)</i>	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е.Н. Лемешкова (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е.П. Магденко (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	А.В. Шмидт (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	

н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

Т.В. Якубайлик
(Раздел 3)

м.н.с., к.ф.-м.н.

(подпись, дата)

О.С. Володько
(Раздел 3)

инженер

(подпись, дата)

Д.А. Краснова
(Раздел 1)

нормоконтроль

(подпись, дата)

А.В. Вяткин

Отчёт 60 с., 38 рис., 2 табл., 3 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФфуЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

Неизотермические течения жидких сред с поверхностями раздела широко используются в различных технологиях химической, энергетической и электронной промышленности, в теплофизике и материаловедении. Изучение динамики конвективных течений, возникающих в разнообразных системах, представляет собой комплекс задач, требующий применения различных методов математического и численного моделирования.

В результате исследований за отчётный период построены на основе метода симметрий и развитой техники изучения совместности дифференциальных систем новые точные решения уравнений жидких сред (конвекции, термодиффузии, закрученного следа); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных и термоконцентрационных сил, эффектов испарения; разработаны комплексы программ расчётов конвективных течений с поверхностями раздела, стратифицированных течений в солёных озёрах; одномерных моделей использованных для изучения сезонного протаивания вечной мерзлоты на суше и в болотно-озерных ландшафтах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано. Опубликовано 21 работа за 2020 год в журналах входящих в системы базы данных WoS и SCOPUS (за весь отчетный период – 87 работы).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Исследование течений и устойчивости сопряжённых задач механики жидких сред.....	7
2 Теоретико-групповой анализ уравнений новых моделей гидродинамики с усложнёнными свойствами	28
3 Применение математических моделей при изучении природных гидрофизических процессов	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	52
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	57
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	59
ПРИЛОЖЕНИЕ В	60

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом гидродинамики. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах, электрофорез и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях. Кроме того, поверхности раздела возникают и при изучении гидрофизики озёр, водохранилищ и структуры вечной мерзлоты в условиях меняющегося климата.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

В связи с вышесказанным, в отчетный период проводились исследования динамики сред с поверхностями раздела, причём учитывалось влияние тепло- и массопереноса, турбулентности, гидрофизических процессов, протаивания вечной мерзлоты.

Настоящий отчет является итоговым по теме: «Комплексный анализ гидродинамических аспектов функционирования природных систем и технических объектов в экстремальных условиях».

Блок 1. Исследование течений и устойчивости сопряжённых задач механики жидких сред

1. Конвективные течения в двухслойных средах с учётом испарения

В рамках модели Обербека – Буссинеска изучен ряд задач о совместном течении испаряющейся жидкости и парогазовой смеси в миниканале с твёрдыми стенками. Подобные течения используются в системах жидкостного охлаждения микро- и миниэлектронных устройств. Предполагается, что (i) жидкие среды несжимаемы, (ii) плотности, коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения, температуропроводности и теплопроводности обеих сред постоянны, (iii) вдоль границы раздела жидкость – газ действуют поверхностные силы, при этом поверхностное натяжение σ линейно зависит от температуры. Среда контактирует вдоль термокапиллярной границы раздела Γ , которая остаётся недеформируемой в процессе движения и допускает диффузионный перенос массы за счёт испарения/конденсации. При моделировании течения в газовой фазе дополнительно учитываются эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии (эффекты Дюфура и Соре соответственно). Пар считается пассивной примесью, диффузия пара в газе и перенос тепла описываются следующими уравнениями

$$\mathbf{v}_g \cdot \nabla C = \frac{1}{Pe} (\Delta C + \alpha \Delta T_g), \quad \mathbf{v}_g \cdot \nabla T_g = \frac{\chi}{Pr Re} (\Delta T_g + \delta \Delta C).$$

Здесь $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g, w_g)$ – вектор скорости парогазовой смеси, C – концентрация пара, Pe – диффузионное число Пекле, α – безразмерный параметр Соре, T_g – температура парогазовой смеси, χ – отношение коэффициентов температуропроводности $\chi = \chi_g / \chi_l$, индексы l и g обозначают величины, характеризующие жидкость и газ, соответственно, Pr – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, δ – безразмерный параметр Дюфура.

На границе раздела Γ справедливы обычные уравнения равенства скоростей и температуры, динамическое и кинематическое условия (конвективный поток массы в последнем не учитывается), а в условии баланса энергии учитывается диффузионный перенос массы через поверхность раздела за счёт испарения:

$$T_{lx} - k T_{gx} - \delta k C_x = -\lambda M, \quad M = -(C_x + \alpha T_{gx}), \quad (1)$$

где M – массовая скорость испарения, k – отношение коэффициентов теплопроводности $k = k_g / k_l$. На границах канала заданы условия прилипания, для температуры могут быть заданы условия, определяющие тепловую нагрузку, распределённую по линейному относительно продольной координаты закону с градиентом A , либо условия

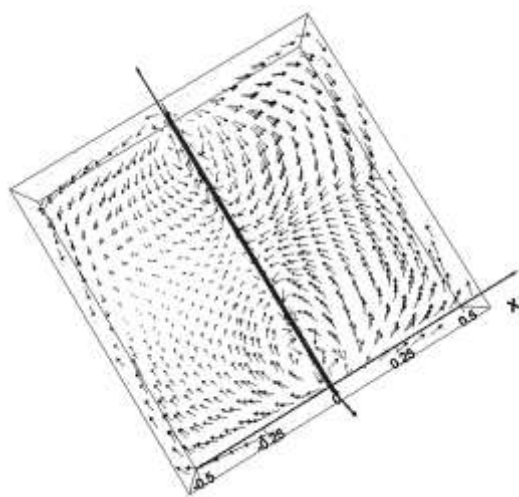
теплоизоляции, для концентрации пара – отсутствие потока пара или условие полной абсорбции пара

$$\frac{\partial C}{\partial n} + \alpha \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{или} \quad C = 0. \quad (2)$$

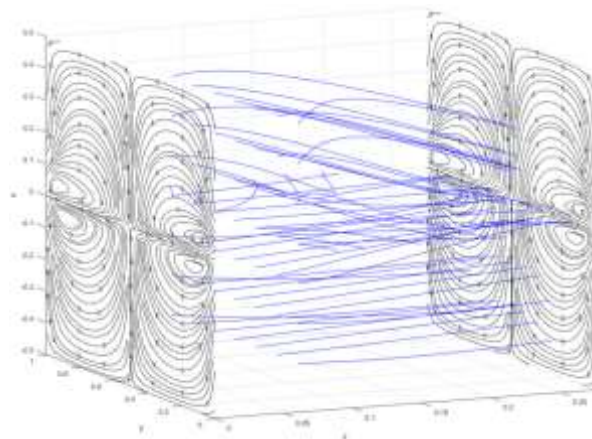
Для исследования характера и степени влияния различных факторов (интенсивности гравитационного воздействия, геометрии системы, термодиффузионных эффектов и др.) на характеристики установившихся конвективных режимов используются двумерный и трёхмерный аналоги решения Остроумова – Бириха, имеющего групповое происхождение. Решение содержит следующие искомые функции: компоненты вектора скорости, зависящие только от поперечных координат ($\mathbf{u} = (u(x,y), v(x,y), w(x,y))$) в трёхмерном случае, $\mathbf{u} = (0, 0, w(x))$ – в двумерном) для каждой из сред; концентрацию пара в газовой фазе C , температуры T и давления p обеих рабочих сред, линейно зависящие от продольной координаты (z) и содержащие аддитивные компоненты, которые также зависят только от поперечных координат. Форма решения не предполагает осевой симметрии. В двумерном случае получены явные аналитические представления всех искомых функций. Исследование режимов трёхмерных течений в условиях фазового перехода и зависимости их характеристик от параметров задачи требует привлечения как аналитических, так численных методов. На первом этапе аналитически производилась редукция исходной трёхмерной задачи к цепочке двумерных задач, записанных в терминах «функция тока – вихрь». На втором этапе полученные двумерные задачи решались численно с помощью вычислительного алгоритма, разработанного и реализованного в форме авторского кода на языке Фортран. Алгоритм предполагает реализацию метода переменных направлений, процедур сквозного счёта и итерационных процедур с контролем точности с помощью критериев сходимости. Разработаны средства динамической и статической визуализации основных характеристик, позволяющие продемонстрировать траектории движения жидких частиц, поперечные сечения трубок тока в жидких объёмах, а также поля скорости, температур в системе и концентрации пара в верхнем слое (примеры распределений представлены на рисунках 1, 2). Для этого на основе средств встроенного инструментария среды MatLab также был разработан и реализован авторский код. Для сравнения и качественной оценки характеристик режимов вычислялось значение массовой скорости испарения M (см. (1)). Положительные значения M соответствуют переносу массы через границу раздела за счёт испарения, отрицательные – за счёт конденсации. Результаты, полученные на основе точных решений, сравнивались с известными экспериментальными данными.

Установлено, что трёхмерное решение позволяет описать формирование продольных термокапиллярных структур, наблюдаемых в физических экспериментах, и ансамблей

конвективных ячеек, являющихся элементами пространственно-периодической структуры течений. Решение предсказывает режимы валиковой конвекции с различной структурой теплового поля. Показано, что поле температуры полностью определяет характеристики паросодержания в газе. На основе анализа топологической и тепловой картины режимов испарительной конвекции предложена классификация типов трёхмерных течений, подобная классификации Наполитано для двумерного случая без учёта фазовых переходов. В трёхмерном случае можно выделить чисто термокапиллярные и смешанные типы течений. Первый класс течений реализуется только в форме продольных термокапиллярных валов (рисунок 1 б) и сопровождается возникновением тепловых и концентрационных валиков (рисунок 2). Второй класс течений включает режимы, которые формируются при сосуществовании и конкуренции конвективного и термокапиллярного механизмов. При этом возникают так называемые валы с дефектами, к которым относятся деформированные валы, гидродинамические структуры нерегулярной формы (например, угловые вихри) и вихревые структуры с несколькими ядрами. В таких режимах возникают сложные ячеистые движения с различной симметрией и появляются тепловые и концентрационные структуры сложной формы. По-видимому, класс смешанных течений допускает расширение, т.е. выделение подклассов течений в зависимости от типа планформ (формы трубок тока в поперечных сечениях). Дополнительно впервые вводится классификация типов течений, связанная со структурой теплового поля. Для рассмотренных конфигураций были выделены тепловые валы и структуры типа «факел». Первый класс структур включает три подкласса: центральные одиночные валы, множественные валики и горячая или холодная поверхностная плёнка. Тепловые структуры комбинированной формы, например, тепловые «рога» с Т-образной холодной полосой, валы с дефектами, факелообразные структуры в газовой фазе составляют второй класс. Предсказываемые точным решением режимы с такими тепловыми структурами как температурные валы, горячая и холодная поверхностная «плёнка» подтверждены экспериментально. Кроме того, решение хорошо описывает зависимость массового расхода испарения от вызванных поверхностным натяжением изменений межфазной температуры и скорости (для разных толщин жидкого слоя, величин ускорения силы тяжести и продольного градиента A), что также было установлено экспериментально.

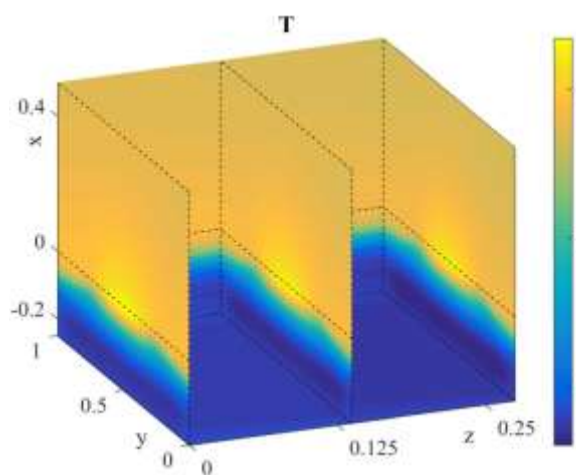


(a)

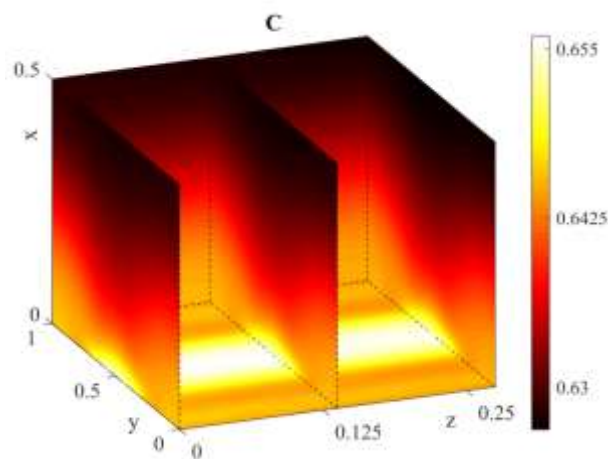


(б)

Рисунок 1 – Структура поля скорости в системе сред этанол – азот с толщиной жидкого и газового слоя 5 мм в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, $A = 100 \text{ К/м}$ при условии полной абсорбции пара на границах канала: (а) – векторное поле, вид сверху со стороны продольной оси течения, (б) – проекции трубок тока на поперечные сечения и траектории частиц



(a)



(б)

Рисунок 2 – Структура полей температуры в системе (а) и концентрации пара в газе (б) в системе сред HFE-7100 – азот с толщиной жидкого слоя 2.5 мм, газового слоя – 5мм при нормальной гравитации $g = g_0 \text{ м/с}^2$, $A = 300 \text{ К/м}$ при условии отсутствия потока пара на теплоизолированных стенках

2. Однонаправленная стационарная конвекция в слоях и её устойчивость

В рамках модели испарительной конвекции на основе двумерного точного решения, исследовано влияние прямого и обратного термодиффузионных эффектов на характеристики совместного течения испаряющейся жидкости и парогазовой смеси. Проанализировано изменение параметров паросодержания и массовой скорости испарения, пороговые характеристики устойчивости двухслойного течения в зависимости от учёта или игнорирования эффектов Соре и Дюфура. Проведена оценка степени влияния эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности (эффектов Соре и Дюфура) на параметры режимов конвекции. Исследовано влияние термофореза через граничный

режим для концентрации пара. Обнаружено, что при равной тепловой нагрузке на границах системы влияние термодиффузионного эффекта через граничный режим для концентрации пара может приводить к значительным вариациям паросодержания (исследовано на примере двухслойных систем с двумя разными типами жидкостей: этанола и HFE-7100). При различной тепловой нагрузке на нижней и верхней стенках канала влияние эффекта Соре существенно возрастает, что приводит к значительным отклонениям концентрации пара вблизи верхней границы от соответствующих значений, вычисленных без учёта эффекта Соре, изменениям температуры жидкости и парогазовой смеси вблизи границы раздела и качественной смене режимов фазового перехода. Чувствительность системы к влиянию термодиффузионного эффекта определяется теплофизическими свойствами жидкого теплоносителя свойствами. На примере системы HFE-7100 – азот исследована линейная устойчивость двухслойных течений относительно малых нестационарных плоских нормальных возмущений для случая равных значений продольных градиентов температуры. Проведено сравнение спектров возмущений и пороговых тепловых нагрузок, приводящих к потере устойчивости, полученных с учётом и без учёта эффекта Соре. Показано, что термодиффузионный эффект имеет слабое дестабилизирующее влияние (приводит к уменьшению области устойчивости) наиболее заметное в случае коротковолновых возмущений (нейтральные кривые для различных геометрических конфигураций представлены на рис. 3), но при этом не влияет на тип и структуру наиболее опасных возмущений.

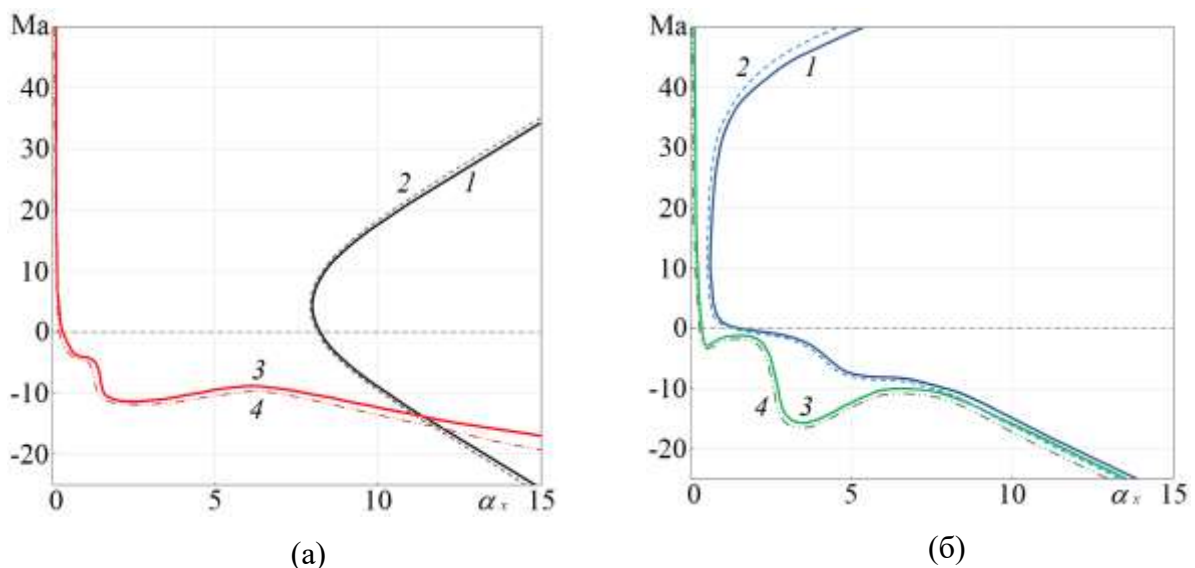


Рисунок 3 – Нейтральные кривые для системы HFE-7100 – азот с толщиной газового слоя 5 мм без учёта эффекта Соре ($\alpha = 0$, сплошные кривые 1, 3) и с учётом эффекта Соре ($\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$, штриховые и штрихпунктирные кривые 2, 4): (а) – толщина жидкого слоя 2 мм (кривые 1, 2) и 6 мм (кривые 3, 4); (б) – толщина жидкого слоя 4 мм (кривые 1, 2) и 5 мм (кривые 3, 4)

3. Влияние энергетических характеристик границы раздела на устойчивость однонаправленного течения в двухфазной системе

На основе решения Остроумова – Бириха уравнений тепломассопереноса исследованы характеристики течения тонкой жидкой плёнки, увлекаемой спутным газовым потоком, в миниканале без учёта испарения в рамках двумерной постановки. Для описания движения и переноса тепла в жидком и газовом слое используются уравнения Навье – Стокса и теплопроводности. На внешних границах канала поддерживается линейное по продольной координате распределение температуры с градиентом A . На межфазной границе вместо условия теплового баланса (1) используется условие, учитывающее влияние изменений внутренней энергии поверхности раздела, которыми сопровождается локальное изменение её площади за счёт действия напряжений Марангони:

$$\left[k \frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_{\Gamma} = \sigma_T \theta \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}. \quad (3)$$

Здесь $\left[k \frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_{\Gamma} = k_g \frac{\partial \theta_g}{\partial n} - k_l \frac{\partial \theta_l}{\partial n}$ – скачок теплового потока на поверхности раздела Γ , σ_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения, ∇_{Γ} – поверхностный градиент. Правая часть полного энергетического условия (3) характеризует расход тепла на деформацию границы термокапиллярными силами.

Используемое точное стационарное решение Остроумова – Бириха интерпретируется как решение, описывающее совместное течение тонкой жидкой плёнки и ламинарного газового потока на рабочем участке длинного миниканала с приложенной на внешних границах тепловой нагрузкой. При этом основное состояние характеризуется продольным температурным градиентом A , который в силу вида решения совпадает на внешних границах канала и поверхности раздела. На примере системы сред FC-72 – азот исследованы режимы течений, возникающие в канале высоты 1.2 мм, при начальной толщине плёнки 100 – 400 мкм. Во всём рассмотренном диапазоне толщин решение описывает чисто термокапиллярные режимы, которые характеризуются формированием возвратного течения в жидком слое.

В рамках линейной теории устойчивости изучено влияние энергетических свойств границы раздела жидкость – газ и толщины жидкой плёнки на структуру возмущённого течения. Рассмотрены малые нестационарные пространственные возмущения $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (U, V, W)$, $P(t, x, y, z)$, $T(t, x, y, z)$ скорости, давления и температуры, соответственно. Сформулирована и численно решена начально-краевая задача для функций возмущений. В качестве начальных данных использовались величины, составляющие 5% от осреднённых значений соответствующих характеристик

основного течения. Для анализа характера и степени влияния изменений внутренней энергии межфазной границы проводилось сравнение распределений скорости и температуры, характеризующих возмущённое состояние, полученных в рамках классической постановки сопряжённой задачи, когда правая часть в условии (3) равна нулю (*задача 1*), и задачи с полным условием теплового баланса вида (3) (*задача 2*). Расчёты выполнялись для случая нормальной гравитации, при этом рассматривались системы с начальной толщиной плёнки 100 и 400 мкм. Установлено существенное влияние изменений внутренней энергии межфазной границы на структуру теплового и гидродинамического полей возмущённого течения.

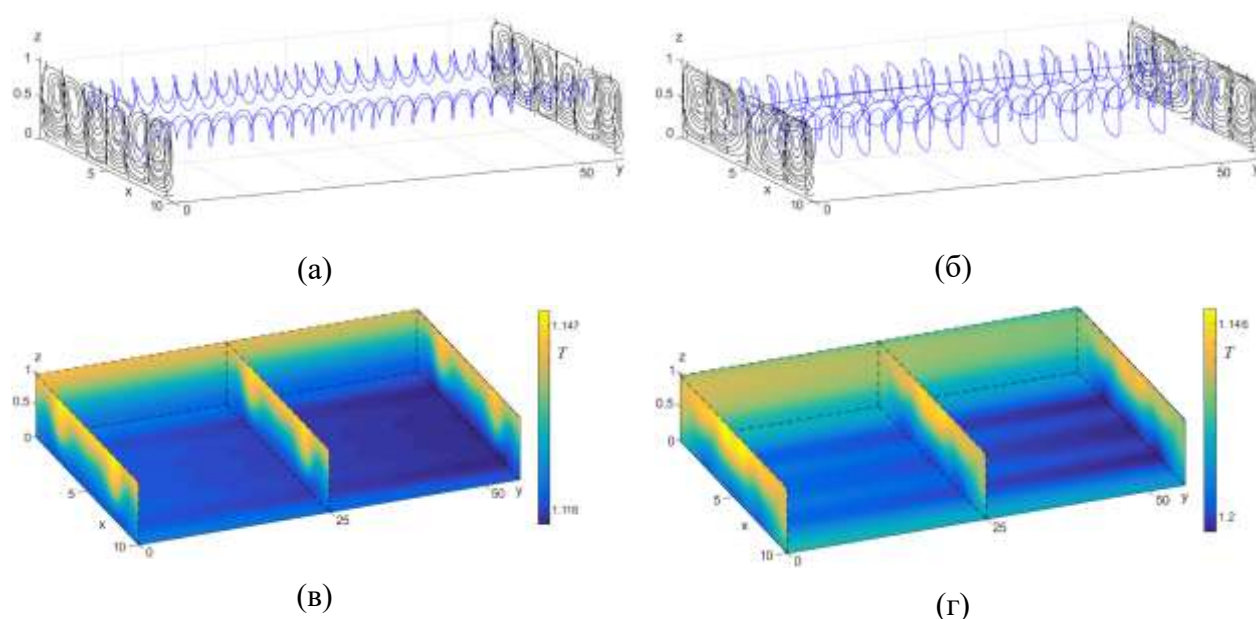


Рисунок 4 – Поле скорости и траектории движения частиц (а, б) и поле температуры (в, г) в системе FC-72 – азот с начальной толщиной жидкого слоя 100 мкм при $A = 1$ К/м в задаче с полным энергетическим условием (а, в) и в классической постановке (б, г)

В отличие от основного температурного поля, которое характеризуется однородным градиентом в поперечном направлении, тепловые возмущения вызывают образование горячего пограничного слоя вблизи поверхности раздела (рисунок 4 в, г) и тепловых структур различной формы. Под действием возмущений, взаимодействующих с основным течением, в системе возникают термокапиллярные валиковые структуры (рисунок 4 а, б), в которых наблюдается вращательно-поступательное движение частиц. Работа термокапиллярных сил по изменению площади поверхности раздела, которая характеризуется ненулевым членом в правой части условия (3), приводит к уменьшению поперечного размера термокапиллярных продольных валов и слабому росту вращательной компоненты скорости. С увеличением толщины жидкого слоя ослабевает влияние вязких сил и, как, следствие, растёт скорость движения. Полученные результаты

указывают на необходимость использования полного энергетического условия при моделировании течений тонких плёнок. Это позволит более точно предсказать возможные кризисные явления, связанные с разрывом слоя жидкого теплоносителя в системах термостабилизации за счёт формирования термокапиллярных структур. Возникновение продольных термокапиллярных валов неизбежно сопровождается изменением формы границы раздела и утоньшением жидкого слоя в областях растекания жидкости в поперечном направлении из горячих областей в зоны с меньшей температурой.

4. Исследование нелинейной устойчивости с учётом деформации границы раздела на основе вычислительного эксперимента

Другой класс задач, связанный с изучением динамики жидкого слоя в условиях внешней тепловой нагрузки, возникает при разработке систем, в которых имеет место не распределённый, а локальный нагрев. Задачи об определении характеристик конвективных режимов в системах с локальным нагревом возникают при оптимизации возможных конфигураций прокладки жидкостных трактов, вариантов размещения нагревателей и/или конденсаторов, тепловых элементов, обеспечивающих функционирование аппаратуры (в том числе на космических аппаратах), а также при разработке варифокальных линз, оптофлюидных элементов, немеханических переключателей, бесконтактных методик неразрушающего контроля и т.д. При этом важно помнить, что в условиях слабых силовых полей или микромасштабов термокапиллярная конвекция становится основной формой движения жидкости. Доминирование сил Марангони может приводить к сильным деформациям границ раздела вплоть до образования сухих пятен (или, что то же самое, разрыву жидкого слоя), появление которых вызывает критическое падение характеристик теплообмена и возможное разрушение рабочего узла.

В рамках модели Обербека – Буссинеска изучена задача об устойчивости равновесия двухслойной системы жидкость-газ в условиях локального нагрева тепловыми элементами конечного размера. Следует отметить, что в рамках полной постановки задача рассматривается впервые; все известные исследования подобного рода проводились в приближении тонкого слоя. Уравнения движения и теплообмена в каждом слое записываются в переменных «функция тока – вихрь». Условия равенства скоростей, температуры и тепловых потоков и динамическое условие на термокапиллярной границе раздела переписываются в виде следующих функциональных соотношений для искомых функций:

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - \kappa \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0,$$

$$\omega_2 - \rho \nu \omega_1 = F_1(t, x), \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - \rho \nu \frac{\partial \omega_1}{\partial n} = F_2(t, x),$$

где ψ_i , ω_i , $\theta_i = (T_i - T_0)/\delta T$ – безразмерные функция тока, завихренность и температура i -ой жидкости, T_i – истинные температуры, T_0 , δT – характерные значения температуры и перепада температуры в системе, $\kappa = \kappa_1 / \kappa_2$, $\rho = \rho_1 / \rho_2$, $\nu = \nu_1 / \nu_2$ – отношения коэффициентов теплопроводностей, плотностей и вязкостей, соответственно, а функции F_1, F_2 – записаны в терминах касательной v_s и нормальной v_n компонент скоростей жидкостей на общей границе раздела, которые считаются равными для обеих сред на Γ . Функция F_1 учитывает влияние термокапиллярных сил на Γ , F_2 отражает вклад скачка плотности и давления при переходе через Γ и нестационарности задачи. Жидкий слой ($i = 2$) характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma(T_2) = \sigma_0(1 - \sigma_T(T_2 - T_0))$ на межфазной границе. Кинематическое условие позволяет определить положение межфазной границы $f(t, x): f_t + \sqrt{1 + f_x^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial s} = 0$, где $\mathbf{s}$ – единичный вектор касательной к Γ . Массоперенос через границу раздела не учитывается. На боковых границах системы для температуры заданы условия первого рода, а условия для функции тока на твёрдых внешних стенках соответствуют условиям вязкого прилипания. Условия для температуры на нижней и/или верхней стенке учитывают наличие локальных источников тепла: $\theta_1|_{x \notin Q_j} = 0$, $\theta_1|_{x \in Q_j} = q_j(t)$. Здесь Q_j – область, занятая j -м нагревателем, q_j – температура j -го нагревателя. Все замыкающие соотношения (граничные условия) не только получены из законов сохранения, но и сами записаны в форме законов сохранения.

Для решения поставленной задачи была разработана и реализована программа на языке Фортран для расчёта всех искомых характеристик системы (возмущённые скорости и температуры сред, положение границы раздела), основанная на идее метода Овчаровой, использующего декомпозицию исходной задачи на два унитарных модуля с некоторым набором правил их сопряжения друг с другом. Численный метод предполагает отображение областей с криволинейными границами в прямоугольную расчётную область. Каждый модуль в численном методе представляет собой однотипную модель, в которой расчёт характеристик производится независимо от второго модуля. При этом набором правил сопряжения этих модулей в одну систему являются граничные условия на Γ . Существенным преимуществом подобного подхода состоит в том, что исходную физическую модель можно расширять, добавляя к ней новые данные о физических

процессах, обеспеченных выполнением законов сохранения (например, влияние энергетических свойств границы раздела, процессов массопереноса на границе раздела, переменные коэффициенты переноса и т.п.). Кроме того, численный метод допускает обобщение на случай произвольного числа слоёв в системе, включая случай системы со свободными внешними границами. Характерной особенностью численного метода является решение задачи в переменных «функция тока – вихрь», при котором отправной точкой расчётов оказывается решение уравнения для определения касательной скорости, которое есть следствие динамического условия. Определяющие уравнения для всех искомых функций решаются конечно-разностным методом стабилизирующей поправки с использованием дробных шагов. Полная аппроксимация исходного уравнения проводится на первом дробном шаге, а второй дробный шаг является корректирующим и позволяет повысить устойчивость схемы.

Метод содержит следующие основные этапы: 1) используя кинематическое условие, определяются новое положение границы раздела на следующем шаге по времени и нормальные скорости v_n точек на Γ (во всех узлах сетки); (2) производится расчёт коэффициентов, необходимых для решения с помощью итерационной процедуры уравнений движения и переноса тепла в каждом слое; (3) рассчитываются граничные условия для решения уравнений движения (определяются функция F_1 , значения касательных скоростей v_s точек, лежащих на границе раздела, функция F_2); (4) из решения определяющих уравнений с коэффициентами, рассчитанными на шаге (2), находятся значения всех искомых функций на новом временном слое. При численной реализации метода для определения значения завихренностей ω_i на твёрдых стенках использовались условия Тома.

Визуализация результатов проводится с помощью инструментальных средств пакета прикладных программ MatLab. Программный комплекс позволяет визуализировать поля скорости и температур в системе, положение границы раздела и распределение касательной скорости на границе раздела в каждый момент времени (рис. 5, 6).

Исследовано влияние гравитации, режима работы нагревателей и вариантов их размещения на внешних границах плоской кюветы на структуру возникающих конвективных режимов, поведение и амплитуды деформации межфазной границы в системе сред этанол – азот. Рассмотрены случаи стационарного и комбинированного нагрева одним и двумя тепловыми элементами, соответственно, при их симметричном расположении на верхней или нижней стенке. При комбинированном нагреве в начальный момент времени оба нагревателя (A и B) включаются с одинаковой температурой, затем температура одного теплового источника (A) остаётся неизменной, а второго (B)

скачкообразно увеличивается через равные промежутки времени. Подобный режим тепловой нагрузки имитирует переключение теплового источника «нагрев – остывание» в реальной системе, когда происходит активация или отключение каких-либо систем космического аппарата (например, переключение сенсоров, передача данных телеметрии, корректировка антенн и т.п.). Рассчитаны основные характеристики течений, возникающих при потере устойчивости в системе в условиях пониженной гравитации ($g = g_0 \cdot 10^{-1}$, $g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2$).

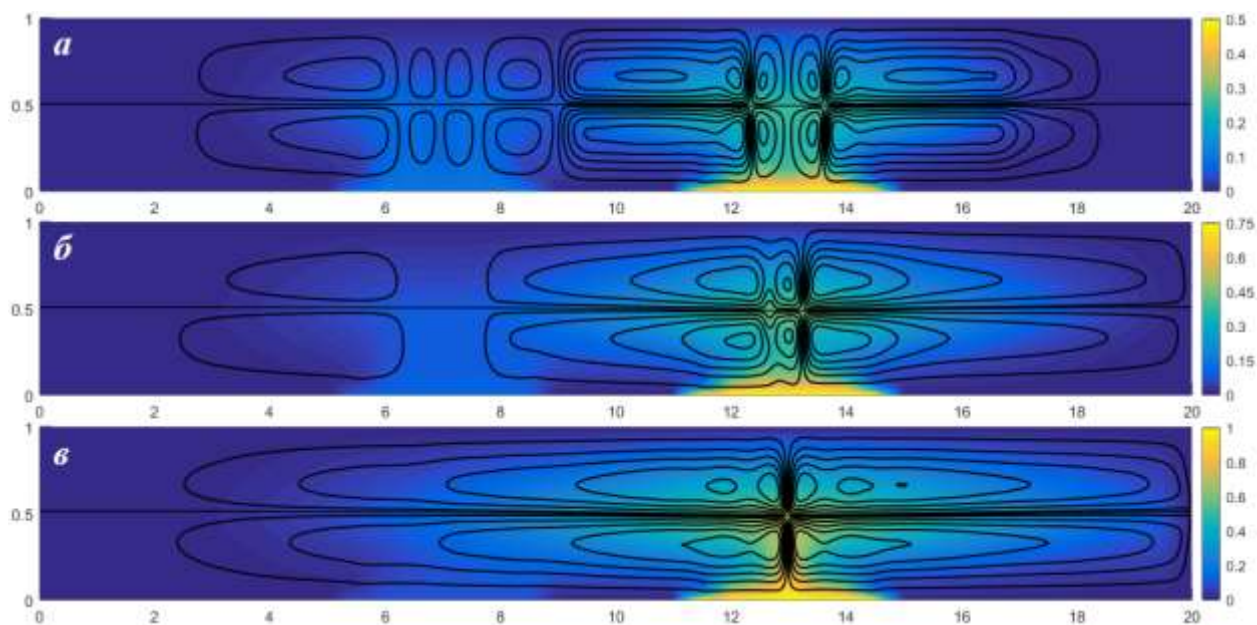


Рисунок 5 – Перестройка структуры течения в системе этанол – азот с комбинированным нагревом двумя нагревателями при микрогравитации, $g = g_0 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2$. Линии тока и поле температуры в моменты времени $t = 47$ (а), $t = 64$ (б), $t = 88$ (в)

При каждом увеличении температуры нагревателя существует некоторое время задержки, зависящее от интенсивности гравитационного воздействия, с которым система отвечает на изменение тепловой нагрузки. В слабом силовом поле время задержки увеличивается. Наблюдается явление гистерезиса, которое характеризуется возникновением колебаний границы раздела жидкостей с изменением амплитуды её деформаций не только над нагревателем, но и по всей длине рабочего участка (рисунок 6 а) и, как следствие, осциллирующих режимов с дрейфующими из горячей зоны на периферию вихрей (рисунок 5). Присутствие слабого нагревателя А нарушает симметрию течений, приводит к деформации вихревых структур и формированию краткосрочных несимметричных менисков над более мощным нагревателем с некоторой временной задержкой после каждого скачкообразного изменения температуры q_B (рисунок 6 б, в). С течением времени вихревые структуры, возникающие в зоне действия слабого нагревателя А,

поглощаются течением, индуцированным вторым тепловым источником B (рисунок 5 в). При этом термокапиллярная деформация границы раздела над нагревателем A полностью подавляется (рисунок 6 г).

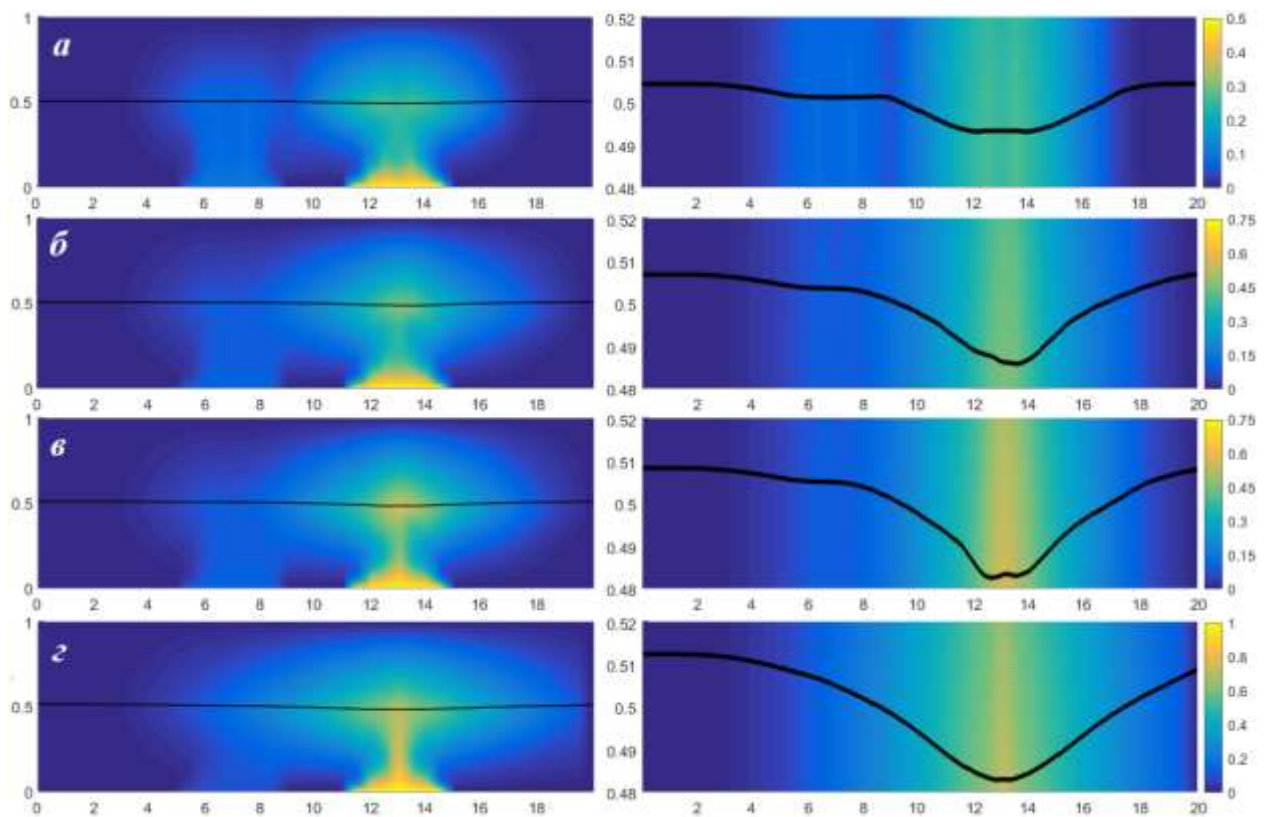


Рисунок 6 – Эволюция теплового поля (слева) и формы границы раздела (справа) в системе этанол – азот с комбинированным нагревом двумя нагревателями в условиях микрогравитации

$g = g_0 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2$ в моменты времени $t = 47$ (а), $t = 64$ (б), $t = 67$ (в), $t = 88$ (г)

Образование колебательных режимов и осцилляций межфазной границы является характерной особенностью системы с комбинированным нагревом. Колебательные явления возникают лишь в таких режимах работы тепловых источников, при которых имеет место рост температуры q_B со временем. Если температура теплового источника B далее не увеличивается, то имеет место стабилизация вторичного режима с устойчивым термокапиллярным прогибом границы раздела в зоне действия более мощного нагревателя. С уменьшением интенсивности гравитационного воздействия неоднородный (переключаемый) нагрев в системе с одним нагревателем может приводить к достаточно быстрому разрыву жидкого слоя, в то время как в условиях нормальной гравитации при тех же толщине жидкого слоя и рабочем диапазоне температур разрушение жидкого слоя не происходит. При полном отключении нагревателя в слабом силовом поле система релаксирует медленнее, чем при земной гравитации, при этом в условиях микрогравитации сохраняются осцилляции границы раздела, которые отсутствуют при $g = g_0$. Размещение нагревателей на верхней стенке позволяет уменьшить влияние

конвективного механизма, что приводит к существенной стабилизации границы раздела и инерционному поведению системы без возникновения гистерезисных явлений. Таким образом, за счёт соответствующего размещения нагревателей и контроля интенсивности тепловой нагрузки, можно обеспечить подавление термокапиллярных деформаций поверхности раздела для предотвращения появления сухих пятен. Кроме того, использование нагревателей, расположенных на верхней стенке граничного массива, в качестве дублирующих, позволяет продлить срок службы тепловых элементов без потери эффективной мощности соответствующих систем аппаратуры и/или оборудования.

5. Ползущие двухслойные термоконцентрационные движения в плоских слоях

Рассмотрена задача о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в канале с плоской поверхностью раздела. Математическая формулировка задачи включает уравнения Навье-Стокса, неразрывности, теплопроводности и массопереноса, записанные для каждого из слоев жидкости. Система ограничена твердыми стенками, на которых задано условие прилипания и распределение температур, кроме того считается, что через границы отсутствует поток вещества. На недеформируемой поверхности раздела учитывается полное условие энергообмена, а также выполнены кинематическое, динамическое условия, условия равенства скоростей, температур, отсутствие потока вещества через поверхность раздела. Коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(\theta - \theta_0) - \sigma_C(c - c_0)$.

В результате исследований за отчётный период построены новые точные решения уравнений жидких средах, в предположении, что течение в системе является ползущим (превалирующим является влияние сил вязкого трения вблизи поверхности раздела),

Для описания движения вблизи локальных экстремумов температуры на твердых стенках и границе раздела использовался специальный вид решения, когда одна из компонент скорости линейно зависит от продольной координаты $u_j(\tau, \xi, \eta) = U_j(\tau, \eta)\xi$, $v_j(\tau, \xi, \eta) = V_j(\tau, \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $j = 1, 2$, поля температур и концентрации имеют квадратичную зависимость от горизонтальной координаты $\theta_j(\tau, \xi, \eta) = A_{j0}(\tau, \eta)\xi^2 + B_{j0}(\tau, \eta)$, $c_1(\tau, \xi, \eta) = H_0(\tau, \eta)\xi^2 + K_0(\tau, \eta)$. Такое поле скоростей соответствует хорошо известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости. Основными характерными параметрами задачи являются число Марангони $M = \frac{\sigma_T l_2^3 A_{10}}{\rho_2 \nu_2 \chi_2}$, число Прандтля $Pr_j = \frac{\nu_j}{\chi_j}$, параметр энергообмена $E = \frac{\sigma_T^2 A_{10}}{\rho_2 \nu_2 k_2}$, l_2 - общая толщина системы.

В зависимости от значений определяющих параметров стационарная модельная задача может не иметь решений, иметь одно или два точных решения, которые получены в общем виде.

Для иллюстрации физических эффектов была использована модельная система с параметрами: $\rho = \rho_1/\rho_2 = 0.945$, ρ_j - плотность жидкости j -го слоя, $\nu = \nu_1/\nu_2 = 7.1$ - отношение кинематических вязкостей жидкостей, $k = k_1/k_2 = 0.42$ - отношение коэффициентов теплопроводностей жидкостей, $\gamma = l_1/l_2 = 0.5$ - граница раздела жидкостей, $Pr_1 = 29$, $Pr_2 = 1.52$, $E = -0.328 \cdot 10^{-9}$.

Для описания течения при отсутствии энергии межфазного теплообмена в условиях невесомости решение найдено в виде аналитических формул. Построено стационарное векторное поле для случая, когда на нижней твердой подложке температура имеет максимум в точке $\xi = 0$: $A_{20} = 0, A_{10} < 0$ (рисунок 7).

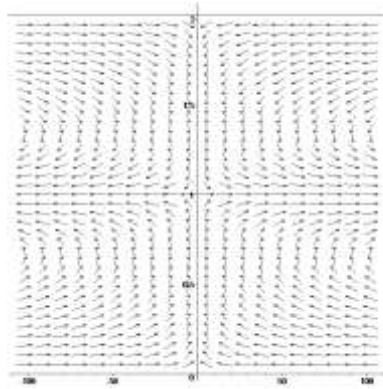


Рисунок 7 - Стационарное векторное поле $u = \xi U(\eta), v = V(\eta)$

Для нестационарной задачи получены априорные оценки решения в равномерной метрике и установлены условия на входные данные, при которых решение с ростом времени стремится к стационарному. На рисунке 8 представлены профили компонент скорости, при условии, что на нижней твердой стенке $A_{10} = 0$; на верхней: $A_{20} = -3 + \exp(-0.05\tau)\sin \tau$. В этом случае согласно априорным оценкам выполняются условия стабилизации движения. Этот результат можно трактовать как устойчивость стационарного двухслойного течения бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в плоском канале.

С помощью метода Лапласа выписано аналитическое решение нестационарной задачи конвекции для определения поля скоростей, температур и концентрации в изображениях по Лапласу. Численным методом восстановлены истинные поля скорости и температуры. Результаты расчетов показали, что термоконцентрационные силы порождают сложное течение в слоях с изменением направления течения по толщине слоя. При этом поток симметричен относительно оси $\xi = 0$, на которой точка $\eta = 0$ является точкой экстремума температуры на подложке.

При исследовании стационарного течения системы жидкостей в поле силы тяжести расчеты показали, что на поверхности раздела термоконцентрационные силы оказывают влияние на характер течения и вблизи поверхности раздела формируется возвратное течение (рисунок 9).

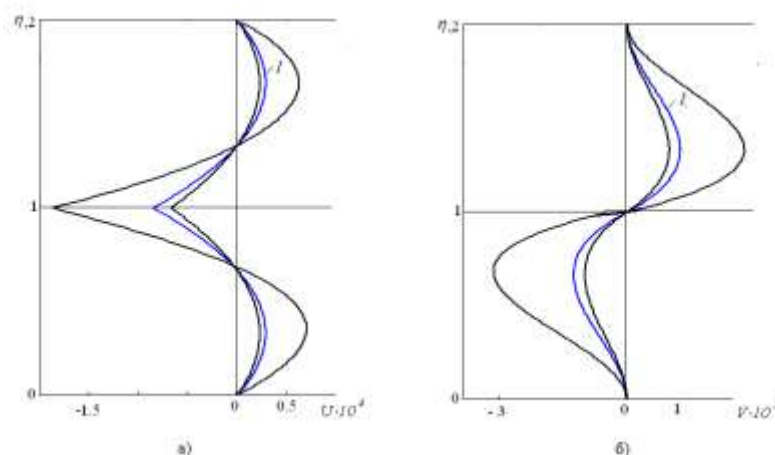


Рисунок 8 - Профиль функции $U(\eta)$ продольной скорости (а) и поперечной скорости $V(\eta)$ (б) в различные моменты времени. Кривая 1 – стационарное распределение

Для изучения влияния энергии межфазного теплообмена на динамику течения жидкости и смеси на поверхности раздела учитывалось энергетическое условие

$$k_2 \theta_{2\eta} - k_1 \theta_{1\eta} = -\sigma_\theta u_\xi \theta$$

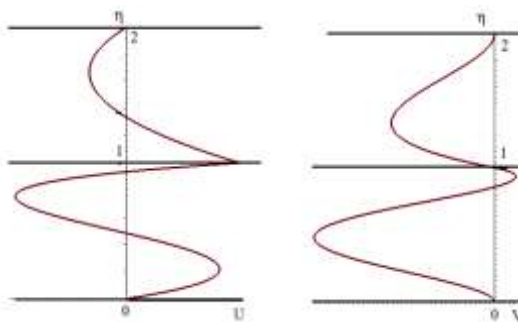


Рисунок 9 - Профиль продольной U и поперечной V составляющей вектора скорости для стационарного течения в поле силы тяжести

Построено стационарное решение для задачи, описывающей двухслойное движение жидкостей в системе с общей поверхностью раздела в условиях невесомости. На рис.4 представлены профили компонент скорости решаемой задачи для случая, когда $A_{20} = 0$, $A_{10} < 0$, т.е. температура имеет максимум на нижней твердой стенке в точке $\xi = 0$. Вертикальная составляющая скорости $V(\eta)$ в нижнем слое - отрицательна, горизонтальная компонента скорости $U(\eta)$ меняет знак, что означает, что жидкость в нижнем слое при $\xi = 0$ перемещается вертикально вниз по оси.

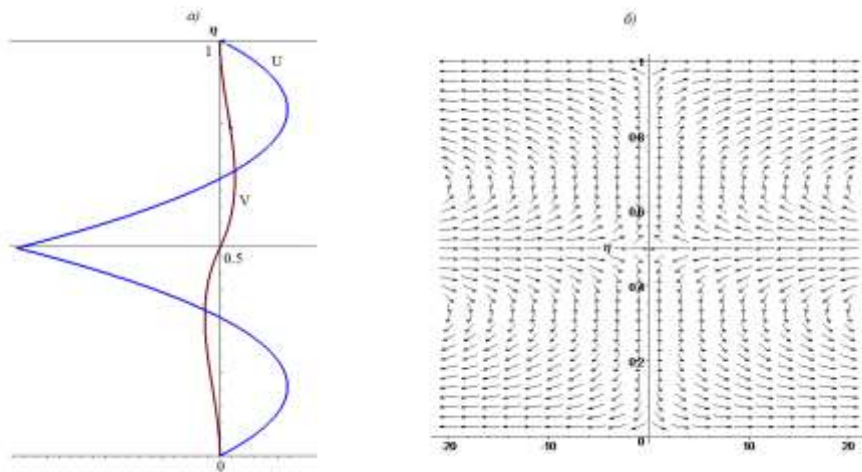


Рисунок 10 – Профили функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ компонент скорости (а) и векторное поле скоростей (б) при учете энергии межфазного теплообмена в условиях невесомости

Изучена задача о трехмерном стационарном течении системы двух несмешивающихся жидкостей в модели Обербека–Буссинеска в плоском канале с твёрдыми стенками, на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E .

Решение исследуемой задачи описывается формулами $U_j(\xi, \zeta) = (F_j(\zeta) + H_j(\zeta))\xi$, $V_j(\eta, \zeta) = (F_j(\zeta) - H_j(\zeta))\eta$, $W_j(\zeta) = -2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_j(z) dz$, $\theta_j = A_j(\zeta)\xi^2 + B_j(\zeta)\eta^2 + T_j(\zeta)$, $c_j = M_j(\zeta)\xi^2 + N(\zeta)\eta^2 + K_j(\zeta)$.

Безразмерные параметры исследуемой задачи выбраны таким образом, что при рассмотрении ползущего течения задача становится линейной с нелинейным граничным условием, учитывающим межфазную энергию теплообмена. Получены точные решения поставленной задачи в аналитическом виде.

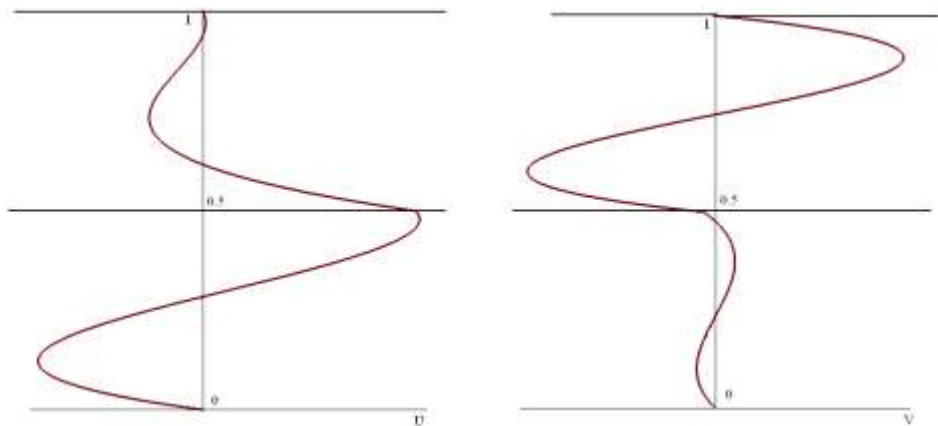


Рисунок 11 - Профили функций U , V компонент скорости в сечениях $\xi=1, \eta=1$, $A_{10} = B_{10}$

Показано, что если на твердых стенках $A_{10} = B_{10} = 0$, то решением исследуемой задачи является покой. Профили компонент U, V представлены на рисунке 11, если $A_{10} = B_{10} = -0.035$.

6. Двухслойные термокапиллярные течения в плоских слоях с полем скоростей типа Хименца

Исследовано инвариантное решение уравнений двумерного конвективного движения в модели Обербека – Буссинеска вида $\mathbf{u} = (U(y, t), 0, 0)$, $\theta = -A(y, t)x + T(y, t)$, $p = -B(y, t)x + P(y, t)$ (для двух жидкостей нужно поставить индекс $j = 1, 2$). Оно интерпретируется как однонаправленное движение одной жидкости и двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела в плоском горизонтальном слое. При этом на нижней неподвижной стенке (подложке) задано нестационарное поле температур (ранее рассматривались задачи только при стационарном его распределении). Верхняя граница может быть твёрдой стенкой, как теплоизолированной, так и нет, или свободной границей. На свободной границе и поверхности раздела поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Возникающие начально-краевые задачи для функций $U(y, t)$, $A(y, t)$ являются обратными, поскольку содержат неизвестный градиент давления. По известным функциям $U(y, t)$, $A(y, t)$ определяется $T(y, t)$ из решения классической задачи, а $B(y, t)$, $P(y, t)$ – с помощью квадратур. Найдено точное стационарное решение. Решение нестационарной задачи для скорости получено в виде квадратур в изображениях по Лапласу, а для температуры – в виде быстро сходящихся рядов по специальному базису. Установлены априорные оценки решения в равномерной метрике для любого конечного момента времени и доказано, что с ростом времени нестационарное движение стремится к данному стационарному состоянию, если на твёрдой стенке температура стабилизируется со временем. Приведены результаты расчётов, показывающие различные способы управления движением с помощью задания (нестационарной, в том числе и разрывной) температуры на стенках.

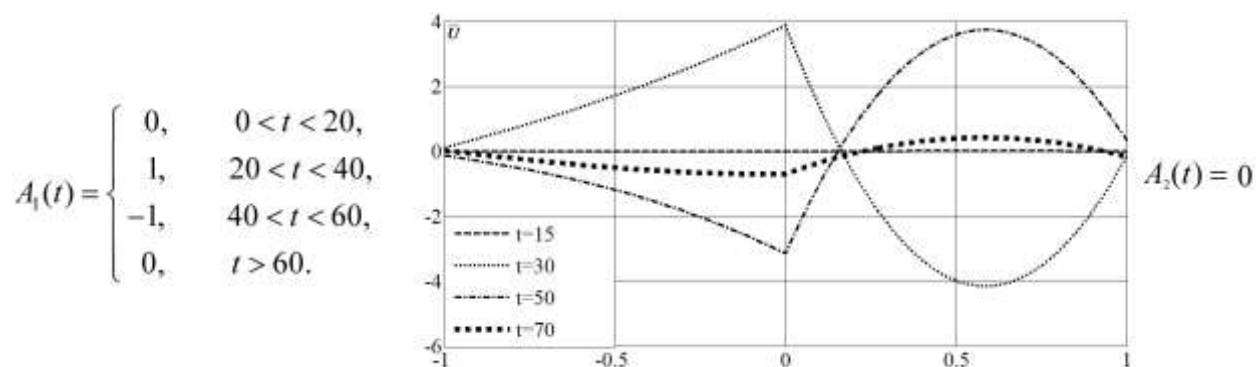


Рисунок 12 – Профили безразмерных скоростей $\bar{U}_j$

На рисунке 12 изображены профили безразмерных скоростей (поверхность раздела $y=0$), когда $A_1(t)$ (градиент температуры на нижней стенке) – разрывная функция, а $A_2(t)=0$. Заметим, что при $t=30$ только во втором слое возникает возвратное течение. Следовательно, задавая различный вид градиента температуры на стенке, можно влиять на характер течения.

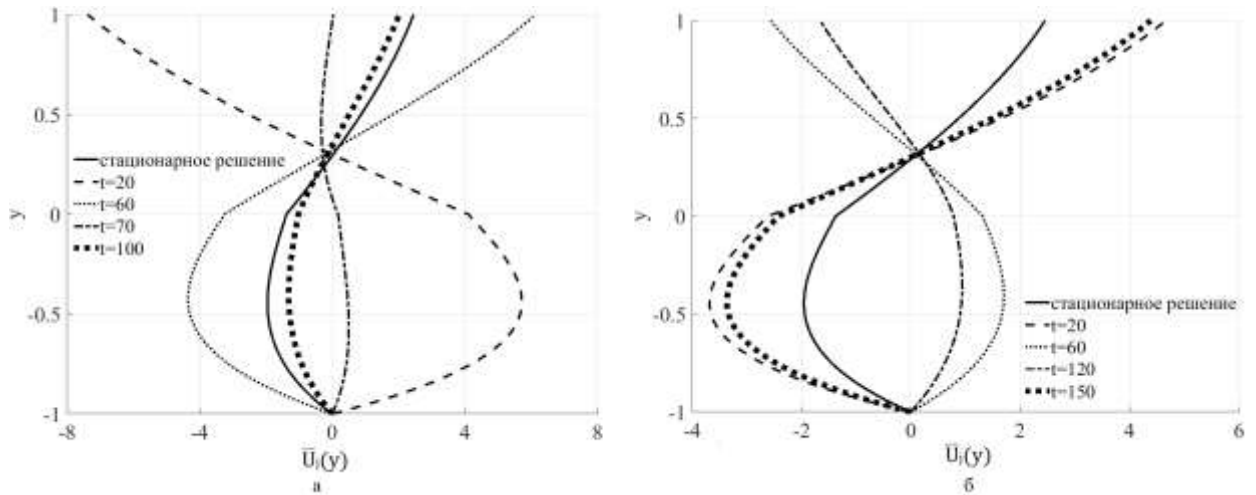


Рисунок 13 – Профили безразмерных скоростей $\bar{U}_j$

На рисунке 13 приведены расчеты, когда верхняя стенка $y=1$ – свободная граница. Продольный градиент на нижней стенке распределён по закону $A_1(t) = A_0 + \gamma_1 e^{-\gamma_2 t} \sin(\gamma_3 t)$, где коэффициенты γ_1, γ_2 отвечают за амплитуду и частоту колебаний соответственно. В случае, когда $A_0 \neq 0, \gamma_2 > 0$, то будет наблюдать сходимость решения к стационарному режиму (рисунок 13 а), а при $\gamma_2 \leq 0$ предел функции $A_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$ не существует и решение не стремится к стационарному режиму (см. рисунок 13 б).

Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твёрдыми стенками на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E . Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряжённая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет два различных решения. В случае, когда отсутствует влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоёв ($E=0$), найдено два решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные

структуры течения и проведён анализ влияния безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений.

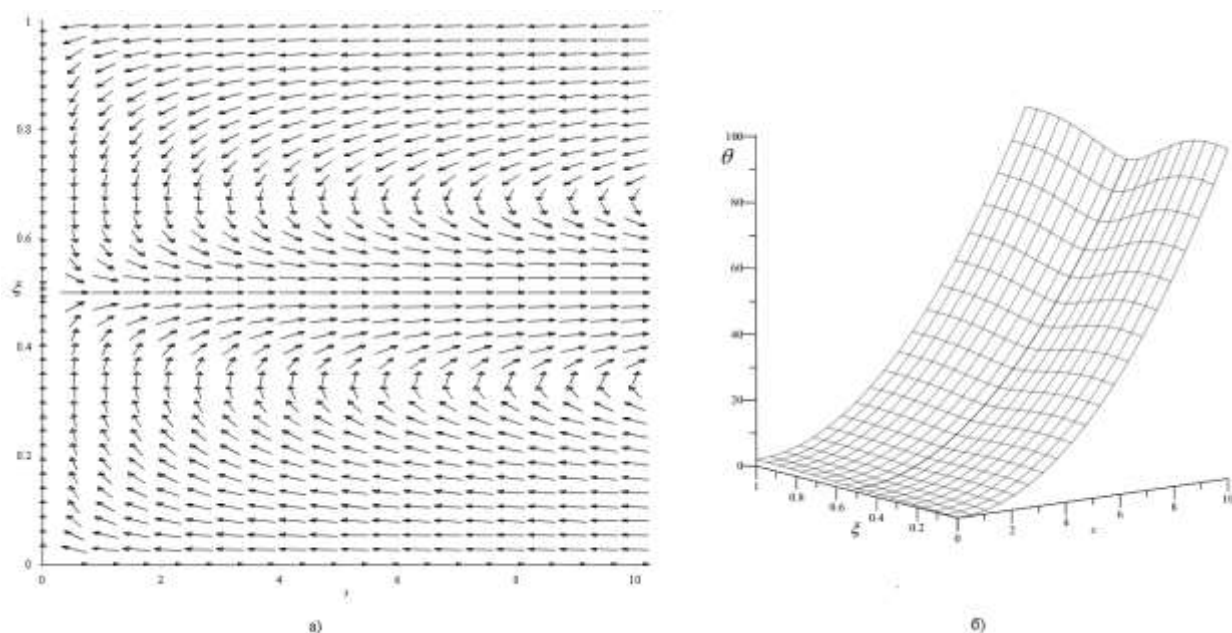


Рисунок 14 – Поле скоростей (а) и температур (б) в слоях для 1-го решения

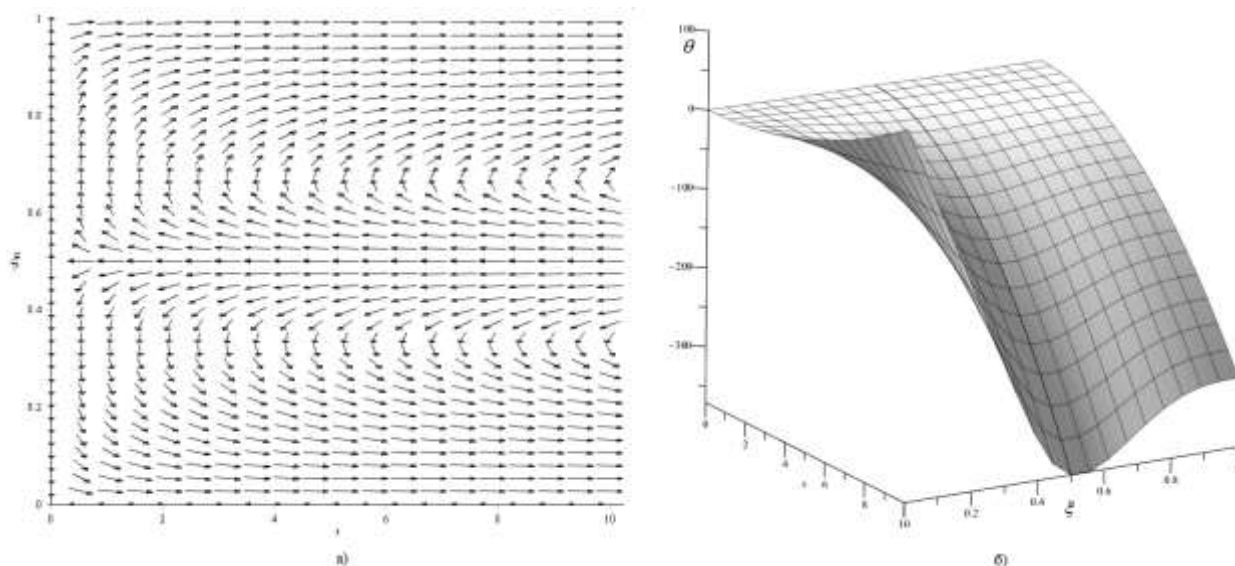


Рисунок 15 - Поле скоростей (а) и температур (б) в слоях для 2-го решения

На рисунках 14,15 изображены поля скоростей и температур в слоях для возникающих течений. В обоих случаях возникают зоны возвратного течения: в первом случае - вблизи поверхности раздела (рисунок 14), а во втором - вблизи твёрдых стенок (рисунок 15). Помимо градиента поверхностного натяжения имеется ещё один механизм движения, возникающий при нагреве нижней стенки - градиент давления в слоях. Вычисления показывают, что градиент давления в первом слое по модулю существенно превосходит градиент поверхностного натяжения и действует в противоположном направлении. Поэтому в обоих случаях течение вблизи поверхности раздела направлено в

сторону роста температуры, то есть в сторону, противоположную направлению действия термокапиллярных сил.

7. Осесимметрические конвективные течения

Исследована задача о малых осесимметрических монотонных возмущениях равновесного состояния двух покоящихся несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрическом контейнере при наличии плоской границы раздела, которое обладает поверхностным натяжением, линейно зависящим от температуры. При этом предполагалось, что в конвективном состоянии поверхность раздела образует с боковой поверхностью цилиндрического контейнера угол контакта равный $\pi/2$ и является недеформируемой. Также учитывалась энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности раздела. Для решения возникшей спектральной задачи был применён модифицированный метод Галёркина. Для конкретных жидкостей были построены нейтральные кривые в зависимости от отношения температур, задаваемых на основаниях цилиндра и от размеров контейнера. В результате было показано, что, зная размеры контейнера и физические параметры жидкости, можно вычислить критическую разность температур, задаваемых на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, при которой внутри сосуда возникает движение.

Кроме того, были получены графики поля скоростей при различных значениях параметра E , характеризующего значимость процесса освобождения или поглощения теплоты при локальных приращении площади межфазной поверхности для развития конвективного движения вблизи поверхности раздела. Установлено, что при увеличении параметра E область возмущений, возникающих на поверхности раздела, становится больше. Также был рассмотрен частный случай, когда поверхность раздела задана в виде деформируемой свободной плоской границы, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Контейнер находится в поле силы тяжести. Получено численное решение задачи, когда свободная граница деформируема и: а) возмущения монотонны. Для конкретной жидкости построены нейтральные кривые, отображающие зависимость критических чисел Марангони от геометрии контейнера и физических параметров жидкости; б) возмущения немонотонны. Получено, что с ростом температуры на нижнем основании цилиндра мнимая часть комплексного декремента возрастает линейно и характер зависимости не изменится при варьировании какого-либо параметра системы. При этом колебания во всех случаях отсутствуют, то есть система либо устойчива, либо нет.

Исследована задача об осесимметричном стационарном двумерном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном цилиндре с твёрдой боковой стенкой. Жидкости образуют общую подвижную недеформируемую цилиндрическую поверхность раздела на которой учитывается полное энергетическое

условие. При этом температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуются с полем скоростей типа Хименца. Граница раздела обладает поверхностным натяжением, линейно зависящим от температуры. Массовые силы отсутствуют. С математической точки зрения, возникающая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль оси цилиндра. Для решения задачи применяется модифицированный метод Галёркина. В результате получено, что с увеличением значения числа Марангони (M) интенсивность течения внутри сосуда возрастает. Так график зависимости радиального профиля скорости от указанного параметра имеет вид

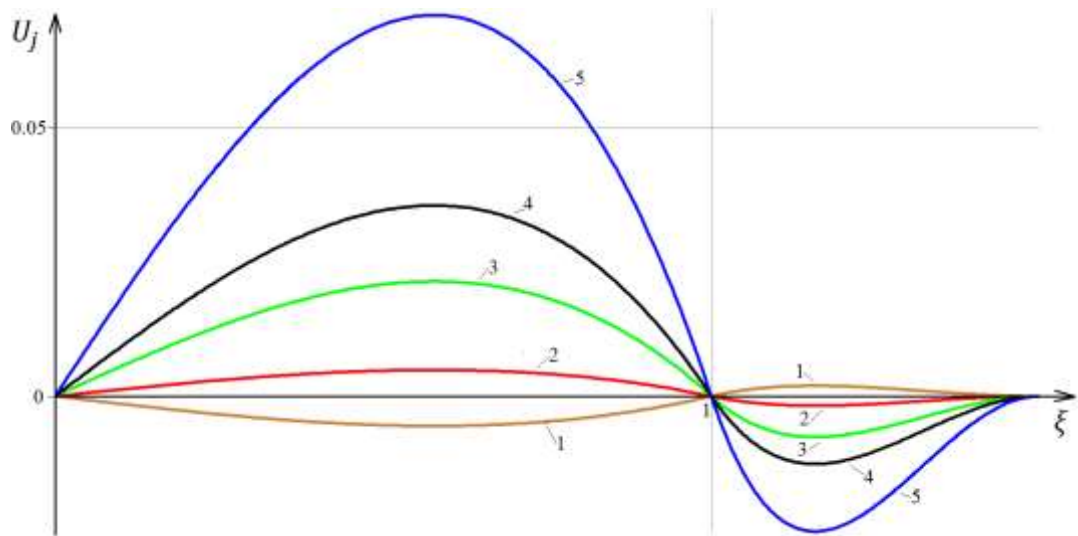


Рисунок 16 - Влияние числа Марангони на значение радиального профиля скорости $U_j(\xi)$:

1 - $M = -1$, 2 - $M = 1$, 3 - $M = 5$, 4 - $M = 9$, 5 - $M = 20$

Отрицательные значения числа Марангони говорят о том, что температура на твёрдой стенке имеет максимум, а при $M > 0$ – минимум. Стоит отметить, что численные результаты хорошо согласуются с аналитическими результатами, полученными при решении модельной задачи о ползущем течении. Полученные при решении задачи результаты могут быть использованы для изучения движения жидких сред в нанотрубках, при этом жидкость вблизи стенки цилиндра играет роль смазки.

Блок 2. Теоретико-групповой анализ уравнений новых моделей гидродинамики с усложнёнными свойствами

1. Групповые свойства уравнений термодиффузии.

Для системы уравнений термодиффузионного теплообмена

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla T + D^\delta \nabla C), \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla C + D^\theta \nabla T), \quad (1)$$

где T и C – функции температуры и концентрации, зависящие от времени t и всех пространственных переменных, коэффициенты температуропроводности χ , диффузии D , параметры Дюфора D^δ и Соре D^θ , оператор Гамильтона ∇ вычисляется по пространственным переменным, решена задача групповой классификации в классическом смысле (Овсянников, 1972) относительно произвольных параметров $\chi(T, C)$, $D(T, C)$, $D^\delta(T, C)$ и $D^\theta(T, C)$. Найденная основная алгебра Ли допускаемых системой (1) дифференциальных операторов при произвольных значениях классифицируемых параметров оказалась достаточно простой:

$$L_0 = \left\langle \partial_t, \partial_{x^i}, 2t\partial_t + \sum_{i=1}^3 x^i \partial_{x^i}, x^j \partial_{x^i} - x^i \partial_{x^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \quad (2)$$

Она содержит операторы переноса по времени и пространству, неоднородное одновременное растяжение временной и пространственных координат, а также операторы вращения в трёх плоскостях.

В случаях, когда эффектом Дюфора можно пренебречь (это выполнено для большинства жидких смесей), найдены все возможные расширения основной алгебры (2). Для определения спецификаций коэффициентов переноса и операторов, расширяющих основную алгебру L_0 , получено 18 классифицирующих уравнений, представляющих собой линейные уравнения в частных производных первого порядка. При существенной зависимости коэффициента температуропроводности χ от обеих переменных T и C получено 7 наборов спецификаций для трёх оставшихся коэффициентов, представляющих собой экспоненциальную и степенную зависимости параметров переноса от температуры и концентрации. Случаи, когда коэффициент χ зависит только от одного параметра состояния, рассмотрены отдельно. Особый интерес представляет зависимость коэффициента температуропроводности χ от температуры по степенному закону. Анализ исходной системы в данном случае интересен тем, что при указанном виде коэффициента температуропроводности имеет место нелинейная зависимость коэффициентов инфинитезимального оператора от пространственных переменных. Необходимо отметить, что число пространственных переменных влияет на показатель степени. Так, в случае одномерного уравнения теплопроводности (Овсянников, 1959) этот показатель есть $-4/3$,

он равен -1 для двумерного уравнения теплопереноса (Дородницын, 1983). В случае трёх пространственных переменных показатель степени коэффициента χ есть -4/5. Приведём пример результата решения задачи групповой классификации для коэффициентов $D(T, C)$ и $D^\theta(T, C)$ при $\chi = \chi_0 T^{-4/5}$ (см. Таблицу 1).

В случаях, когда показатель степени у коэффициента теплопроводности отличен от -4/5, задача групповой классификации также решена до конца, результаты сформулированы в виде теорем и представлены в таблицах. Нелинейность коэффициентов инфинитезимального оператора в этом случае отсутствует.

Таблица 1

$D(w)$	$D^\theta(w)$	операторы	w
$T^{-4/5} f_1(w)$	$T^{-4/5} f_2(w)$	$M_i + 5x^i(T^1 + C^1),$ $2Z_1 - 5(T^1 + C^1)$	C / T
$T^{-4/5} f(w)$	$T^{-4/5} (q(\chi_0 + f(w)/5) - 6C f(w)/(5T))$	$M_i + x^i(5T^1 + 6C^1 - qC^2),$ $2Z - 5T^1 - (6C^1 - qC^2)$	$(C - qT)T^{-6/5}$

В таблице 1 использованы следующие обозначения: f, f_1 – произвольные гладкие функции аргумента w , f_2 удовлетворяет уравнению $f_2' = -(4f_1 + 5f_1')/5$, штрих означает производную по w ; $q, \chi_0 \neq 0$ – произвольные постоянные. Обозначения операторов таковы:

$$M_i = ((x^k)^2 + (x^l)^2 - (x^i)^2) \partial_{x^i} - 2x^i x^k \partial_{x^k} - 2x^i x^l \partial_{x^l}, \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq k \neq l,$$

$$Z = \sum_{i=1}^3 x^i \partial_{x^i}, \quad T^1 = T \partial_T, \quad C^1 = C \partial_C, \quad C^2 = T \partial_C.$$

2. Свойства решений уравнений термодиффузионной конвекции

Рассматриваются уравнения однонаправленного движения (вектор скорости $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$) в приближении Обербека-Буссинеска, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$u_t = u_{yy} - p_x, \quad \theta + c = p_y, \\ \theta_t + \text{Gr} u \theta_x = \frac{1}{\text{Pr}} (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad c_t + \text{Gr} u c_x = \frac{1}{\text{Sc}} (c_{xx} + c_{yy} - \psi (\theta_{xx} + \theta_{yy})), \quad (3)$$

где $\text{Gr}, \text{Pr}, \text{Sc}$ – числа Грасгофа, Прандтля, Шмидта соответственно, ψ – параметр разделения, остальные обозначения общепринятые. Обнаружено, что система (3) разрешима в случае, когда начальная температура удовлетворяет уравнению Пуассона с линейной правой частью относительно горизонтальной координаты. Показано, что в этом случае возможно представление функции температуры в виде линейной, квадратичной и кубической зависимости от горизонтальной координаты. Установлено, что физический

смысл имеет только нестационарное решение с линейной зависимостью температуры, в случае стационарного решения возможна также квадратичная зависимость.

Для линейного распределения температуры и концентрации от горизонтальной координаты получено решение прямой (градиент давления задан) и обратной (градиент давления требуется определить вместе с остальными неизвестными функциями) стационарной задачи, являющееся обобщением давно известного решения для однородной жидкости (Остроумов, 1952; Бирих, 1966). Для замыкания стационарной задачи задаётся интегральное условие на среднюю концентрацию в сечении $x = 0$, для определения градиента давления используется условие на расход. Получено решение в виде формальных рядов задачи о нестационарном движении между двумя твёрдыми стенками, на которых заданы условия прилипания, линейное распределение температуры и отсутствие потока вещества; для определения скорости, градиентов температуры, концентрации и давления решение получено посредством численного обращения преобразования Лапласа от соответствующих функций. Доказано, что необходимым условием сходимости данного решения к также построенному в работе стационарному решению является выполнение интегрального равенства

$$\int_0^1 N_0(y) dy = \frac{\psi(A_1^s + A_2^s)}{2} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} + \frac{A_2^s - A_1^s}{720q^s + \psi(A_1^s - A_2^s)} \right), \quad (4)$$

где N_0 – начальный градиент концентрации, величины с индексом s соответствуют стационарным значениям градиента температуры на стенках $A_1(t)$, $A_2(t)$ и расхода $q(t)$.

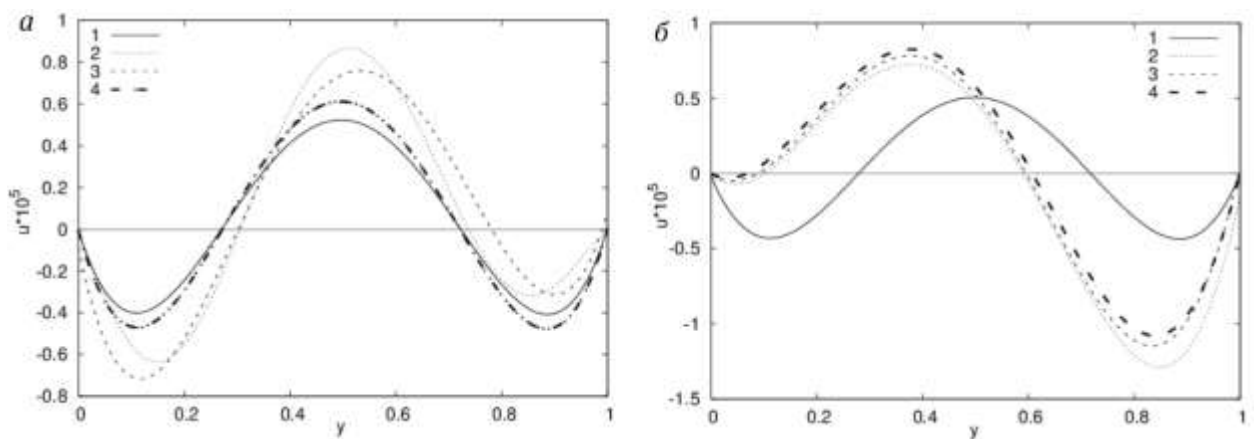


Рисунок 17 – Распределение функции скорости бинарной смеси в плоском канале в различные моменты времени при выполнении (а) и невыполнении (б) равенства (4)

На рисунке 17 представлены профили скорости смеси воды и изопропанола при $q = 0$, $A_1(t) = A_1^s + 10\sin(0.02t)e^{-0.05t}$, $A_2 = A_2^s$ в зависимости от выполнения условия (4).

Сплошная кривая соответствует стационарному решению, кривые 2-4 – нестационарные профили скорости в разные моменты времени: $t = 600\text{с}, 800\text{с}, 1500\text{с}$. Для построения рисунка 17 а значение $N_0 = 0.00052$ вычислено по формуле (4), для построения рисунка 17 б взято значение $N_0 = 0.0004$. Как видно, при невыполнении равенства (4) нет сходимости нестационарного решения к стационарному режиму. Заметим, что в условиях нулевого расхода функция скорости меняет знак, существуют зоны прямого и возвратного течения.

3. Математическое моделирование режимов однонаправленных течений бинарных смесей в длинных плоских каналах

Посредством построенного точного решения стационарных уравнений (3), отображающего квадратичную зависимость полей температуры и концентрации от продольной координаты x , проведён анализ влияния тепловой нагрузки и толщины слоя на течение бинарной смеси в плоском длинном горизонтальном канале. Показано, что убывание градиента температуры по абсолютному значению ведёт к уменьшению скорости, в то время как уменьшение толщины слоя приводит к увеличению скорости. Для всех рассмотренных случаев можно наблюдать возникновение зоны возвратного течения: в центре слоя скорость меняет знак.

Обнаружено, что построенное решение может описывать двухслойное течение бинарной смеси, увлекаемой спутным потоком газа с учётом слабого испарения на границе раздела. Одновременно с основными характеристиками течения можно

вычислять массовую скорость испарения $M = - \left(\frac{\partial c_2}{\partial y_2} - \psi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y_2} \right) \Big|_{y_2=0}$, где величины с

индексом 2 относятся к характеристикам течения в верхнем слое (смесь газа с испаряемым компонентом из нижнего слоя). Изменение знака величины M с положительного на отрицательный означает фазовый переход от испарения к конденсации на границе раздела.

На рисунке 18 изображены характеристики течения системы вода-этанол в нижнем слое $y \in [-1, 0]$, пары этанола и азот в верхнем слое $y \in [0, 1]$. Функции скорости $u(y)$ и величины $M(x)$ (рисунки 18 а и 18 б) построены в зависимости от толщины нижнего слоя h_1 . Можно видеть, что самая большая скорость (зеленая линия) соответствует самому тонкому нижнему слою ($h_1 = 0.00025\text{м}$). Возрастание толщины нижнего слоя ведет к исчезновению зоны обратного течения в верхнем слое, профили становятся близки к Пуазейлевскому (красная и синяя кривые на рисунке 18 а). Величина $M(x)$ возрастает при увеличении толщины нижнего слоя, т.е. самое слабое испарение наблюдается в самом

тонком слое, что можно объяснить силой поверхностного натяжения. Для всех использованных толщин нижнего слоя массовая скорость испарения положительная, следовательно, перехода от испарения к конденсации нет.

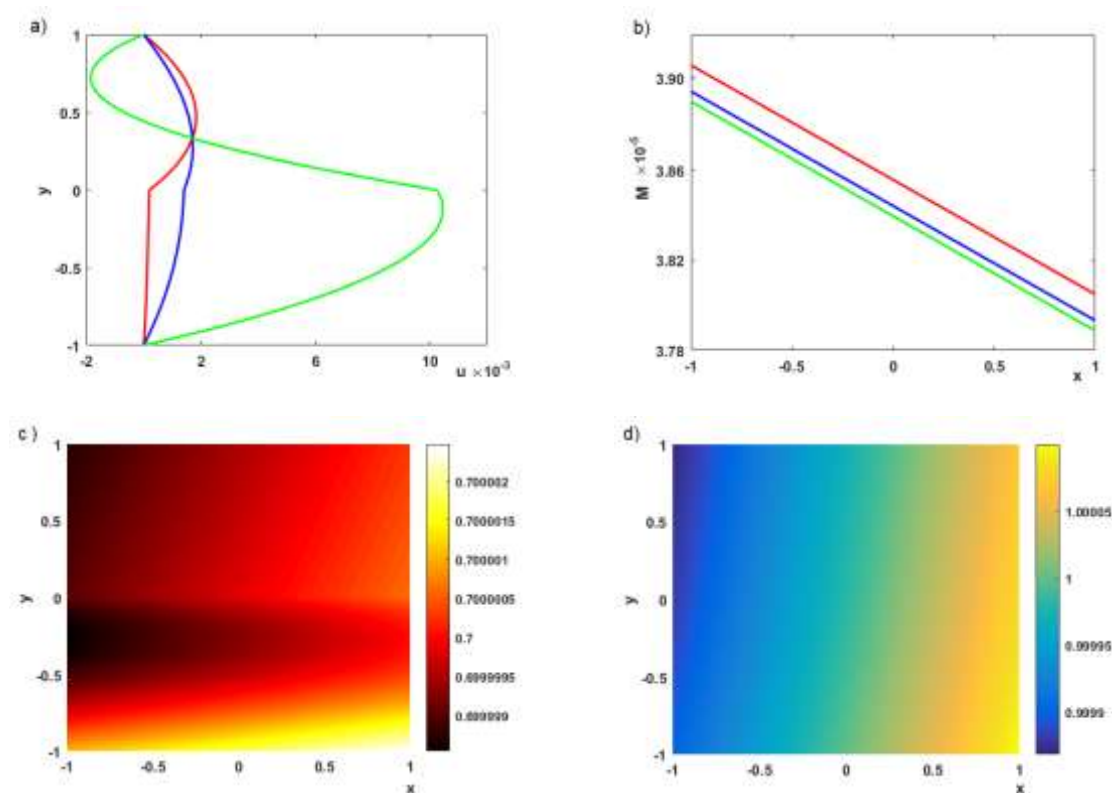


Рисунок 18 - Распределение скорости (а), массовой скорости испарения (б), полей температуры (с) и концентрации (д) в зависимости от изменения толщины нижнего слоя.

Толщина верхнего слоя фиксированная $h_2 = 0.005 \text{ м}$, толщина нижнего слоя: зелёная линия

$h_1 = 0.00025 \text{ м}$, синяя линия $h_1 = 0.0005 \text{ м}$, красная линия $h_1 = 0.001 \text{ м}$

На рисунках 18 с и 18 d представлены поля концентрации и температуры соответственно для толщин слоев $h_1 = 0.001 \text{ м}$, $h_2 = 0.005 \text{ м}$ и средней концентрации этанола в нижнем слое 70%. Как видно, поле концентраций более неоднородно, чем поле температур, концентрация имеет выраженный минимум вблизи границы раздела. Вероятно, это область наиболее интенсивного испарения. Полученные результаты согласуются с теоретическими (Бекежанова, Гончарова, 2019, 2020) и экспериментальными (Люлин, Кабов, 2014) работами по испарительной конвекции в плоских горизонтальных слоях.

4. Автомодельные решения задач свободной турбулентности

Проведено построение приближённых решений для описания течений в дальнем турбулентном следе. Исследование проводилось на основе следующей модифицированной $k-\omega$ модели Вилкокса (версия 2006 года), записанной в приближении дальнего следа:

$$U_{\infty} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_U \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^{\infty} \frac{W^2}{r'} dr',$$

Искомые величинами в данной модели являются дефект продольной осредненной компоненты скорости u_1 , турбулентная кинетическая энергия k и удельная скорость диссипации кинетической энергии ω . U_{∞} — скорость набегающего на тело невозмущенного потока. Получена автомодельная редукция уравнений рассматриваемой модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно. Для решения задачи привлекался модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными, что отражено на рисунке 19.

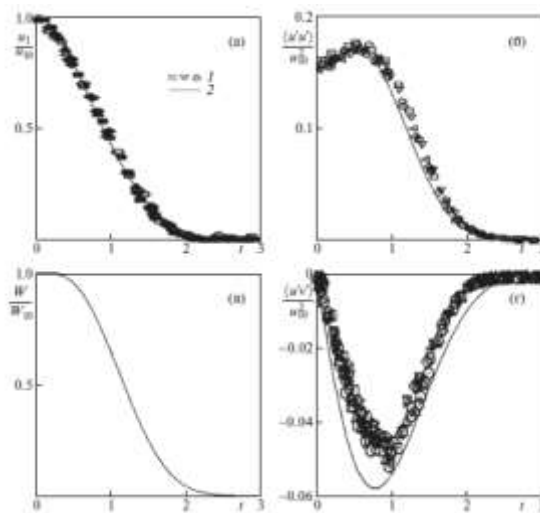


Рисунок 19

Выполненное сопоставление с экспериментальными данными свидетельствует о том, что учет перекрестно-диффузионного члена в уравнении на ω позволил улучшить прогностические свойства модели k - ω в расчетах свободных сдвиговых турбулентных течений. Кроме того, на основе асимптотического разложения построено приближенное решение, описывающее течение в дальнем турбулентном следе за телом.

Рассмотрена задача о течении в дальних областях закрученного турбулентного следа на основе следующей модели (Деменков А. Г., Черных Г. Г., 2020):

$$U_{\infty} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_U \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^{\infty} \frac{W^2}{r'} dr',$$

$$U_{\infty} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 K_w \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right],$$

$$U_{\infty} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_e \frac{\partial e}{\partial r} + P - \varepsilon,$$

$$U_{\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P}{e} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}.$$

В уравнениях используются следующие стандартные обозначения: U, W - продольная и тангенциальная компоненты скорости осредненного движения; $U_1 = U - U_{\infty}$ - дефект продольной компоненты скорости; U_{∞} - скорость невозмущенной

жидкости; $K_U = K_W = K_e = \frac{2}{3} \Phi \left(1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) \frac{e^2}{\varepsilon}$, $K_{\varepsilon} = \frac{K_U}{\sigma_{\varepsilon}}$, $\Phi = \frac{1 - C_2}{C_1 + P/\varepsilon - 1}$ -

коэффициенты турбулентной вязкости, $P = P_U + P_W$ - величина порождения энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$P_U = K_U \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2$, $P_W = K_U r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right)^2$. Величины $C_1, C_2, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_{\varepsilon}$ эмпирические

постоянные, равные 2.2, 0.55, 1.45, 1.92, 1.3 соответственно. В основу замыкания данной математической модели положена алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений Роди. Проведен теоретико-групповой анализ, построены автомодельные решения модели, а также проведено сопоставление полученных результатов с численными расчетами по полной модели (см. рисунок 20).

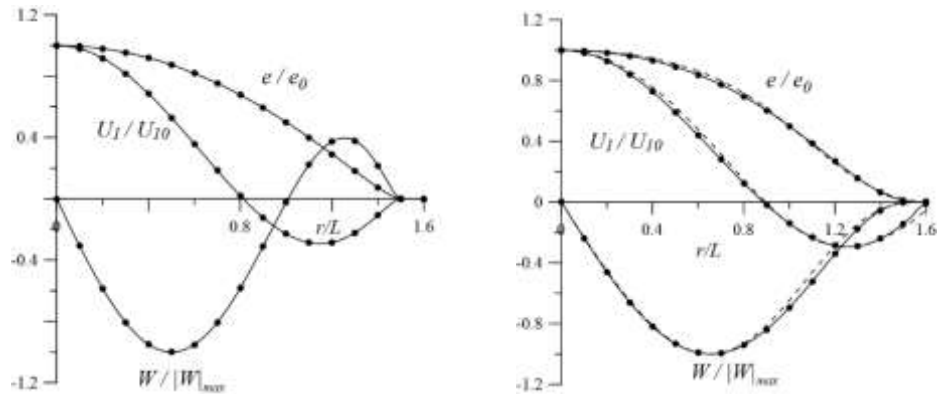


Рисунок 20

Рассмотрена модель (Деменков А. Г., Черных Г. Г., 2019), описывающая течение в дальних областях закрученной турбулентной струи. Найден базис алгебры Ли данной модели, построена автомодельная редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно. Полученные законы вырождения течения согласуются с известными результатами численного моделирования.

5. Точные решения уравнений баротропной жидкости

Решена задача Л. В. Овсянникова об исследовании переопределённой системы

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + p_x &= 0, & v_t + uv_x + vv_y + p_y &= 0, \\ u_x + v_y + p_x &= 0, & p_t + up_x + vp_y &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Данная система описывает течения идеальной жидкости с сохранением давления вдоль траекторий, а также двумерные изотермические движения политропного газа.

Условие сохранения давления вдоль траекторий позволяет интерпретировать каждое решение рассматриваемой системы как течение жидкости со свободной границей, в качестве которой можно выбрать любую из изобар.

Систему (5) можно записать в лагранжевых координатах следующим образом:

$$z_\xi = iz_\eta, \quad \bar{z}_\eta = -\frac{z_\eta \bar{z}_\eta + 2}{z_\eta}, \quad (6)$$

где комплекснозначная функция $z(\xi, \eta) = x + iy$, $\eta = p$.

Доказана теорема, в которой утверждается, что все решения системы (6) являются решениями одной из трёх систем пассивных систем. Каждая из этих трёх систем полностью проинтегрирована. Среди найденных решений можно отметить: аналог волн Гёрстнера для движения жидкости в отсутствие тяжести, так называемые птолемеевские течения (рисунок 21), пульсирующее кольцо жидкости со свободными границами.

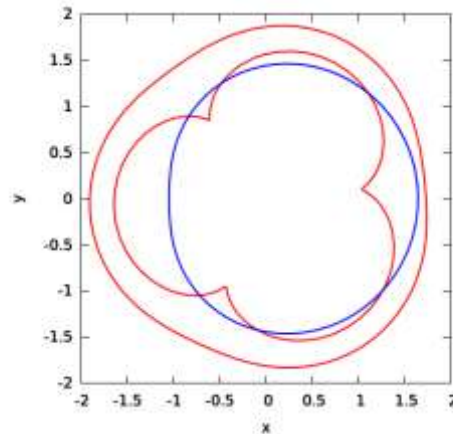


Рисунок 21 - Изобары (красный) и траектория выбранной частицы (синий) для одного из птолемеевских течений

6. Точные решения уравнения Буссинеска

С помощью линейных дифференциальных связей и метода Хироты найдены решения уравнения Буссинеска, зависящее от нескольких произвольных констант и

выражающееся через элементарные функции. Получены специальные типы волн, такие как волновые пакеты, "танцующие" волны и волны на солитонах (рисунки 22, 23).

Представлена удобная мультипликативная форма принципа суперпозиции, позволяющая получать из специальных типов волн более сложные структуры. В частности, среди них имеются структуры, описывающие взаимодействие волновых пакетов с "танцующими" солитонами и между собой. Данные структуры упруго взаимодействуют между собой. Кроме того, найдены новые решения уравнения Буссинеска, подобные солитонам, волновым пакетам, волнам на солитоне. Однако эти решения удовлетворяют нестандартным дисперсионным соотношениям и стремятся к некоторой константе при $|x|$, стремящемся к бесконечности.

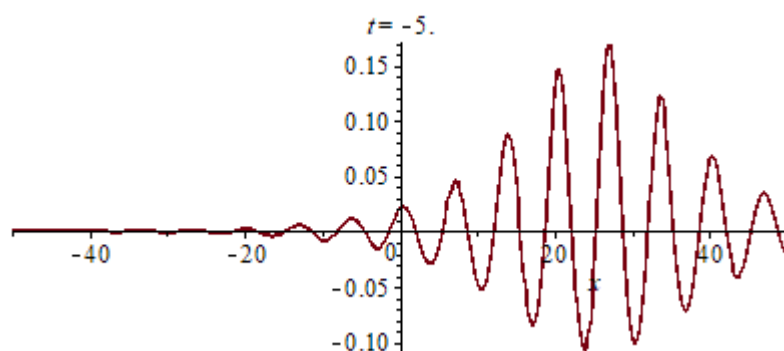


Рисунок 22 - Волновой пакет, являющийся точным решением уравнения Буссинеска

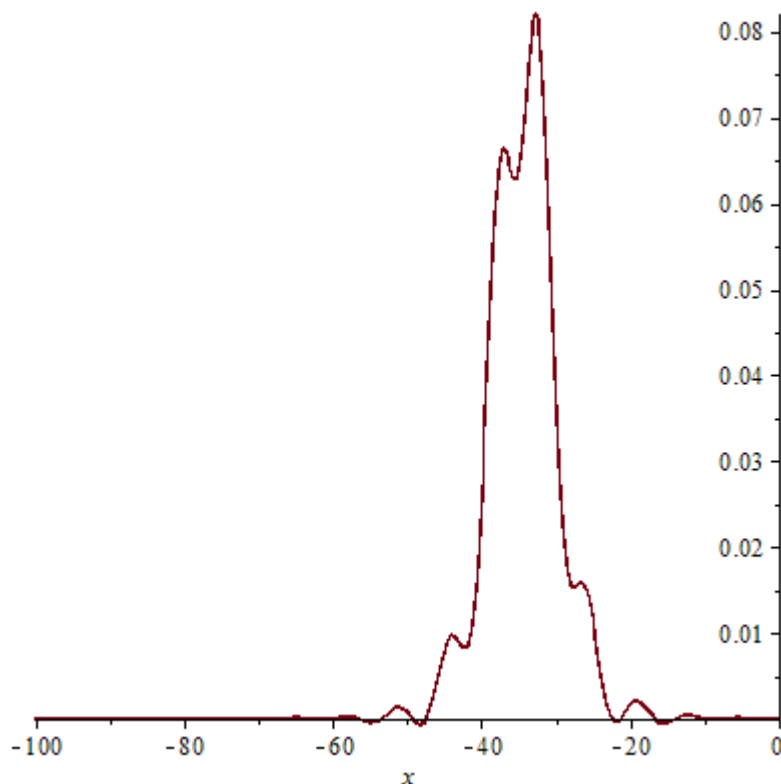


Рисунок 23 - Волны на солитоне полученные интегрированием уравнения Буссинеска

Найдены новые точные решения системы Буссинеска, которые описывают дисперсионные нелинейные волны на мелкой воде. Полученные решения описывают не только солитонов, но неупругое взаимодействие уединенных волн.

7. Новый метод исследования совместности ДУ. Новое определение симметрии

Предложен новый алгебраический подход к изучению совместности уравнений с частными производными. В основе подхода лежат методы коммутативной и дифференциальной алгебры, алгебраической геометрии и базисов Гребнера. Основным понятием является пассивная система уравнений, которая формулируется в терминах дифференциальных идеалов. Получен достаточный критерий пассивности системы уравнений с частными производными. Доказано, что при выполнении этих достаточных условий система задает гладкое бесконечномерное многообразие в пространстве джетов.

Приведены примеры приведения систем к пассивной форме.

Предложен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Метод основан на поиске так называемых промежуточных систем, каждое решение которых удовлетворяет исходному уравнению. Основное внимание уделяется нелинейному волновому уравнению второго порядка, а также нелинейному диффузионному уравнению. Приведены примеры промежуточных систем и соответствующих решений.

Введено новые понятия симметрий и законов сохранения для дифференциальных идеалов коммутативных колец с несколькими дифференцированиями. Определение симметрии идеала состоит из условий контактности и инвариантности, точнее дифференцирование кольца является симметрией идеала, если оно сохраняет идеал и модуль заданных дифференцирований. Получен критерий того, что дифференцирование кольца является симметрией идеала. Показано, что множество симметрий идеала образует кольцо Ли. Вводится понятие полиномиальной системы уравнений с частными производными с коэффициентами в некотором кольце. Получено условие того, что векторное поле является контактным.

8. Новые свойства слойно конечных групп

Математическое моделирование бесконечных дискретных объектов возможно, если эти объекты удовлетворяют каким-либо условиям конечности. Если все слои элементов в бесконечной группе конечны, то для такой группы возможно функциональное описание мощности слоев. Слоем называется множество всех элементов группы одного порядка. Показано, что очень хорошо поддаются визуализации примарные слойно конечные группы и слойно конечные группы в случае двух простых делителей порядков элементов группы. Для примарного случая удобно использовать обычное графическое представление. В случае двух простых делителей порядков элементов слойно конечной

группы, проведена визуализация функций мощности слоев при помощи поверхностей в трехмерном пространстве. Для большего числа простых делителей порядков элементов предложен подход моделирования слойной структуры полной слойно конечной группы при помощи подгруппового анализа. Исследованы функции мощности слоев для полных слойно конечных групп и некоторых конечных расширений этих групп, продемонстрированы их графические представления. Нижним слоем группы называется множество её элементов простых порядков. Установлены условия, при которых группа распознается по нижнему слою. Получена характеристика почти слойно конечных групп при наложении дополнительных условий: Пусть G – периодическая группа Шункова, централизаторы каждой инволюции которой черниковские. Если нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G почти слойно конечен, то G – почти слойно конечная группа.

Блок 3. Применение математических моделей при изучении природных гидрофизических процессов

1. Численное моделирование гидрофизических процессов в стратифицированных озерах и водохранилищах

В стратифицированном озере выделяют верхний (эпилимнион) и глубинный (гиполимнион) слои, в которых градиенты плотности малы. Между ними располагается слой воды (металимнион), в пределах которого градиент плотности велик. Плотностная стратификация зависит от вертикальных градиентов температуры и солености воды. В период отсутствия ледяного покрова вертикальное перемешивание стратифицированного озера осуществляется вертикальным турбулентным обменом и ветровыми течениями. В зимний период в соленых озерах при образовании льда в результате кристаллизации воды высвобождается соль. Формируется неустойчивая плотностная стратификация, приводящая к интенсивной вертикальной циркуляции и образованию слоя конвективного перемешивания.

Весной за счет таяния льда формируется тонкий поверхностный слой малой солености. В процессе ветрового перемешивания соленость в верхнем слое возрастает. В весенний и летний периоды из-за прогрева верхнего слоя воды плотностная стратификация увеличивается. Осенью происходит охлаждение водоема, перед ледоставом температура воды мало изменяется по глубине и плотностная стратификация, в основном, определяется градиентом солености.

Многие соленые озера относятся к меромиктическим, в которых в течение как минимум одного года водная толща не перемешивается до дна. Для исследования динамики вертикальной гидрофизической структуры стратифицированного озера можно использовать горизонтально однородную модель.

Одномерная модель для периода отсутствия ледяного покрова основывается на решении одномерных в вертикальном направлении уравнений диффузии относительно температуры и солености воды.

По разработанной компьютерной модели выполнены расчеты вертикальных распределений температуры и солености воды в озерах Ши́ра, Шунет и Учум. На рисунке 24 приведены результаты расчетов (сплошные линии) и данные натурных измерений (точки). Теоретические результаты согласуются с натурными данными в различные сезоны. Рассчитанное положение нижней границы слоя конвективного перемешивания в озере Учум $\xi_k = 5.45$ м близко к реальному 5.64 м. Измеренная толщина ледяного покрова 11 марта 2016 г – 72 см, рассчитанная – 72.35 см.

Толщина льда в озере Ши́ра, измеренная в марте 2015 г., равна 92 см, рассчитанная – 94.5 см. Показано, что сильное ветровое воздействие осенью 2014 г. в сочетании с достаточно толстым льдом зимой 2015 г. явились причиной смены режима перемешивания в данном водоеме с меромиктического (неполное перемешивание) на голомиктический (полное перемешивание).

Предложенную простую математическую модель можно применять для прогноза многолетней динамики вертикальной термохалинной структуры соленого озера при гипотетических сценариях метеоусловий, вызванных глобальными изменениями климата (слишком теплые или холодные сезоны, ураганные ветры и т.п.).

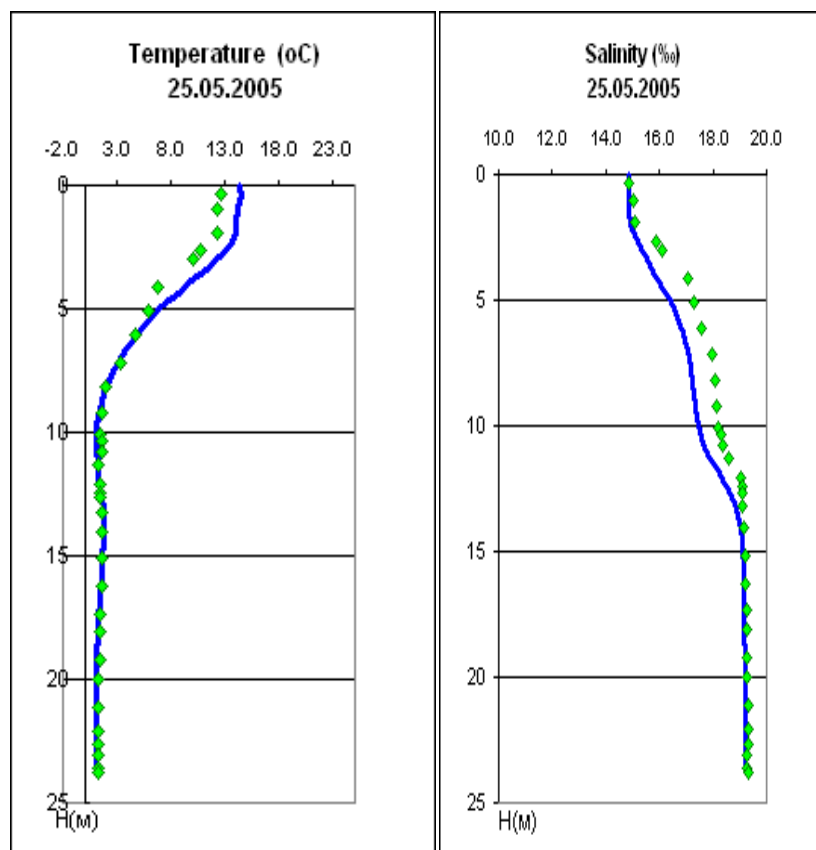


Рисунок 24 - Озеро Ши́ра. Распределение температуры и примеси по глубине

Объектом исследований являлось стратифицированное Красноярское водохранилище. Для численного исследования гидротермического режима Красноярского водохранилища применяется схема ложа водохранилища в виде районов с непрерывным изменением глубины и скачкообразным изменением ширины. Рассматривается численный алгоритм для исследования двумерных в вертикальной плоскости стратифицированных течений в проточных водоемах с учетом силы Кориолиса.

Для мелких водоемов ($H < D$, D – глубина трения) влиянием параметра Кориолиса можно пренебречь. Для глубоких водоемов ($H > D$) предложен способ учета силы Кориолиса. На первом этапе определяется горизонтальная компонента скорости течения без учета напряжения ветра по двумерной в вертикальной плоскости модели. На втором этапе по приближению Экмана вычисляются горизонтальные составляющие скоростей ветровых течений. На третьем этапе сумма найденных составляющих определяет окончательные значения скоростей.

Проведены численные эксперименты по определению температурного режима Красноярского водохранилища в летний период по упрощенной двумерной в вертикальной плоскости модели с учетом силы Кориолиса. [Belolipetskii V. M., Genova S.N. Simplified mathematical model of the hydrothermal regime of the Krasnoyarsk reservoir. Thermal science: Year 2019, Vol. 23, Suppl. 2, pp. 455-462]. Использовались подробные метеоданные для соответствующего периода. На рисунке 25 показаны рассчитанные температурные профили (сплошные линии) в створах Красноярского водохранилища по метеоданным 1977г (на 10 июля). Начальные условия – натурные данные (25 мая 1977 г.). Результаты расчетов согласуются с натурными измерениями (точки). Разработанная компьютерная модель позволяет прогнозировать гидротермический режим проточного водохранилища для различных сценариев изменений погодных условий.

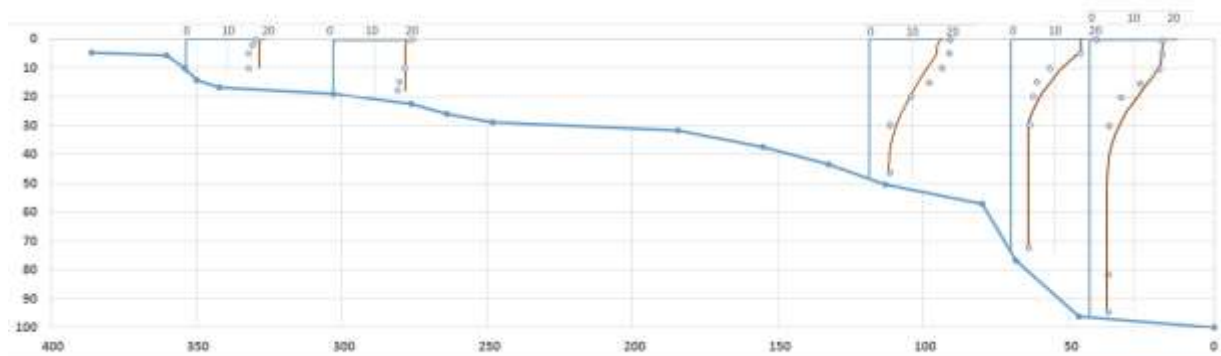


Рисунок 25 - Вертикальные распределения температуры воды в створах Красноярского Водоохранилища

В большинстве случаев реальные геофизические среды являются стратифицированными. Примером течения, в котором определяющую роль играет вертикальный турбулентный обмен, является течение, возникающее при заглублении турбулентного слоя жидкости в устойчиво стратифицированном водоеме под воздействием ветра. Выполнено численное моделирование заглубления турбулентного слоя в устойчиво стратифицированной жидкости под действием касательного напряжения. Для коэффициента вертикального турбулентного обмена использовалась формула Прандтля-Обухова. Результаты расчетов согласуются с известными экспериментальными данными и расчетами с использованием классической $\epsilon-\epsilon$ -модели турбулентности и ее модификаций.

2. Упрощенные модели динамики вечной мерзлоты

Для исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты в болотно-озёрных ландшафтах построена одномерная малоразмерная численная модель [Belolipetskii Victor M., Genova Svetlana N. A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2)].

Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Рассматриваются территории, на которых имеются озёра или болота. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются следующие слои: талый грунт, мёрзлый грунт, вода, лёд, снег. Возможны различные варианты расположения этих слоёв.

При переходе с одного варианта на другой слои добавляются или исключаются. Предложен численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоёв, позволяющий описать годовую динамику замерзания/оттаивания вечной мерзлоты в болотно-озёрных ландшафтах и оценить влияние изменения климата.

На рисунке 26 показаны варианты для весеннего и летнего периодов. Разработанные малоразмерные численные модели применялись для исследования вертикальной структуры вечной мерзлоты на острове Самойловский. Выполнено сравнение результатов расчетов с имеющимися данными натурных измерений. Проведены численные эксперименты для нескольких сценариев изменения глобального климата. Глобальное потепление вызывает изменение температурного режима грунтов, увеличивает глубину протаивания в местах распространения многолетнемерзлых пород. Рассмотрены варианты глобального потепления с повышением среднесуточной температуры воздуха на 2^0 и 4^0 C.

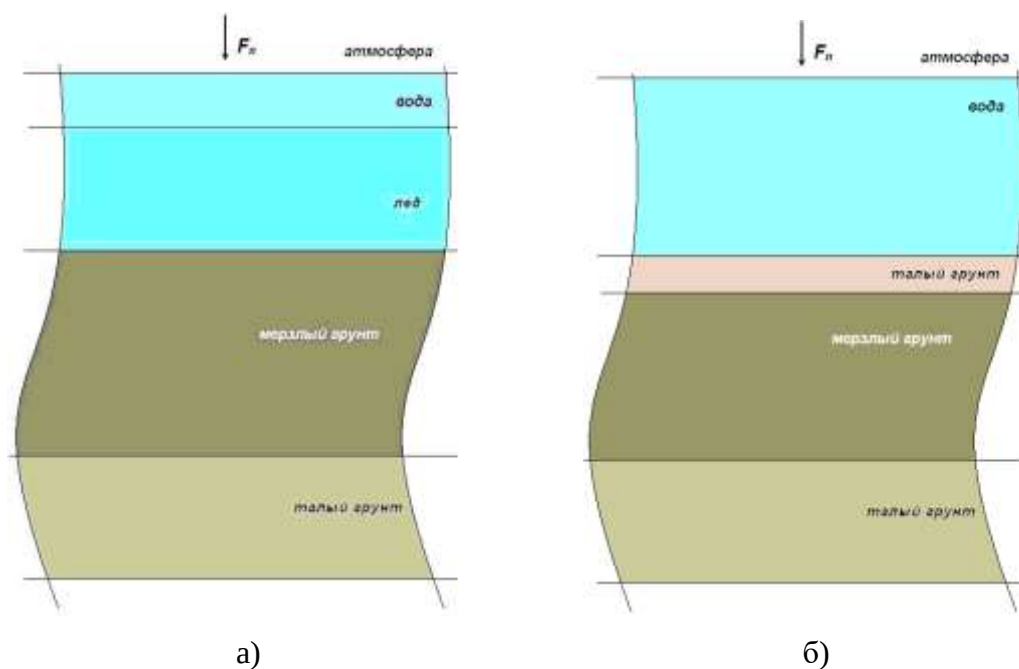


Рисунок 26 – Годовая динамика вечной мерзлоты

При потеплении на 2^0 максимальная толщина сезонно талого слоя увеличивается на 10 см, при потеплении на 4^0 - на 30 см. В первом варианте талый слой зимой полностью замерзает. Возрастают интервалы времени существования талого грунта. Однако при потеплении на 4^0 талый слой зимой полностью не замерзает, образуется талый слой грунта (талики) между слоем сезонного промерзания и верхней границей многолетнемерзлых пород.

Результаты модельных расчетов показывают, что сезонные протаивания в болотно-озерных ландшафтах могут проходить как с формированием талого слоя (талики) зимой, так и без него (рисунок 27). Талик — участок незамерзающей породы среди многолетней мерзлоты, распространяющийся вглубь от слоя сезонного промерзания.

Изменение климата ($\pm 2^0 C$) приведет к изменению глубины протаивания на 10-15 см. Для районов, отличающихся широтой на 3^0 при одинаковых метеоусловиях, глубины протаивания практически совпадают.

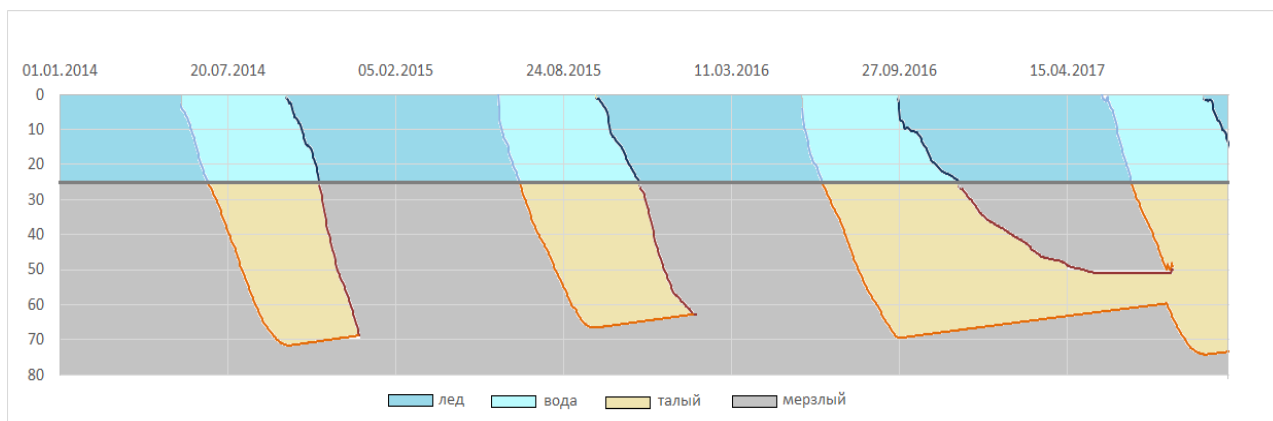


Рисунок 27 - Глубина талого грунта. Озерно-болотный ландшафт

Результаты расчетов динамики вертикальной структуры вечной мерзлоты показали, что предложенная одномерная модель позволяет описать различные режимы сезонного промерзания/протаивания грунта в зоне вечной мерзлоты (в болотно-озерных ландшафтах), в том числе, образование талика.

После вычисления толщин мёрзлых и талых слоёв, распределений температуры в слоях оцениваются вертикальные распределения биохимических компонентов. Математическая модель динамики концентраций биохимических компонентов основана на уравнении диффузии. Предполагается, что в мёрзлой фазе (мёрзлый грунт, лёд) отсутствует диффузия примесей и прекращается трансформация субстанций (т. е. при замерзании воды или талого грунта биохимические компоненты депонируются). При таянии льда или мёрзлого грунта биохимические процессы и диффузия примесей возобновляются.

Для каждого варианта ставится задача с условиями сопряжения на границах слоёв и условиями на верхней и нижней границах. На верхней границе вода – атмосфера ставится условие третьего рода. На нижней границе слоя вечной мерзлоты задаются концентрации биохимических параметров. На границах между талыми слоями (вода – талый грунт) ставятся условия сопряжения: равенства концентраций и потоков вещества по обе стороны раздела.

На границах фазового перехода задаются равенства концентраций биохимических параметров. Предполагается, что на этих границах происходит либо депонирование веществ из талого слоя, либо расконсервация из мёрзлого слоя. Рассмотрена примитивная модель эмиссии метана в болотно-озёрных ландшафтах. Использовался упрощённый вариант математической модели из работы [Анисимов О.А., Лавров С.А., Ренева С.А., 2005].

Сформулированная задача решается численно по неявной схеме с учётом вычисленных толщин мёрзлых и талых слоёв, вертикальных распределений температуры. Выполнены пробные расчёты. При потеплении увеличивается глубина сезонного оттаивания грунта, возрастает концентрация метана в грунте и увеличивается эмиссия метана.

Создан программный модуль для исследования биохимических процессов, встроенный в компьютерную модель процессов замерзания/оттаивания в болотно-озёрных ландшафтах.

Наиболее изучаемой и достаточно востребованной для практических целей характеристикой в районах вечной мерзлоты является глубина сезонного протаивания. В связи с изменением глобальной температуры воздуха представляет интерес оценка

реакции вечной мерзлоты на изменение климата. При потеплении климата увеличивается как толщина слоя талого грунта, так и продолжительность периода существования талика. Рассмотрен способ мониторинга вечной мерзлоты в полярных районах суши с помощью дистанционного зондирования Земли (определения температуры подстилающей поверхности) и полуэмпирической модели динамики толщины талого слоя в летний период.

Использовались измеренные на метеостанции озера Тулик (Аляска) температуры почвы на глубине от 0 до 1 м и температура воздуха (в 2009 - 2012 гг.).

Летом в районах суши в вертикальном направлении образуется два слоя, верхний – талый, нижний – мерзлый. Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решения задачи Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мерзлой и талой зон. На границах фазового перехода (замерзания-таяния) ставятся условия равенства температур температуре фазового перехода и условие Стефана, на поверхности суши ставится условие Дирихле. Калибровочные коэффициенты математической модели определяются по эмпирическим соотношениям.

В летний период в вертикальном направлении образуется два слоя, верхний – талый, нижний – мерзлый. Вертикальные распределения температуры в каждом слое определяются из решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. на поверхности суши ставится условие Дирихле.

Задача решается в новых независимых переменных (t, ξ_i) : $t = t$,

$\xi_i = (z_i - h_{i-1}) / \delta_i$, $0 \leq \xi_i \leq 1$, $i = 1, 2$. Уравнения и граничные условия запишутся в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + w_i \frac{\partial T_i}{\partial \xi_i} = \frac{\lambda_i}{c_{v,i} \cdot \delta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 T_i}{\partial \xi_i^2},$$

$$T_1|_{\xi_1=1} = T_2|_{\xi_2=0} = T_{ph}, \quad T_{2,j2} = T_H, \quad (1)$$

$$\rho_2 L_2 \frac{dh_1}{dt} = \left(\frac{\lambda_2}{\delta_2} \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \right) \bigg|_{\xi_2=0} - \left(\frac{\lambda_1}{\delta_1} \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \right) \bigg|_{\xi_1=1},$$

$$w_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{1}{\delta_i} \left[(\xi_i - 1) \frac{dh_{i-1}}{dt} - \xi_i \frac{dh_i}{dt} \right].$$

Здесь $T_i(t, z)$ – температура i – го слоя, $i = 1, 2$, t – время, z – вертикальная координата (направлена вниз, м), $h_{i-1} \leq z \leq h_i$, $h_0 = 0$, $h_2 = H$, $\delta_1 = h_1$, $\delta_2 = H - h_1$ - толщины

соответствующих слоев, $z = h_1$ - координата границы между талым и мерзлым слоями, T_{ph} - температура фазового перехода, ρ_i - плотность i - го слоя, L_2 – скрытая теплота плавления грунта, λ_i - коэффициент теплопроводности, $c_{v,i}$ - объемный коэффициент теплоемкости грунта.

Рассмотренная математическая модель динамики вечной мерзлоты в летний период содержит неопределенные параметры. Значения этих параметров определялись с помощью эмпирических формул, вычислительных экспериментов и результатов натурных измерений. В результате модель настраивается на конкретный объект исследований. В данной работе моделируется динамика вечной мерзлоты в летний период в районе озера Тулик (Аляска). В работе использованы массивы суточных значений температуры воздуха, температуры почвы на глубине до 1.0 м, положений заглубления талого слоя. Для исследуемого объекта известны температура воздуха, температура почвы и глубина талого слоя в летний период. В таблице 2 приведены значения среднемесячных температур воздуха.

Таблица 2. Среднемесячные температуры воздуха (метеостанция озера Тулик)

	июнь	июль	август
2009 г.	8.4	12.74	5.36
2010 г.	9.51	9.8	9.14
2011 г.	7.97	10.35	7.81
2012 г.	10.8	11.7	8.36

Месячные значения испаряемости рассчитываются по формуле Иванова

$$E_0 = 0.0018 \cdot (T_a + 25)^2 (100 - \psi). \quad (2)$$

Здесь E_0 - средняя за месяц испаряемость (мм/мес), T_a - среднемесячная температура воздуха, ψ - относительная влажность воздуха (%).

Для полярных районов испарение определяется по формуле [Анисимов О.А., Белолуцкая М.А. Влияние изменения климата на вечную мерзлоту: прогнозирование и оценка неопределенности // В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. СПб.: Гидрометеиздат. 2003. Т. XIX.] $E = E_0 \cdot (W/W_0)$, W - влажность грунта (мм/м), величина критической влажности почвы W_0 принимается равной 200 (мм/м). Из уравнения баланса влаги находится связь влажности грунта с осадками и испарением:

$$\begin{aligned}
W &= W_0 \frac{1}{0.2 + E_0 / r} \quad \text{при } r \leq E_0, \\
W &= W_0 \frac{1}{\mu + E_0 / r} \quad \text{при } r \leq E_0, \quad E_0 / r > 1 - \mu, \\
W &= W_0 \frac{1 - E_0 / r}{\mu} \quad \text{при } r \leq E_0, \quad E_0 / r < 1 - \mu.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\mu = \sqrt{0.04 \cdot [1 - (1 - E_0 / r)^2] + (1 - E_0 / r)^2},$$

r – осадки (мм/мес). Скрытая теплота плавления среды L (ккал/кг) зависит от влажности грунта:

$$L = L_w \cdot W_v, \tag{4}$$

$L_w = 80$ ккал/кг – скрытая теплота плавления льда, $W_v = 10^{-3} \cdot W$, W – влажность грунта (мм/м). Коэффициенты теплопроводности грунта λ_1, λ_2 рассчитываются в зависимости от его влажности и фазового состояния по эмпирической формуле [Павлов А.В. Теплофизика ландшафтов. Новосибирск, Наука, 1979]:

$$\lambda_i = k(0.001 \cdot \rho_{ck} + 10 \cdot W / \rho_{ck} - 1.1) - 11.6 \cdot W_0 / \rho_{ck}. \tag{5}$$

Здесь ρ_{ck} – плотность сухого грунта, (кг/м³), k – эмпирический коэффициент (задается табличным способом).

Объемный коэффициент теплоемкости грунтов $c_{v,i}$ рассчитывается по следующим эмпирическим формулам:

$$\begin{aligned}
c_{v,1} &= c_{ck} \cdot \rho_{ck} + 4180 \cdot W_1, \\
c_{v,2} &= c_{ck} \cdot \rho_{ck} + 4180 \cdot W_n + 2090 (W_2 - W_n),
\end{aligned} \tag{6}$$

здесь W_2 – льдистость, W_1 – влажность грунта, W_n – незамерзшая влага (мм/м).

Этапы полуэмпирической модели.

Этап 1. Задаются среднемесячные температуры воздуха и осадки за месяц, среднесуточные температуры подстилающей поверхности (из данных дистанционного зондирования или из сценарных вариантов).

Этап 2. По формулам (2) – (6) вычисляются испаряемость E_0 , влажность грунта W , скрытая теплота плавления среды L , коэффициенты теплопроводности грунта λ_1, λ_2 , объемные коэффициенты теплоемкости грунтов $c_{v,i}$.

Этап 3. Выполняются расчеты по численному алгоритму для задачи (1).

Из проведенных численных экспериментов следует, что скоростями движений границы фазового перехода можно пренебречь ($w_i \equiv 0$). Результаты расчетов с учетом w_i и без учета практически совпали.

На рисунках 28, 29 показана динамика заглубления талого слоя летом 2011 г и 2012 г. (точки - натурные значения, линии - расчеты). Получено согласование теоретических значений с натурными.

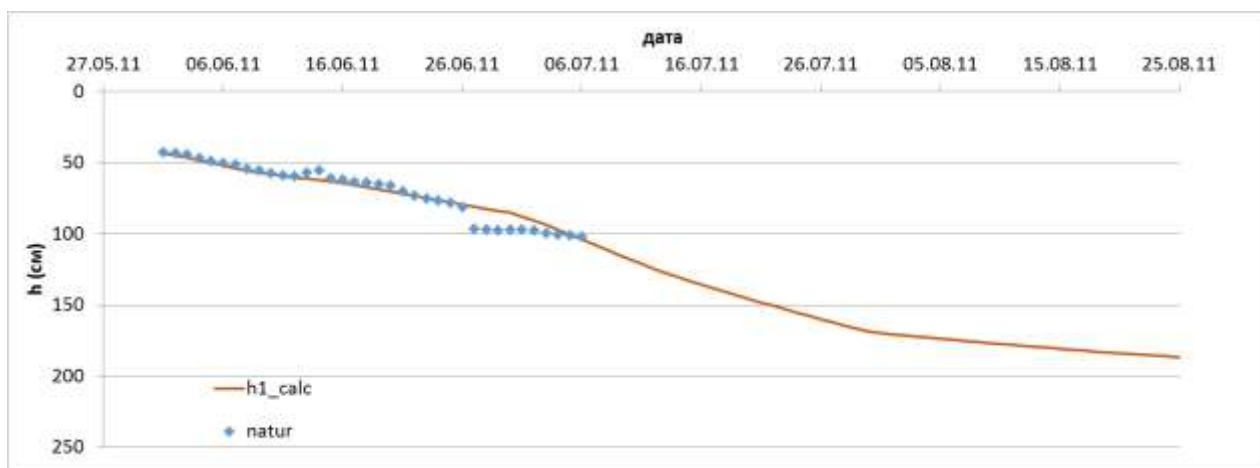


Рисунок 28 – Глубина талого слоя летом 2011 г.

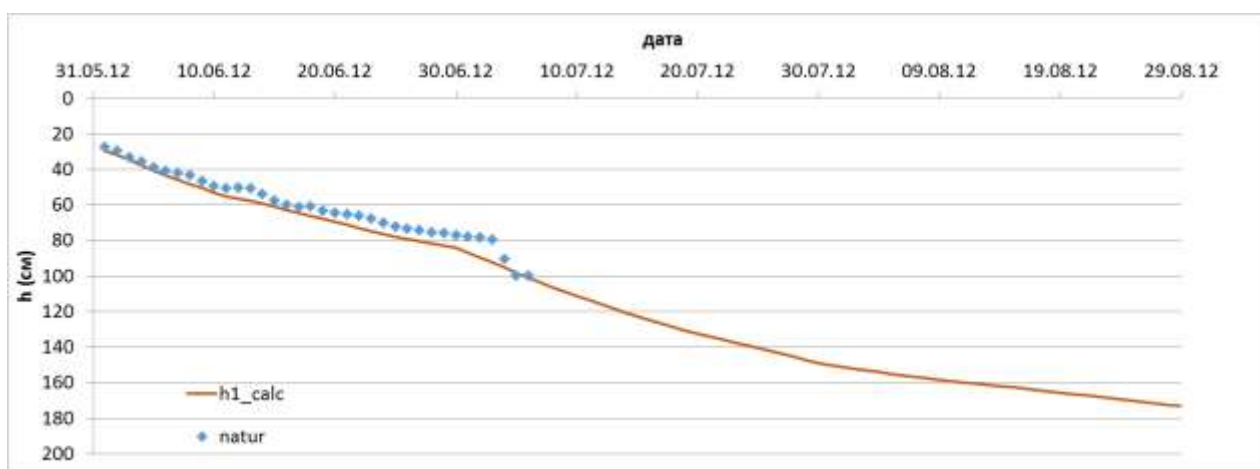


Рисунок 29 - Глубина талого слоя летом 2012 г.

3. Исследование экологического режима озера Шира с использованием натурных измерений и численного моделирования

Для анализа натурных измерений температуры и скорости в озере Шира был применен метод главных компонент (метод эмпирических ортогональных функций). При рассмотрении первых от поверхности точек измерения получаем следующую картину распределения температуры на поверхности (рисунок 30):

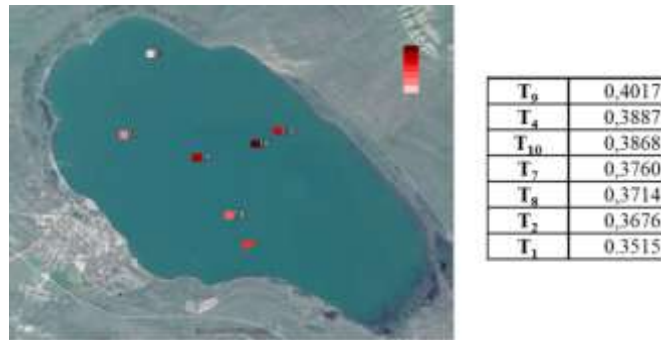


Рисунок 30 - Первая мода для поверхностной температуры, аккумулирует 85% энергии

Поведение первого модального коэффициента $E_1(t_k)$ для поверхностной температуры и изменение температуры воздуха в период с 27.06.2015 по 01.08.2015 показаны на рисунке 31.

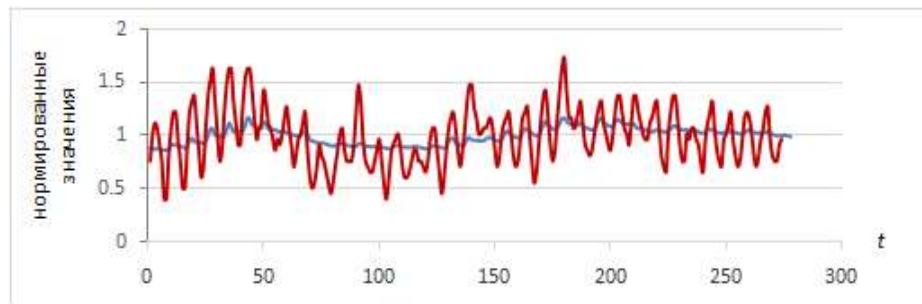


Рисунок 31 - Красный цвет – температура воздуха, отнесенная к среднему значению, синий цвет – первый модальный коэффициент, отнесенный к среднему значению

При удалении из значений температуры воздуха суточных колебаний методом скользящего среднего по восьми точкам коэффициент корреляции между температурой воздуха и первым модальным коэффициентом равен 0,705, что означает сильную линейную связь между этими величинами.

Методом эмпирических ортогональных функций проведен анализ натурных измерений скорости прибором ADCP. На рисунке 32 в верхней части рисунка – годограф первой моды, в нижней части – амплитуда и фаза первого модального коэффициента.

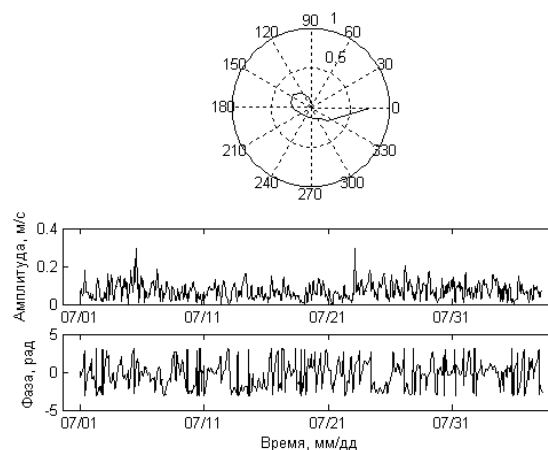


Рисунок 32 - Вверху - годограф первой моды, внизу - амплитуда и фаза изменения первой моды во времени

На основе анализа годографа первой моды получена оценка коэффициента вертикального турбулентного обмена $10,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Проведена серия расчетов с использованием трехмерной модели ROMS с учетом батиметрии озера Шира, распределения температуры и солености, типичной для озера Шира в летний период, нулевых начальных скоростях и возвышения свободной поверхности, различных ветровых сценариях.

После остановки ветра в случае внезапно начинающегося и внезапно заканчивающегося постоянного ветра северо-восточного, юго-восточного, восточного и южного направлений при скорости 8-10 м/с в течение 8 часов визуально наблюдаются колебания свободной поверхности и вращение с периодом 11 и/или 6 часов. Движение происходит против часовой стрелки и максимальные значения достигаются на противоположных берегах бассейна, что соответствует прохождению волны Кельвина, сама свободная поверхность также подвергается колебаниям меньшего масштаба.

В центральной точке озера наблюдаются незначительные колебания вертикального профиля температуры и солености, в восточной и западной колебания достигают 3-х метров.

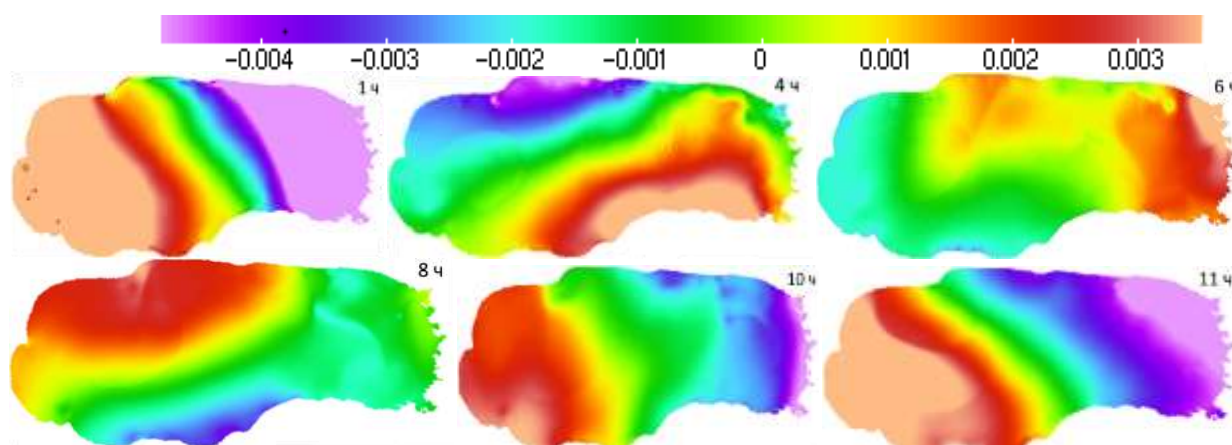


Рисунок 33 - Возвышение свободной поверхности, м. Колебания после прекращения действия восьмичасового северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с

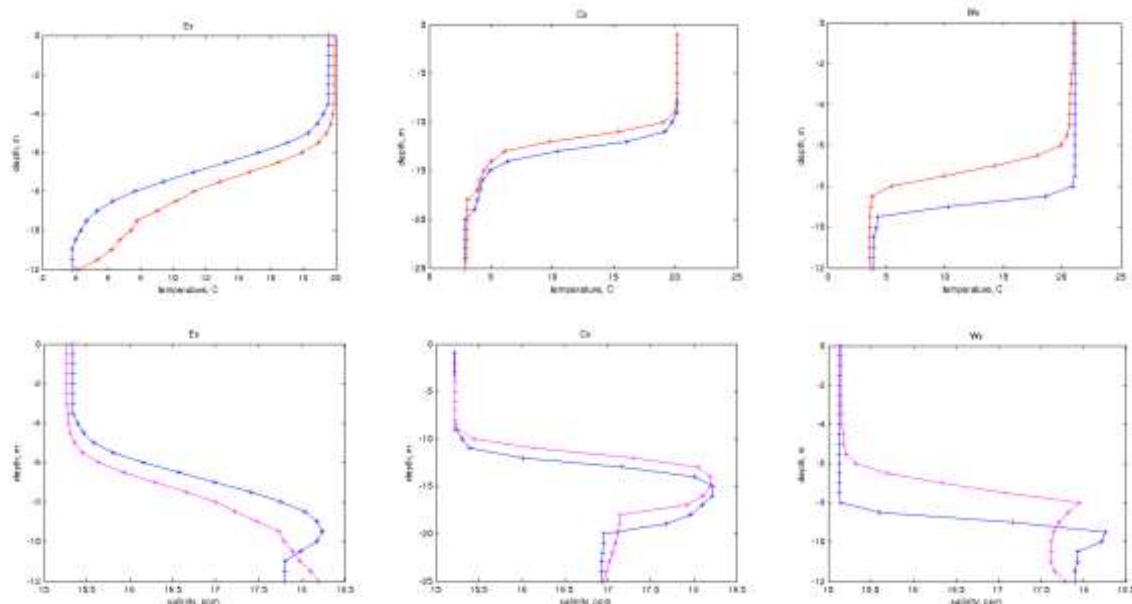


Рисунок 34 - Профили температуры и солёности после прекращения действия восьмичасового северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с. Верхняя часть рисунка – вертикальные профили температуры, $^{\circ}\text{C}$, нижняя – вертикальные профили солёности, ppt. Профили слева направо: в восточной части озера, в центральной части, в западной. Синяя линия – до начала прохождения внутренней волны, красная линия – после прохождения

В случае западного, юго-западного, северо-западного и северного направлений ветра возникают сейшевые колебания. На рисунке 35 показаны колебания своюодной поверхности, возникающие после воздействия восьмичасового юго-западного ветра. Проведены расчеты для озера Шира за весь летний период (температура и влажность воздуха, ветер, осадки взяты с метеостанции пос. Шира). Течение, которое появляется при прекращении действия северо-восточного ветра 13.07.2019 г. в 01:00.

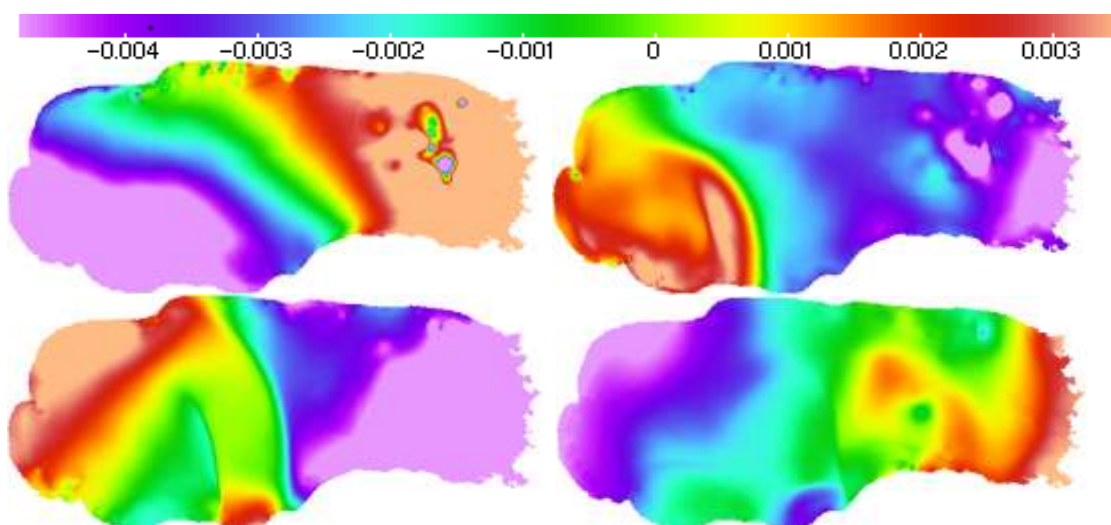


Рисунок 35 - Возвышение свободной поверхности, м. Колебания после прекращения действия восьмичасового юго-западного ветра со скоростью 8 м/с

Наблюдается колебания свободной поверхности с вращением против часовой стрелки с периодом 6 часов.

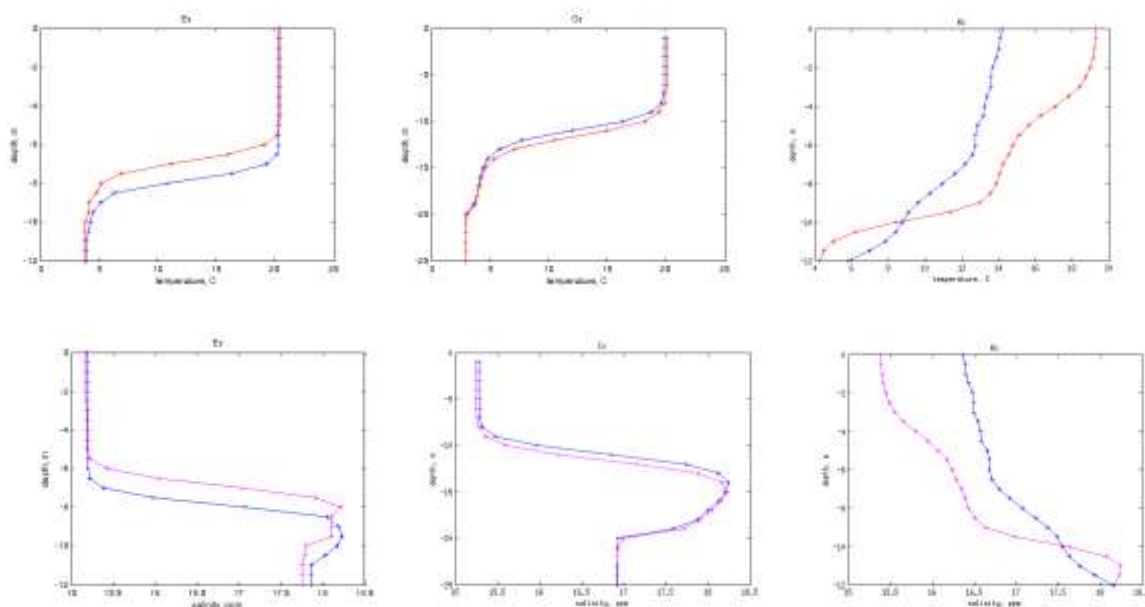


Рисунок 36 - Профили температуры и солёности после прекращения действия восьмичасового юго-западного ветра со скоростью 8 м/с. Верхняя часть рисунка – вертикальные профили температуры, $^{\circ}\text{C}$, нижняя – вертикальные профили солёности, ppt. Профили слева направо: в восточной части озера, в центральной части, в западной. Синяя линия – до начала прохождения внутренней волны, красная линия – после прохождения

В период прохождения внутренней волны наблюдается уменьшение температуры в восточной мелководной зоне водоема.

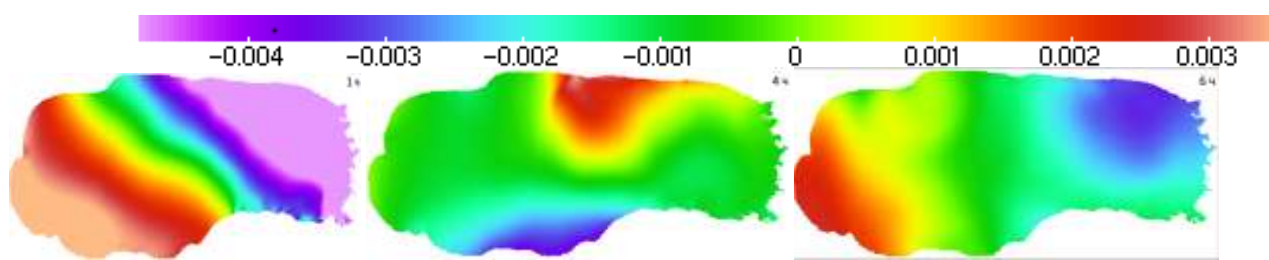


Рисунок 37 - Возвышение свободной поверхности, м.

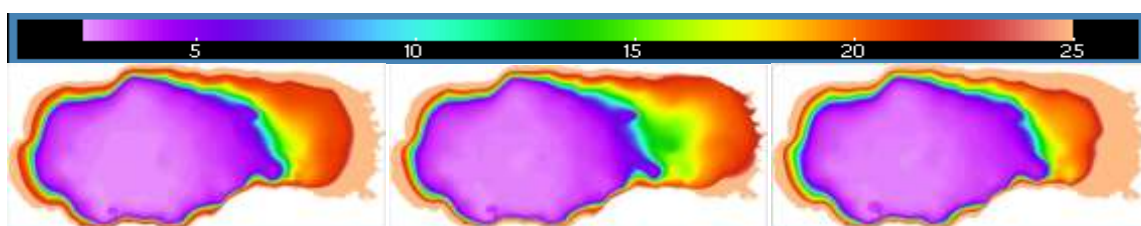


Рисунок 38 - Температура в придонном слое, $^{\circ}\text{C}$. Слева направо: распределение температуры до прохождения внутренней волны, во время прохождения, после прохождения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За период выполнения проекта получены следующие основные результаты

1. На основе двумерного и трёхмерного точных решений групповой природы изучены характеристики конвективных режимов, возникающих в двухслойных системах жидкость – газ, в том числе в условиях фазового перехода диффузионного типа. Исследовано влияние теплофизических свойств жидкого теплоносителя, геометрии системы, гравитационных и термодиффузионных эффектов на параметры течений. Для двумерного решения рассмотрен ряд задач линейной устойчивости.

2. Разработан программный комплекс для расчёта и визуализации (как статичной, так и в динамике) характеристик нестационарных течений в двухслойной системе с деформируемой поверхностью раздела, который может применяться для расчётов как основных, так и возмущённых течений двухслойной жидкости (последние возникают при потере устойчивости основного состояния под действием произвольных, необязательно малых, нестационарных возмущений). Проведено численное моделирование динамики двухслойной системы в условиях локального нагрева в полной постановке в силовых полях различной интенсивности при разных режимах работы и вариантах размещения нагревателей на границах плоской кюветы.

3. Дан анализ задачи о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в канале с учётом энергии межфазного теплообмена на общей границе раздела. Стационарная задача о ползущем течении, когда малы термокапиллярные и термоконцентрационные числа Марангони, исследована на устойчивость. Показано, что длинноволновые возмущения монотонно затухают со временем. Для задачи о движении между двумя твердыми стенками, на которых заданы условия прилипания, линейное распределение температуры и отсутствие потока вещества получены априорные оценки на решение, показывающие, что если градиент температуры на твердых стенках и его производные ограничены, а функция, задающая расход жидкости, убывает со временем, тогда скорость и искомый градиент давления являются ограниченными функциями и сходятся к соответствующим стационарным распределениям с ростом времени. Решение задачи получено в виде рядов, отмечено, что необходимым условием сходимости данного решения к построенному стационарному решению является выполнение интегрального равенства, связывающего начальный градиент концентрации со стационарным значением градиента температуры на стенках и расходом.

4. Исследованы однонаправленные, в том числе и двухслойные, движения жидкости в плоском канале. При этом на твердых стенках задается нестационарный градиент температуры, что позволяет управлять движением жидкостей в канале.

Возникающие начально-краевые задачи являются обратными, поскольку содержат неизвестный градиент давления. Для этих задач получены априорные оценки решения в равномерной метрике и указаны условия на входные данные, когда решения с ростом времени выходят на стационарный режим. Численными методами прослежена эволюция скоростей и температур для конкретных жидкостей и толщины канала для различных заданий градиентов на твёрдых стенках.

5. Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твёрдыми стенками на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E . Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряжённая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения. В случае, когда отсутствует влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоёв ($E=0$), найдено два решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные структуры течения и проведён анализ влияния безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений.

6. Изучена задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой внешней стенкой и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Граница раздела обладает поверхностным натяжением, которое линейно зависит от температуры. Учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. С математической точки зрения, возникающая начально-краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль оси цилиндра. Для решения задачи применяется модифицированный метод Галёркина. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Построены характерные структуры течения. Исследовано влияние числа Марангони и параметра, характеризующего изменение межфазной энергии, на интенсивность возникающих течений.

7. Решена задача групповой классификации для системы уравнений термодиффузионного теплообмена, коэффициенты переноса которой (теплопроводности, диффузии, параметры Дюфура и Соре) зависят от температуры и

концентрации. Найдена основная алгебра Ли. В случаях, когда эффектом Дюфора можно пренебречь (это выполнено для большинства жидких смесей), найдены все расширения основной алгебры. Для определения спецификаций коэффициентов переноса и операторов, расширяющих основную алгебру, получено 18 классифицирующих уравнений, представляющих собой линейные уравнения в частных производных первого порядка. Результаты представлены в виде таблиц и теорем, удобных для практического использования. Сформулированы и доказаны теоремы, помогающие упростить решение задач групповой классификации для общих систем уравнений диффузии многокомпонентных сред.

8. Решена задача ак. Л. В. Овсянникова об исследовании переопределённой системы, которая описывает течения идеальной жидкости с сохранением давления вдоль траекторий, а также двумерные изотермические движения политропного газа. Каждое решение можно интерпретировать как течение жидкости со свободной границей. Показано, что в комплексных лагранжевых координатах решения новой системы являются решениями одной из трёх пассивных систем. Каждая из этих трёх систем полностью проинтегрирована и решениям дана физическая интерпретация.

9. На основе группового анализа проведена редукция модифицированной $k-\omega$ модели Вилкокса в приближении дальнего следа к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Численными методами найдено решение соответствующей краевой задачи, которое описывает промежуточную асимптотику течения в дальнем турбулентном следе за движущимся телом. Произведено сравнения с экспериментальными данными. Совпадение с экспериментами на качественном уровне хорошее, количественные различия не превышают 10 – 15 процентов.

10. С помощью линейных дифференциальных связей и метода Хироты найдены решения уравнения Буссинеска, зависящее от нескольких произвольных констант и выражающееся через элементарные функции. Получены специальные типы волн, такие как волновые пакеты, "танцующие" волны и волны на солитонах. Представлена удобная мультипликативная форма принципа суперпозиции, позволяющая получать из специальных типов волн более сложные структуры. В частности, среди них имеются структуры, описывающие взаимодействие волновых пакетов с "танцующими" солитонами и между собой. Данные структуры упруго взаимодействуют между собой. Кроме того, найдены новые решения уравнения Буссинеска, подобные солитонам, волновым пакетам, волнам на солитоне. Однако эти решения удовлетворяют нестандартным дисперсионным соотношениям и стремятся к некоторой константе при $|x|$, стремящемся к бесконечности. Найдены новые точные решения системы Буссинеска, которые описывают дисперсионные

нелинейные волны на мелкой воде. Полученные решения описывают не только солитонов, но неупругое взаимодействие уединенных волн.

11. Предложен новый алгебраический подход к изучению совместности уравнений с частными производными. В основе подхода лежат методы коммутативной и дифференциальной алгебры, алгебраической геометрии и базисов Гребнера. Основным понятием является пассивная система уравнений, которая формулируется в терминах дифференциальных идеалов. Получен достаточный критерий пассивности системы уравнений с частными производными. Доказано, что при выполнении этих достаточных условий система задает гладкое бесконечномерное многообразие в пространстве джетов.

Предложен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Метод основан на поиске так называемых промежуточных систем, каждое решение которых удовлетворяет исходному уравнению. Основное внимание уделяется нелинейному волновому уравнению второго порядка, а также нелинейному диффузионному уравнению. Приведены примеры промежуточных систем и соответствующих решений.

12. Введено новые понятия симметрий и законов сохранения для дифференциальных идеалов коммутативных колец с несколькими дифференцированиями. Определение симметрии идеала состоит из условий контактности и инвариантности, точнее дифференцирование кольца является симметрией идеала, если оно сохраняет идеал и модуль заданных дифференцирований. Получен критерий того, что дифференцирование кольца является симметрией идеала. Показано, что множество симметрий идеала образует кольцо Ли. Вводится понятие полиномиальной системы уравнений с частными производными с коэффициентами в некотором кольце. Получено условие того, что векторное поле является контактным.

13. Разработана одномерная математическая модель для исследования вертикальных распределений температуры и солености воды соленого озера в различные сезоны года, учитывающая ледообразование и изменение уровня водной поверхности. Модель позволяет: оценить сезонные изменения вертикальных распределений температуры и солености воды в озерах в зависимости от метеоусловий; оценить динамику термоклина и халоклина в зависимости от стратификации и метеоусловий; определить возможность распространения слоя конвективного перемешивания до дна при уменьшении глубины озера в холодные зимы, что может привести к выходу сероводорода на поверхность.

Выполнена модификация двумерной (в вертикальной плоскости) численной модели для исследования стратифицированных течений в проточных водоемах. Проведены численные эксперименты по определению температурного режима Красноярского водохранилища в летний период по упрощенной двумерной в вертикальной плоскости

модели с учетом силы Кориолиса. Результаты расчетов согласуются с натурными измерениями.

14. Создан программный модуль для исследования биохимических процессов, встроенный в компьютерную модель процессов замерзания/оттаивания в болотно-озёрных ландшафтах, позволяющий использовать различные модели эмиссии метана.

Рассмотрен способ мониторинга вечной мерзлоты в полярных районах суши с помощью дистанционного зондирования Земли (определения температуры подстилающей поверхности, температуры воздуха, осадков) и полуэмпирической модели динамики толщины талого слоя в летний период. Параметры математической модели (коэффициенты теплопроводности, объемные коэффициенты теплоемкости грунта, влажность грунта) определялись с использованием эмпирических формул. Выполнена апробация предложенного метода для района озера Тулик (Аляска).

Решена задача с условиями сопряжения на границах слоёв и условиями на верхней и нижней границах на основе упрощённого варианта математической модели из работы [Анисимов О.А., Лавров С.А., Ренева С.А., 2005]. Результаты модельных расчетов показывают, что сезонные протаивания в болотно-озерных ландшафтах могут проходить как с формированием талого слоя (талика) зимой, так и без него.

15. С использованием метода главных компонент (эмпирических ортогональных функций) обработаны данные длительных наблюдений температуры и скорости в озере Шира. Показана высокая корреляция первого модального коэффициента поверхностной температуры и температурой воздуха. Анализ первой моды для данных распределения скорости по глубине позволил провести оценку коэффициента вертикального турбулентного обмена.

С использованием метода независимых компонент разработана процедура, позволяющая по натурным наблюдениям температуры быстро выделять периоды прохождения внутренних волн в озере Шира.

Обработаны данные движения дрейфтера (эксперимент 2018 г.) показавшие, что во время эксперимента ветер, построенный по данным трех ближайших метеостанций (Ужур, Лебяжье, Уйбат) провоцировал циклонический вихрь, что полностью соответствует траектории движения дрейфтера.

Трёхмерная численная модель ROMS (Regional Ocean Modeling System) адаптирована для расчета течений в озере Шира в летний период. Показано появление двух типов прохождения внутренних при внезапном прекращении действия ветра: сейши и волны Кельвина.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных
информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Bekezhanova V.B., Fliagin V.M., Goncharova O.N., Ivanova N.A., Klyuev D.S. Thermocapillary Deformations of a Two-Layer System of Liquids under Laser Beam Heating // International Journal of Multiphase Flow. 2020. V. 132. P. 103429. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103429
2. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Numerical study of the evaporative convection regimes in a three-dimensional channel for different types of liquid-phase coolant // International Journal of Thermal Sciences. 2020. V. 156. P. 106491. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2020.106491
3. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Influence of the Dufour and Soret effects on the characteristics of evaporating liquid flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V. 154. P. 119696. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119696
4. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Impact of Gravity on the Flow Pattern in a Locally Heated Two-Layer System // Microgravity Science and Technology. 2020. V. 32(2). P. 229-243. DOI: 10.1007/s12217-019-09777-9
5. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Analysis of Characteristics of Two-Layer Convective Flows with Diffusive Type Evaporation Based on Exact Solutions // Microgravity Science and Technology. 2020. V. 32(2). P. 139-154. DOI: 10.1007/s12217-019-09764-0
6. Efimova M. V. The effect of interfacial heat transfer energy on a two-layer creeping flow in a flat channel. Journal of Physics: Conference Series. 2019, 1268, 012022-1- 012022-6. DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012022
7. Lemeshkova E. N. Layered Motion of Two Immiscible Liquids with a Free Boundary // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020, 13(5), 574-582. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-5-574-582
8. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Two-dimensional Stationary Thermocapillary Flow of Two Liquids in a Plane Channel // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. No. 5. pp. 844-852. DOI: 10.1134/S0965542520050036
9. Andreev V. K., Magdenko E. P. On the Asymptotic Behavior of the Conjugate Problem Describing a Creeping Axisymmetric Thermocapillary Motion // Journal of SFU. Mathematics and physics. - 2020. - V.13. - No. 1. - p. 26-36. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-26-36
10. Andreev V.K. On a Creeping 3D Convective Motion of Fluids with an Isothermal Interface // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. 13(6). P. 661 – 669. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-661-669

11. Stepanova I. V. Construction and analysis of exact solution of Oberbeck – Boussinesque equations // J. Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019. V. 12. I.5. P. 590-597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597
12. Stepanova I.V. On influence of geometrical parameters and flow rate on mass transfer through interface of two binary mixtures // Interfacial phenomena and heat transfer. 2020. V. 8. I. 4. P. 273-290. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020035410
13. Andreev V.K., Stepanova I.V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 6 (169). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>
14. Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kaptsov O.V., Schmidt A.V. On mathematical modeling of swirling turbulent wakes with varied total excess momentum and angular momentum // Journal of Engineering Thermophysics. 2020. V. 29. Iss. 2. P. 222–233. DOI: 10.1134/S1810232820020046
15. Schmidt A.V. Similarity in the far swirling momentumless turbulent wake // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. V. 13, Iss. 1. P. 79–86. DOI: 10.17516/1997139720201317986
16. O. V. Kaptsov, D. O. Kaptsov. Exact solution of Boussinesq equations for propagation of nonlinear waves // The European Physical Journal Plus. 2020. V.135 DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00729-6
17. Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kaptsov O.V., Schmidt A.V. On Mathematical modeling of swirling turbulent wakes with varied total excess momentum and angular momentum // Journal of Engineering Thermophysics. 2020. V.29. №2. P. 222-233 DOI: 10.1134/S1810232820020046
18. Kaptsov O.V. Ideals Generated by Differential Equations//Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. 13(2). P. 170–186 DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-170-186>
19. Senashov V.I. On Periodic Groups of Shunkov with the Chernikov Centralizers of Involutions // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика» 2020. Т. 32. С. 101—117. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.101>
20. Belolipetskii V.M., Genova S.N. On Application of Prandtl-Obukhov Formula in the Numerical Model of the Turbulent Layer Depth Dynamics // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020. 13(1). P. 37-47 DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-37-47
21. Zakhvataev V.E., Kompaniets L.A .Delocalization of Longitudinal Acoustic-like Excitations in DNA Due to Structural Effects". JETP Letters. 2020. V.112. №7. P. 444-451 DOI: 10.1134/S0021364020190030/

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2020 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
1 Численный анализ задач о двухслойных течениях в замкнутых областях и характеристик устойчивости. Исследование влияния отдельных параметров (интенсивности, гравитации, геометрии системы) на параметры режимов конвекции в локально нагреваемых системах. Исследование пространственной устойчивости течений в двухслойной системе с испарением.	1 Карты режимов течений и карты устойчивости конкретных жидкостей в замкнутых областях. Исследование влияния гравитации и толщины жидкого слоя на структуру течений и характер деформаций границы раздела в двухслойной системе при локальном термическом воздействии.
2 Теоретико-групповой анализ полуэмпирических моделей закрученной турбулентной струи; построение точных решений нелинейных уравнений тепломассопереноса, уравнений мелкой воды и уравнений тепловой и термоконцентрационной конвекции.	2 Автомодельные решения задачи о течениях закрученной турбулентной струи; физически содержательные точные решения уравнений тепломассопереноса и мелкой воды с учетом дисперсии.
3 Применение одномерной в вертикальном направлении математической модели для исследования динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных дистанционных измерений температуры поверхностного слоя земли. Апробация 3-d численной модели с высоким горизонтальным разрешением для изучения течения в озере Шира. Применение методов распараллеливания при проведении длительных расчетов с реальным ветром и тепловыми потоками на поверхности.	3 Создание комплекса численных алгоритмов и программ на ЭВМ для исследования глубины оттаивания в районах вечной мерзлоты с учетом дистанционных измерений

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Количество публикаций по тематике проекта за весь период выполнения проекта по годам

Индикатор	Ед. измерения	Всего за 2017-2020 гг.	2017	2018	2019	2020
Количество публикаций в ведущих российских и международных журналах по результатам исследований, полученных в процессе реализации проекта	единиц	87	20	25	21	21