

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»  
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958

Рег. № НИОКТР 121081900118-2

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН  
д.с.-х.н.

\_\_\_\_\_ А. А. Шпедт

«\_\_\_\_\_» января 2022 г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ  
НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕД С ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА  
В ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
(промежуточный)

Направление фундаментальных исследований  
1.1.3. Математическое моделирование  
(№ 0287-2021-0002)

Руководитель НИР

главный научный сотрудник

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ В. К. Андреев

Красноярск 2022

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В. К. Андреев (Разделы 1.3; 1.4; 1.5)
	(подпись, дата)	
Исполнители: директор Института, д.ф.-м.н.	_____	В. М. Садовский (Раздел 4.1)
	(подпись, дата)	
зав. отд., д.ф.-м.н.	_____	В. Б. Бекежанова (Раздел 1.1)
	(подпись, дата)	
г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В. М. Белолипецкий (Разделы 3.1; 3.2)
	(подпись, дата)	
г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	Е. А. Новиков (Раздел 1.6)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О. В. Капцов (Разделы 2.1; 2.2; 2.4; 2.6)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.	_____	В. А. Кочнев (Раздел 5.2)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.	_____	К. В. Симонов (Раздел 5.1)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В. И. Сенашов (Раздел 2.8)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.т.н.	_____	С. Н. Генова (Разделы 3.1; 3.2)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л. А. Компаниец (Раздел 3.3)
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А. Н. Рогалев (Раздел 1.6)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И. В. Киреев (Раздел 4.3)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	А. Д. Матвеев (Раздел 4.2)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	О. В. Садовская (Раздел 4.1)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И. В. Степанова (Раздел 1.3)
	(подпись, дата)	

н.с., к.ф.-м.н.	_____	М. В. Ефимова (Раздел 2.5)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е. Н. Лемешкова (Раздел 1.4)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е. П. Магденко (Раздел 1.2)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю. В. Шанько (Раздел 2.3)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	А. В. Шмидт (Разделы 2.4; 2.7)
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	О. С. Володько (Раздел 3.3)
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	И. Е. Петраков (Раздел 4.1)
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	И. В. Смолехо (Раздел 4.1)
	(подпись, дата)	
старший инженер	_____	Н. Ф. Ильина (Раздел )
	(подпись, дата)	
старший инженер	_____	Е. И. Калмыкова (Раздел )
	(подпись, дата)	
нормоконтроль	_____	А. В. Вяткин
	(подпись, дата)	

## РЕФЕРАТ

Отчёт 55 с., 16 рис., 1 табл., 4 прил.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГИДРОДИНАМИКА, ГЕОДИНАМИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ПРОБЛЕМЫ БЕЗОПАСНОСТИ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Объект исследования – процессы, происходящие в природных и технических системах, содержащих границы раздела.

Цель работы в целом по проекту – математическое и численное моделирование задач с поверхностями раздела в неклассических моделях механики сплошных сред: построение точных решений новых нелинейных моделей; анализ их устойчивости; разработка новых вычислительных алгоритмов и комплексов программ; выработка рекомендаций по аспектам функционирования технических объектов и природных систем.

Методы исследований – симметричный анализ моделей МСС с усложнёнными свойствами и построение их точных решений; вычислительное моделирование конкретных задач МСС с границами раздела и их применение в природных и наукоёмких процессах.

За отчётный 2021 год получены, согласно плану работ, следующие результаты:

1) Разработан и реализован, вместе с визуализацией, программный комплекс прямого численного решения задач конвекции в областях с деформируемыми поверхностями раздела.

2) Проведен анализ граничных условий для описания конвекции бинарной смеси. Для одной из постановок построено точное решение и изучено влияние физических и геометрических параметров на характеристики конвекции в плоском канале.

3) Исследованы две модельные обратные начально-краевые задачи для параболического уравнения, возникающие при движении вязкой теплопроводной жидкости с двумя или одной свободной границей. Для обеих задач получены априорные оценки в равномерной метрике.

4) Впервые изучена устойчивость нестационарного движения вращающейся струи с учётом сил поверхностного натяжения.

5) Исследована регуляризация задач устойчивости на конечном интервале времени (что важно для технических систем) множества траекторий под влиянием возмущающих воздействий.

6) Построены новые точные решения различных подмоделей гидродинамики.

7) Разработана малоразмерная численная модель для прогноза температуры в талом и мёрзлом слоях в летний период.

8) Проведён спектральный анализ длительных измерений температуры в озере Шира, используя метод модифицированных периодограмм, определены частоты внутренних волн.

9) Предложен метод фиктивных дискретных моделей для расчёта на прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой.

10) Построена математическая модель нестационарного поведения и равновесного состояния жидких кристаллов под действием внешних воздействий.

11) Получены результаты моделирования данных наблюдений космической системы GRACE относительно очаговых зон катастрофических землетрясений.

Все полученные результаты являются новыми. Опубликовано 26 работ за 2021 год в журналах, входящих в систему баз данных WoS, Scopus и ядро РИНЦ.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
1 Исследование движений и устойчивости сопряжённых задач механики жидких сред...	11
1.1 Комплекс программ для расчёта и визуализации движений жидкости с деформируемыми границами.....	11
1.2 Трёхмерное движение двух несмешивающихся жидкостей во вращающемся цилиндре.....	13
1.3 Анализ конвективного однонаправленного течения в щели.....	14
1.4 Модельная задача, возникающая при описании конвекции в плоских слоях.....	16
1.5 О неустойчивости нестационарного движения вращающейся и круглой вытягивающейся струи.....	17
1.6 Задачи устойчивости для ОДУ на конечном интервале времени.....	18
2 Симметричный анализ уравнений моделей с усложнёнными свойствами и построение точных решений.....	19
2.1 Построение решений трёхмерных уравнений Кадомцева – Петвиашвили.....	19
2.2 Общие решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами.....	19
2.3 Построение точных решений для уравнения неоднородной акустики.....	20
2.4 Построение автомодельных решений для дальних областей плоского безымпурсного турбулентного следа.....	20
2.5 Ползущие конвективные течения в двухслойных средах.....	21
2.6 Итерации и группы формальных преобразований.....	22
2.7 Теоретико-групповой анализ полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения.....	22
2.8 О некоторых свойствах слоисто конечных групп.....	23
3 Моделирование природных гидрофизических процессов.....	24
3.1 Исследование процессов замерзания/оттаивания и биохимических процессов в зоне вечной мерзлоты.....	24
3.2 Разработка и апробация упрощённой математической модели теплообмена для описания гидротермики Абаканской протоки. Сценарное моделирование.....	26
3.3 Построение численной модели взаимодействия биогенных веществ в солёном озере.....	28
4 Анализ геометрически линейной модели динамики жидкого кристалла, основанной на акустическом приближении уравнений вязкоупругого континуума Коссера с конечными поворотами доменных структур.....	30

4.1 Математическое и численное моделирование поведения жидких кристаллов.....	30
4.2 Вычислительные алгоритмы и компьютерные программы для решения статических задач.....	36
4.3 Верификация пакетов программ для моделирования НДС конструкций.....	38
5 Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений.....	40
5.1 Моделирование данных наблюдений геокатастроф.....	40
5.2 Влияние магнитного поля Солнца на одну из моделей динамо.....	43
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	44
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	47
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	50
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	52
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	55

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий отчет является промежуточным по теме «Математическое моделирование поведения неидеальных сред с границами раздела в природных и технических средах» за 2021 год.

Проводимые исследования соответствуют приоритетным направлениям: переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объёмов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта; переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии.

Задачи механики с границами раздела являются предметом интенсивного изучения у нас в стране и за рубежом ввиду распространённости их в природе и во многих технологических процессах. Подобного рода задачи возникают в химической и пищевой промышленности, металлургии, космическом материаловедении, гидрофизике, экологии, геосредах. Достаточно упомянуть процессы термостабилизации энергетических установок, нанесения покрытий, электрофореза, динамики вечной мерзлоты, поведения геологических разломов и жидких кристаллов, сохранения качеств водных и воздушных масс. Более точный учёт различных факторов, влияющих на такие процессы, требует привлечения новых математических моделей и постановок начально-краевых задач для них. Отметим трудности исследования: высокий порядок систем уравнений и граничных условий; неизвестность поверхности раздела, топология которой изменяется со временем. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости, разработки эффективных численных алгоритмов, обработки большого числа получаемых данных и выводов из них.

В связи с вышесказанным, в отчётный период за 2021 год проводились исследования по пяти направлениям:

1. Исследование задач конвекции, включая задачи устойчивости течений, и разработка программ для расчёта и средств визуализации движений жидких сред с деформируемой границей раздела (свободной границей) в канонических областях.

2. Теоретико-групповой анализ полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения, уравнений теплообмена с учётом эффектов Соре и Дюфура. Построение новых решений интегрируемых моделей Буссинеска. Получение необходимых условий существования классов решений, включающих произвольную функцию и её производные до заданного порядка, для уравнения неоднородной акустики. Построение новых классов

точных решений уравнения неоднородной акустики. Проведение теоретико-группового анализа и построение автомодельных решений иерархии моделей дальнего безымпурсного турбулентного следа.

3. Оценка влияния климатической изменчивости на структуру течений солёных озёр. Исследование процессов замерзания/оттаивания и биохимических процессов в зоне вечной мерзлоты. Изучение динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши в летний период на основе одномерной в вертикальном направлении математической модели. Разработка и апробация упрощённой математической модели теплообмена для описания гидротермики Абаканской протоки. Сценарное моделирование. Построение численной модели взаимодействия биогенных веществ в солёном озере.

4. Анализ геометрически линейной модели динамики жидкого кристалла, основанной на акустическом приближении уравнений вязкоупругого континуума Коссера с конечными поворотами доменных структур. Алгоритмическая и программная реализация модели для вычислительных систем с графическими ускорителями. Применение разработанной вычислительной технологии к моделированию поведения жидкого кристалла под действием механических напряжений, температурных и электрических полей. Разработка алгоритмов численного решения задачи минимизации квадратичного функционала при ограничениях типа равенств ортогонально-проекционным методом в применении к модели Озеена – Франка.

5. Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений. Сравнительный анализ исследуемых изменений параметра EWH по данным наблюдений миссии GRACE с данными новой системы спутников GRACE-FO. Проверка гипотезы о взаимосвязи параметров гравитационного поля Земли с активными сейсмическими процессами в её недрах.

Полученные в 2021 году результаты соответствуют поставленным целям и задачам. Качество этих результатов находится на мировом уровне с точки зрения новизны, оригинальности, значимости и точности, а в некоторых задачах и определяет этот уровень. Такие выводы подтверждаются публикациями в ведущих журналах по направлениям проекта, входящих в группы Q1, Q2 международной базы данных WoS, в других рейтинговых журналах, а также представлением на международных конференциях.

К результатам мирового уровня можно отнести: а) построение точных решений уравнения Кадонцева – Петвиашвили, линейных уравнений с переменными коэффициентами, акустики, автомодельных решений для дальних областей плоского, безимпульсного турбулентного следа, уравнений термодиффузии; б) разработку и реализацию программного комплекса прямого численного моделирования конвекции в областях с деформируемыми границами, в том числе в условиях фазовых превращений диффузионного типа; в) исследование устойчивости нестационарного движения вращающейся струи с учётом сил поверхностного натяжения; г) построение математической модели нестационарного поведения и равновесного состояния жидких кристаллов под действием механических, температурных и электрических воздействий и анализ конкретных задач; разработку малоразмерной численной модели для прогноза температуры в талом и мёрзлых слоях и заглубления талого слоя в летний период и её верификацию; д) разработку алгоритмов и программных модулей для обработки записей сильных региональных возмущений.

При выполнении планов проекта использовались современные методы и технологии исследований. Построенные математические модели процессов и явлений соответствуют принятому в мире уровню полноты и точности описания. Применяемые вычислительные методы строились для расчёта конкретных задач и являются оригинальными.

Полученные результаты являются фундаментальными и могут служить основой для дальнейших исследований по тематике проекта.

Практическое использование проведённых исследований возможно: а) при разработке оптофлюидных элементов и микрофлюидных платформ для систем полного анализа и средств контроля; б) при оценке влияния погодных условий на толщины мёрзлых и талых слоёв в условиях Крайнего Севера; в) при разработке проектов обустройства проток в черте г. Красноярска для организации отдыха летом; г) для анализа распределения биопланктона в озере Шира; д) для установления связей глобальных геодинамических и геофизических процессов с катастрофическими землетрясениями.

В тексте отчёта изложены основные результаты (с иллюстрациями), полученные в ходе выполнения работ, запланированных на 2021 год. К отчёту также приложен список работ, опубликованных в текущем году, и перечень докладов по результатам исследований, представленных на международных конференциях.

В заключении приведены основные результаты в краткой форме за 2021 год.

# **1 Исследование задач конвекции, включая задачи устойчивости течений, и разработка программ для расчёта и средств визуализации движений жидких сред с деформируемой границей раздела (свободной границей) в канонических областях**

## **1.1 Комплекс программ для расчёта и визуализации движений жидкости с деформируемыми границами**

Задачи об определении характеристик конвективных режимов в областях с деформируемыми границами составляют отдельный класс. Их особенность состоит в том, что наряду с основными искомыми функциями (скорость, давление, температура) должна находиться и область их определения, поскольку свободная граница (или граница раздела) является частью области определения указанных характеристик. Подобные задачи возникают при изучении динамики жидкостных систем в условиях внешней тепловой нагрузки. Результаты исследований востребованы при разработке адаптивных оптофлюидных элементов и микрофлюидных платформ для систем полного анализа и средств контроля. Основными особенностями таких систем является малый размер рабочих узлов и малые дозы жидких образцов. Если рабочая камера частично заполнена жидкостью, то внешний нагрев вызывает изменение температуры поверхности жидкости и, как следствие, её поверхностного натяжения и увеличение скорости испарения. В условиях мини- и микромасштабов конкуренция термокапиллярного и конвективного механизмов может приводить к возникновению неустойчивостей различной природы. Кроме того, доминирование сил Марангони может вызывать сильные деформации границ раздела вплоть до разрыва жидкого слоя.

Для решения задач смешанной конвекции Рэлея – Бенара – Марангони, сопровождающейся фазовыми переходами диффузионного типа, в замкнутых массивах разработана и на языке Фортран реализована программа для расчёта всех искомых характеристик двухфазной системы (скорости и температуры сред, паросодержание в газовой фазе, массовая скорость испарения, положение границы раздела жидкость – газ) в рамках полных сопряжённых постановок на основе уравнений Навье – Стокса и их аппроксимаций. Метод расчёта предполагает декомпозицию исходной задачи на два унитарных модуля, в качестве условий их сопряжения друг с другом используются граничные условия на поверхности раздела. Численный алгоритм основан на методе отображения областей с криволинейными границами в каноническую прямоугольную расчётную область. Каждый модуль в численном методе представляет собой однотипную модель, в которой расчёт характеристик производится независимо от второго модуля. Программный комплекс допускает модификации основных процедур на случай

произвольного числа слоёв в системе, включая случай системы со свободными внешними границами, и обобщения исходной задачи на случай более сложных граничных условий, переменных коэффициентов переноса и т. п.

Характерной особенностью численного метода является решение задачи в переменных «функция тока – вихрь» и формулировка граничных условий на внутренней деформируемой границе раздела в терминах касательной и нормальной компонент скорости сред на этой поверхности. Предложенный подход позволяет избежать прямого решения задачи о движении точки трёхфазного контакта вдоль боковых границ области течения. Определяющие уравнения для всех искомым функций решаются конечно-разностным методом стабилизирующей поправки с использованием дробных шагов. Полная аппроксимация исходного уравнения проводится на первом дробном шаге, а второй дробный шаг является корректирующим и позволяет повысить устойчивость схемы.

Разработаны средства визуализации, позволяющие отслеживать изменения всех характеристик в динамике и формировать статичные изображения в заданные моменты времени. Рабочее окно программы представлено на рисунке 1.

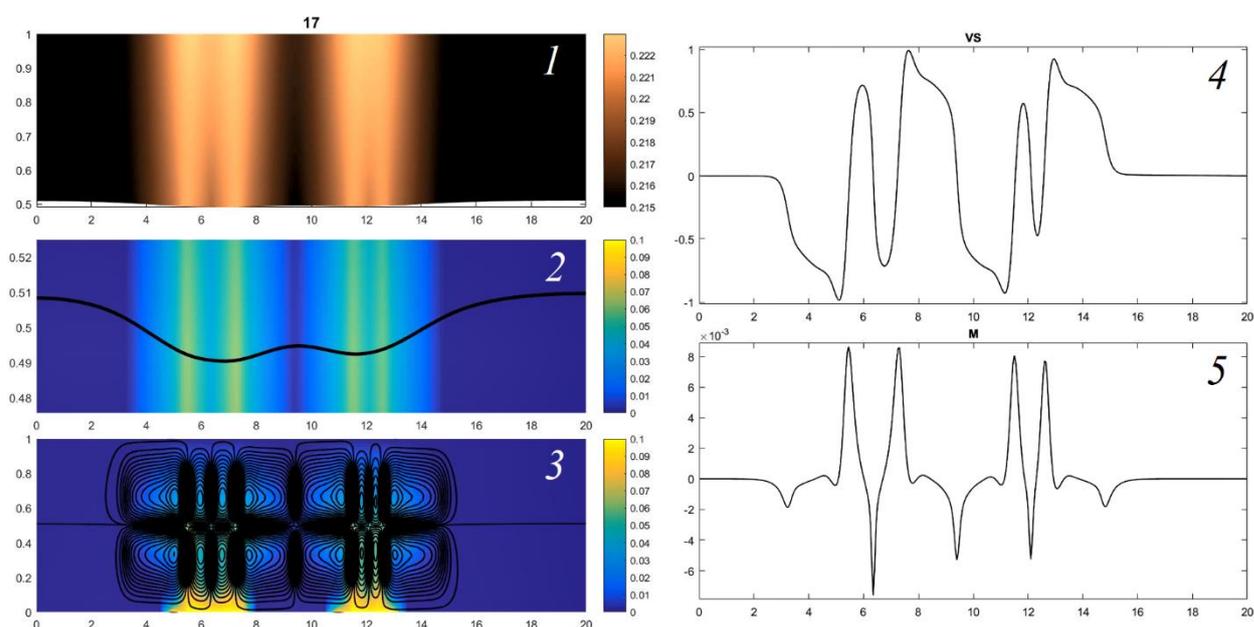


Рисунок 1 – Визуализация параметров двухслойной системы при нагреве снизу двумя нагревателями: окно 1 – поле концентрации пара в газе, окно 2 – распределение температуры вблизи межфазной границы и форма границы раздела (сплошная линия), окно 3 – поля температуры и скорости в системе, окно 4 – распределение касательной скорости вдоль границы раздела, окно 5 – массовая скорость испарения на границе раздела

С помощью разработанного программного комплекса впервые изучена задача испарительной конвекции в локально нагреваемой миникювете, заполненной двухслойной

системой жидкость – газ для разных типов рабочих сред (этанол – азот, бензин – воздух). Исследовано влияние фазовых превращений на динамику системы и поведение границы раздела. Установлено, что испарение слабо ускоряет переходные режимы типа  $2n-4n-2n$  (от двухвихревого режима течения к четырёхвихревому и обратно в каждой зоне температурной накачки), где  $n$  – число нижних нагревателей, и приводит к увеличению амплитуды термокапиллярного прогиба в зонах нагрева. Отличительной особенностью двухфазной системы с испарением в условиях локального нагрева является формирование осциллирующих мелкомасштабных вихрей вблизи зоны теплового удара и колебательное поведение межфазной границы с краткосрочным изменением кривизны поверхности жидкость – газ и глубины термокапиллярного прогиба.

## 1.2 Трёхмерное движение двух несмешивающихся жидкостей во вращающемся цилиндре

Исследована сопряжённая стационарная краевая задача, описывающая трёхмерное двухслойное осесимметрическое движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей во вращающемся цилиндре с твёрдой внешней стенкой и общей изотермической недеформируемой поверхностью раздела. Массовые силы отсутствуют. Поверхностное натяжение на границе раздела линейно зависит от температуры. Рассматривается поле скоростей типа Хименца. С математической точки зрения, задача является обратной относительно градиентов давления вдоль оси цилиндра и нелинейной, так как учитывается полное энергетическое условие на границе раздела.

Поставленная задача была решена с помощью модифицированного метода Галёркина и метода Ньютона. Для системы сред глицерин (внутренний слой) – силиконовое масло (внешний слой) установлено, что рост числа Марангони приводит к увеличению радиальной составляющей вектора скорости  $U_j(\xi)$  в  $j$ -ой жидкости,  $j = 1, 2$  (рисунок. 2, штриховой линией обозначена поверхность раздела). Стоит отметить, что вблизи боковой твёрдой стенки возникает возвратное течение. Показано, что при увеличении параметра энергии  $E$ , затрачиваемой на деформацию поверхности раздела, значение  $U_j(\xi)$  возрастает, но не так сильно, как при изменении числа Марангони (рисунки. 2, 3; штриховая линия есть поверхность раздела). Так, для случая, когда  $M = 10$ , имеем

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in [0, 0.9]} U_1(\xi, E = 0.9) - \max_{\xi \in [0, 0.9]} U_1(\xi, E = 0.1) &= 4 \cdot 10^{-6}, \\ \min_{\xi \in [0.9, 1]} U_2(\xi, E = 0.9) - \min_{\xi \in [0.9, 1]} U_2(\xi, E = 0.1) &= 0.24 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

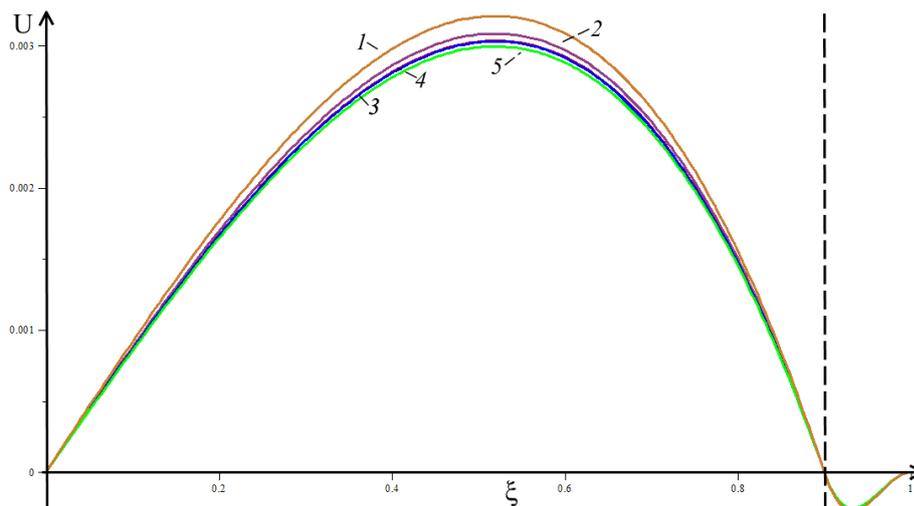


Рисунок 2 – Влияние параметра Марангони ( $M$ ) на значение безразмерной функции радиальной составляющей профиля скорости при  $E = 0.1$ : 1 –  $M = 100$ , 2 –  $M = 10$ , 3 –  $M = 1$ , 4 –  $M = 0$ , 5 –  $M = -10$

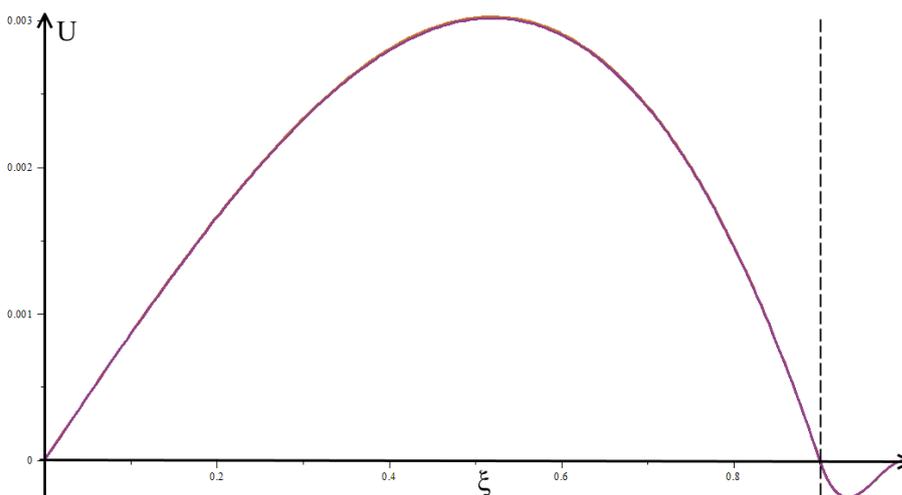


Рисунок 3 – Влияние параметра энергии ( $E$ ) на значение безразмерной функции радиальной составляющей профиля скорости при  $M = 10$ : 1 –  $E = 0.01$ , 2 –  $E = 0.1$ , 3 –  $E = 0.45$ , 4 –  $E = 0.9$ , 5 –  $E = 2$ ; все кривые практически неразличимы

Таким образом, показано, что при увеличении числа Марангони (фактически при увеличении температуры, задаваемой на боковой поверхности цилиндра) и увеличении параметра энергии, который характеризует затраты тепла на деформацию границы, течение несмешивающихся в цилиндре становится интенсивнее.

### 1.3 Анализ конвективного однонаправленного течения в щели

Для уравнений стационарного однонаправленного течения (характеристиками течения являются вектор скорости  $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$ , отклонения температуры  $\theta(x, y)$  и

концентрации  $c(x, y)$  от их средних постоянных значений, отклонение давления от гидростатического  $p(x, y)$  в приближении Обербека – Буссинеска, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} 0 &= u_{yy} - p_x, \quad \theta + c = p_y, \\ Gr u \theta_x &= \frac{1}{Pr} (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad Gr u c_x = \frac{1}{Sc} [c_{xx} + c_{yy} - \psi(\theta_{xx} + \theta_{yy})], \end{aligned} \quad (1)$$

где Gr, Pr, Sc – числа Грасгофа, Прандтля, Шмидта соответственно,  $\psi$  – параметр разделения; в предположении, что поля температуры и концентрации имеют вид  $\theta(x, y) = A(y)x + B(y)$ ,  $c(x, y) = N(y)x + M(y)$ , найдено решение системы. Проведён анализ граничных условий для величин, входящих в уравнения (1), при постановке задачи о течении бинарной смеси в узком зазоре между двумя твёрдыми стенками: 1) обе стенки  $y = 0$ ,  $y = 1$  нагреваются по закону  $\theta_i(x) = A_i x + B_i$ , индекс  $i$  соответствует значениям величин на нижней и верхней стенке канала; 2) одна из стенок теплоизолирована, 3) обе стенки теплоизолированы. Обнаружено, что полная разрешимость задачи (с точностью до сдвига функции давления), постановка которой дополнена условиями прилипания и отсутствия потока вещества через твёрдые стенки, возможна только при задании линейного по горизонтальной координате закона для температуры на обеих стенках. При этом для определения продольного градиента давления необходимо задать расход смеси через поперечное сечение слоя. Исследовано влияние толщины канала  $L$ , величины расхода  $q$  и интенсивности гравитационного воздействия  $g$  на течение смеси в протяжённом горизонтальном слое. Соответствующие профили скорости и градиента давления для смеси вода – этанол с содержанием последнего 70 % приведены на рисунке 4. Анализ показал, что а) при увеличении толщины слоя вязкие эффекты ослабевают, этим объясняется увеличение скорости возле стенок и её уменьшение в центре слоя, где наблюдается максимальный градиент давления (кривые 3 на рисунках 4 а, d); б) интенсивность течения увеличивается с ростом величины расхода (рисунок 4 б), при этом расход слабо влияет на распределение тепла, но порождает перераспределение примеси и перестройку поля концентраций, большие неоднородности которого проявляются при выполнении условия замкнутости потока; в) самые большие значения скорости появляются при микрогравитации, профиль скорости при этом приближен к пуазейлевскому (рисунок 4 с), градиент давления отрицательный по всей ширине канала (рисунок 4 f), в земных условиях и при гипергравитации присутствуют зоны противотока,

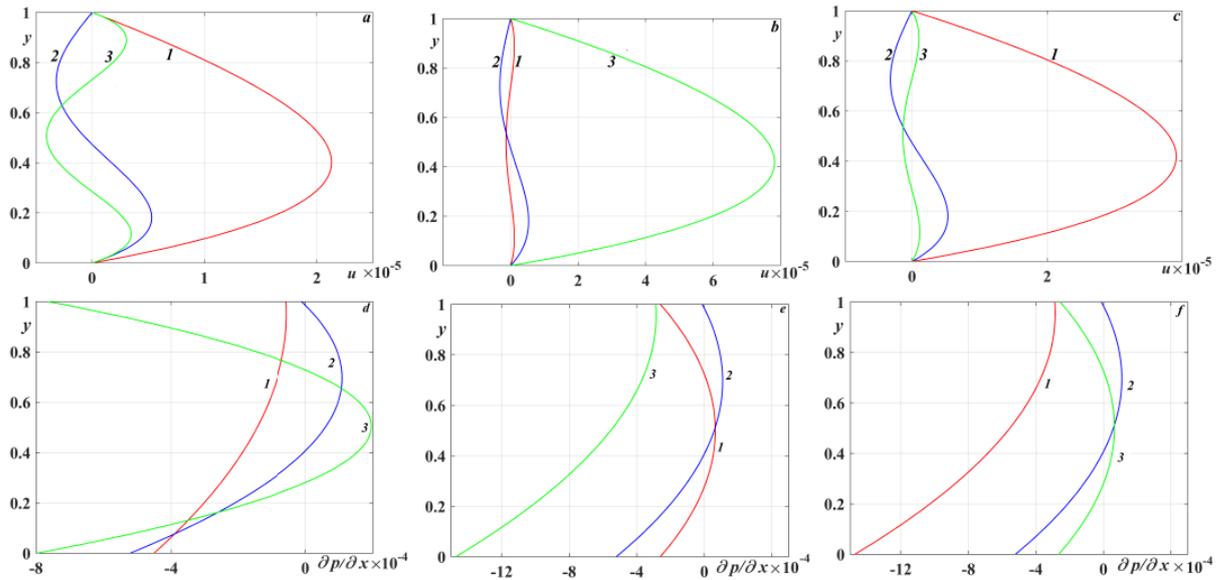


Рисунок 4 – Профили скорости  $u(y)$  (*a, b, c*) и градиента давления  $p_x(y)$  (*d, e, f*) в зависимости от толщины слоя (*a, d*): кривая 1 соответствует  $L = 0.001$  м, кривая 2 –  $0.003$  м, кривая 3 –  $0.009$  м; расхода жидкости (*b, e*): кривая 1 соответствует  $q = 0$  кг/(м·с), кривая 2 –  $q = 10^{-6}$  кг/(м·с), кривая 3 –  $q = 10^{-4}$  кг/(м·с); влияния гравитации (*c, f*): кривая 1 соответствует воздействию микрогравитации  $g = g_0 \cdot 10^{-2}$ , кривая 2 – земной гравитации  $g = g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>, кривая 3 – гипергравитации  $g = g \cdot 10^2$

скорость меняет знак и становится значительно меньше по абсолютному значению, неоднородность концентрации возрастает при увеличении ускорения свободного падения. Дальнейшее увеличение толщин слоя и расхода ведёт к потере физического смысла: массовая концентрация начинает выходить за пределы отрезка  $[0,1]$ . Во всех изученных конфигурациях сохраняется нормальный термодиффузионный эффект: этанол скапливается у более нагретой стенки  $y = 0$ . Отметим также, что если во всех анализируемых случаях положить параметр разделения  $\psi$  равным нулю, т. е. не учитывать эффект термодиффузии, то поле концентраций меняться не будет, жидкость останется однородной при всех остальных меняющихся параметрах задачи.

#### 1.4 Модельная задача, возникающая при описании конвекции в плоских слоях

Для начально-краевой задачи

$$\begin{aligned}
 u_t &= \nu u_{xx} + f(t) + g(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, T]; \\
 u(x, 0) &= u_0(x); \\
 \alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u_x(0, t) &= q_1(t), \quad \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = q_2(t); \\
 \int_0^l u(x, t) dx &= q_3(t),
 \end{aligned}$$

где функции  $g(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и постоянные  $\nu > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$  считаются заданными, а  $u(x, t)$ ,  $f(t)$  – искомыми, изучены две подзадачи:

- 1) при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$  полученная задача моделирует однонаправленное движение плоского слоя с двумя свободными границами и известным распределением температуры;
- 2) при  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$  полученная задача моделирует однонаправленное движение плоского слоя с движущейся нижней твёрдой стенкой и верхней свободной границей.

При этом неизвестная функция  $f(t)$  есть продольный градиент давления вдоль слоя, а интегральное условие представляет собой заданный расход жидкости через поперечное сечение слоя. Пользуясь спецификой указанных подзадач, их одномерностью, удаётся получить достаточные условия на входные данные, при которых решения при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к стационарным в равномерной метрике по экспоненциальному закону.

### 1.5 О неустойчивости нестационарного движения вращающейся и круглой вытягивающейся струи

В цилиндрической системе координат формулы

$$\mathbf{u} = \left( -\frac{k}{\tau}r, w_0\tau r, \frac{k}{\tau}z \right), \quad \frac{1}{\rho}p = -\frac{1}{2} \left( w_0^2 - \frac{3k^2}{4\tau^2} \right) [R^2(t) - r^2] + \frac{\sigma}{R(t)},$$

где  $\tau = 1 + kt$ ,  $R(t) = r_0/(1 + kt)^{1/2}$ , а  $k$ ,  $w_0$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  – положительные постоянные, описывают вращательно-симметричное движение круглой струи идеальной жидкости. Кроме вращения струи с угловой скоростью  $w_0(1 + kt)$ , происходит и растяжение струи, концы которой движутся по закону  $z = \pm(1 + kt)h$  ( $2h$  – первоначальная длина струи,  $w_0$  – начальная угловая скорость вращения,  $r_0$  – её радиус),  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Таким образом, в основном движении присутствуют все три компоненты вектора скорости и оно является существенно нестационарным. Задача об устойчивости таких движений со свободной границей является новой: трёхмерное нестационарное основное движение; свободная граница, на которой действуют капиллярные силы. Ранее такого рода задачи не изучались как у нас в стране, так и за рубежом. Показано, что уравнения малых возмущений в координатах Лагранжа, в данном случае, могут быть сведены к исследованию начально-краевой задачи для одной функции, удовлетворяющей уравнению типа Пуанкаре – Соболева с переменными коэффициентами. Краевое условие для него тоже является эволюционным. Решение

задачи построено в виде ряда Фурье. Найдено асимптотическое поведение амплитуд возмущения свободной границы при  $t \rightarrow \infty$ . Проведено сравнение результатов с известными по устойчивости потенциального движения струи. Отмечена определённая стабилизация границы раздела струи за счёт её вращения.

### **1.6 Задачи устойчивости для ОДУ на конечном интервале времени**

Большинство систем, особенно технических, функционируют в течение конечного промежутка времени, и при этом представляет интерес не только факт их устойчивости или неустойчивости (как зависимости от возмущений параметров), но и количественные оценки их поведения, а также приемлемость этих оценок в реальных условиях. Устойчивость по Ляпунову является качественной характеристикой поведения систем на бесконечном интервале времени и не всегда характеризует поведение системы на конечном интервале относительно наперед заданных областей в пространстве состояний. Предложен подход, вычисляющий диапазон всех возможных значений множеств решений, то есть исследующий практическую устойчивость на конечном интервале времени. Получена формула, вычисляющая расходимость или сгущаемость траекторий, являющаяся основанием для исследования методов включения решений. Описана связь динамики множества решений ОДУ с кинематикой векторного поля.

**2 Теоретико-групповой анализ: полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения; уравнений тепломассообмена с учётом эффектов Соре и Дюфура. Построение новых решений интегрируемых моделей Буссинеска. Получение необходимых условий существования классов решений, включающих произвольную функцию и её производные до заданного порядка, для уравнения неоднородной акустики. Построение новых классов точных решений уравнения неоднородной акустики. Проведение теоретико-группового анализа и построение автомодельных решений иерархии моделей дальнего безымпурсного турбулентного следа.**

### **2.1 Построение решений трёхмерных уравнений Кадомцева – Петвиашвили**

Вычислена группа точечных преобразований, допускаемая трёхмерным уравнением Кадомцева – Петвиашвили. Это уравнение возникает в физике плазмы и механике газожидкостных сред. Допускаемая группа является бесконечной и включает подгруппы переносов, растяжений, вращений, а также обобщённое преобразование Галилея. Построен пример инвариантного решения. Найдены точные решения этого уравнения в виде двойных и тройных волн. Полученные решения выражаются через элементарные функции и описывают взаимодействие пары солитонов. Кроме того, построены гладкие ограниченные рациональные решения.

### **2.2 Общие решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами**

Найдены общие решения для некоторых классов линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения описывают колебания стержней, акустические волны, а также к ним сводятся некоторые модели газовой динамики. Для построения общих решений используются специальные типы преобразований Эйлера – Дарбу – преобразования типа Леви. Они представляют собой дифференциальные подстановки первого порядка.

Для построения каждого преобразования необходимо было решать два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка. Решения одного из этих уравнений находятся из решений другого с помощью дифференциальной подстановки и формулы Лиувилля. В общем случае решать эти обыкновенные дифференциальные уравнения непросто, но можно указать некоторую формулу суперпозиции преобразований типа Леви.

Стартуя с классического волнового уравнения с постоянными коэффициентами и используя найденные преобразования, можно строить бесконечные серии уравнений,

обладающих явными общими решениями. С помощью метода Матвеева получены предельные формы итерированных преобразований. Приведены конкретные примеры уравнений, обладающих общими решениями.

### 2.3 Построение точных решений для уравнения неоднородной акустики

Исследовались точные решения двумерного уравнения распространения звука в неподвижной неоднородной среде

$$\frac{p_{tt}}{\rho c^2} = \left( \frac{p_x}{\rho} \right)_x + \left( \frac{p_y}{\rho} \right)_y. \quad (2)$$

Здесь давление  $p$  зависит от времени  $t$  и декартовых координат  $x$  и  $y$ . Плотность  $\rho(x,y)$  и скорость звука  $c(x,y)$  считаются заданными. Получены необходимые условия, при которых для любого неотрицательного  $n$  существуют решения вида

$$p = \sum_{k=0}^n (A_{k,n}(t, x, y)\Phi^{(k)}(q) + B_{k,n}(t, x, y)\Psi^{(k)}(q)),$$

где  $q = q(t, x, y)$ , функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  – произвольные, бесконечно дифференцируемые. В частности, показано, что скорость звука должна быть представима в виде

$$c = \frac{h(\alpha(x, y))}{\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}},$$

где функция  $h(\alpha)$  удовлетворяет линейному уравнению с постоянными коэффициентами  $h'' = \lambda h$ , а функция  $\alpha$  является гармонической функцией переменных  $x$  и  $y$ . Построен новый класс решений уравнений неоднородной акустики (2), содержащий несколько произвольных функций одной переменной.

### 2.4 Построение автомодельных решений для дальних областей плоского безымпурсного турбулентного следа

На основе теоретико-группового анализа проведено построение автомодельных решений, описывающих течение в дальнем плоском безымпурсном турбулентном следе. Исследование проводилось с привлечением иерархии полуэмпирических моделей,

предложенных Г. Г. Черных и А. Г. Деменковым. Искомые величинами в рассмотренных моделях являются дефект продольной осреднённой компоненты скорости, турбулентная кинетическая энергия, скорость диссипации кинетической энергии и касательное рейнольдсово напряжение.

Найдены автомодельные редукции уравнений рассматриваемых моделей к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решались численно. Получено хорошее согласие как с численными расчётами по нередуцированным моделям, выполненными Г. Г. Черных и А. Г. Деменковым, так и с имеющимися экспериментальными данными (рисунок 5).

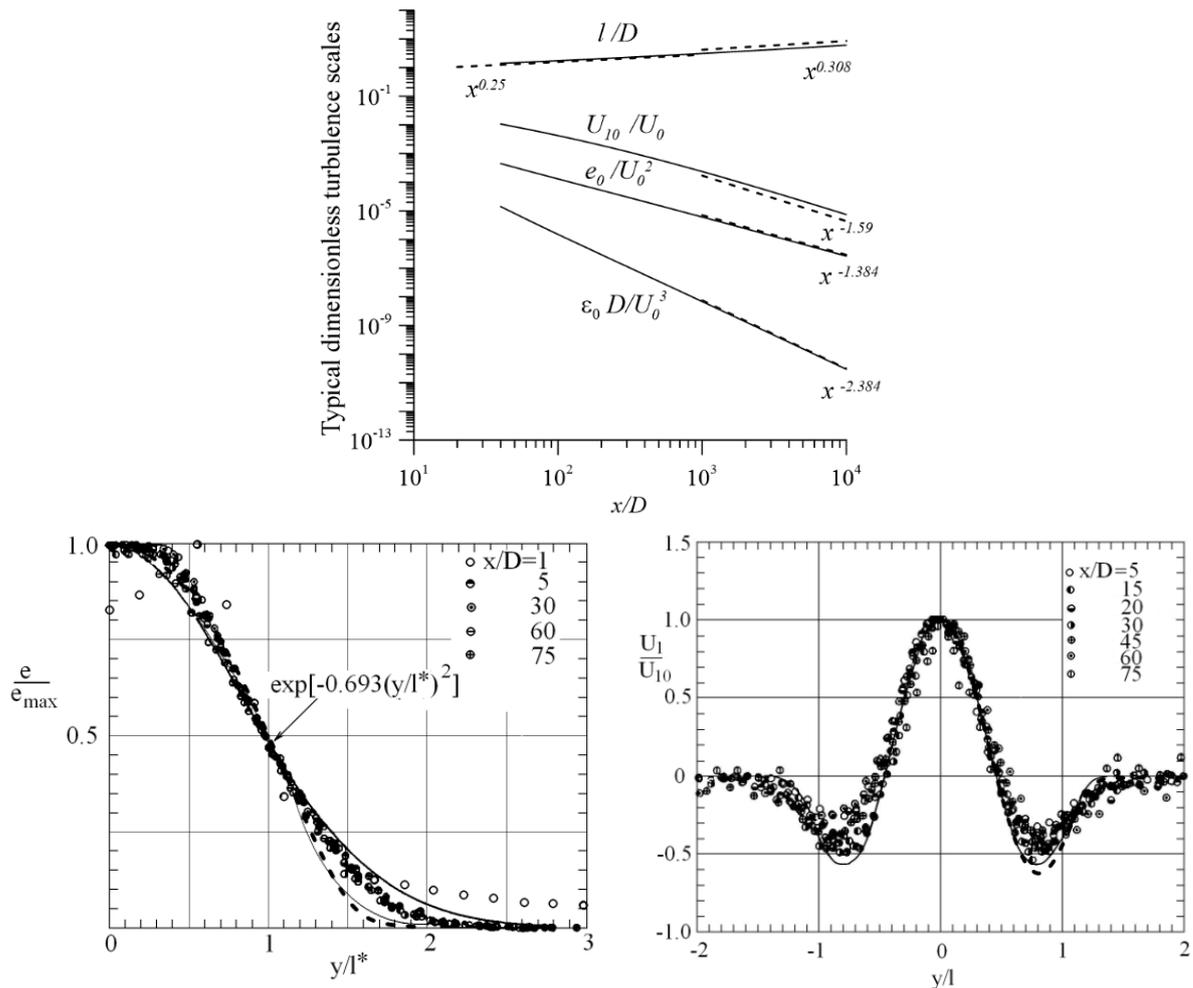


Рисунок 5 – Сопоставление законов вырождения следа и автомодельных профилей с экспериментальными данными

## 2.5 Ползущие конвективные течения в двухслойных средах

Стационарное решение системы Обербека – Буссинеска искалось в специальном виде, когда компоненты скорости линейно зависят от соответствующих продольных координат с параболическим распределением температуры и концентрации в слоях:

$$U_j = (F_j(z) + H_j(z))x, \quad V_j = (F_j(z) - H_j(z))y, \quad W_j = -2 \int_{z_0}^z F_j(\zeta) d\zeta,$$

$$\theta_j = A_j(z)x^2 + B_j(z)y^2 + T_j(z), \quad C = M(z)x^2 + N(z)y^2 + K(z).$$

Индекс  $j=1$  соответствует характеристикам вязкой жидкости в нижнем слое,  $j=2$  – в верхнем для бинарной смеси. Предполагается, что жидкие среды несжимаемы, плотности, коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения, температуропроводности и теплопроводности обеих сред постоянны, на границе раздела жидкость – бинарная смесь поверхностное натяжение  $\sigma$  линейно зависит от температуры и концентрации. Твёрдые стенки считались непроницаемыми с заданным условием прилипания, число Марангони мало. При этом задача становилась линейной в области течения. Было рассмотрено два тепловых режима на твёрдых стенках: 1) с заданным параболическим распределением на обеих границах; 2) верхняя стенка считалась теплоизолированной. Решение поставленной задачи: функции  $A_j, B_j, M$  и  $N$  линейные по  $z$ ,  $T_j, K$  – кубические полиномы, а  $F_j, H_j$  – полиномы четвертого порядка.

## 2.6 Итерации и группы формальных преобразований

Изучалась проблема формальной итерации отображений  $n$ -мерного пространства над полем комплексных и вещественных чисел. Это классическая задача остается открытой до настоящего времени. Она возникает в различных областях математики от гамильтоновых систем до бесконечных групп Ли. Нами получен конкретный пример двумерного полиномиального преобразования, из которого нельзя извлечь квадратный корень. Этот пример показывает, что утверждение Ю. Мозера о существовании решения задачи об интерполяции неверно. Кроме того, это означает, что задача о включении отображения в поток неразрешима даже для отображений, сохраняющих площадь. С другой стороны, представлены примеры групп преобразований, для которых задача о формальной итерации разрешима.

## 2.7 Теоретико-групповой анализ полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения

Найдены базисы алгебры Ли ряда полуэмпирических моделей, описывающих течение в дальних областях слоя смешения. На основе полученных результатов построены редуцированные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в дальнейшем планируется решать численно.

## 2.8 О некоторых свойствах слойно конечных групп

Математическое моделирование бесконечных дискретных объектов возможно, если эти объекты удовлетворяют каким-либо условиям конечности. Если все слои элементов

в бесконечной группе конечны, то такая группа называется слойно конечной. Нижним слоем группы называется множество её элементов простых порядков. Приведены примеры распознаваемых, почти распознаваемых и нераспознаваемых по нижнему слою групп. Получены результаты восстановления группы по нижнему слою в классе бесконечных групп при дополнительных условиях: слойной конечности, полноты группы, ограничениях на её центр. Приведены с доказательством свойства периодических групп, с бесконечными системами конечных двупорождённых подгрупп в самой группе и её сечениях по конечным подгруппам при дополнительном ограничении почти слойной конечности нормализаторов конечных подгрупп.

**3 Исследование процессов замерзания/оттаивания и биохимических процессов в зоне вечной мерзлоты. Исследование динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши в летний период на основе одномерной в вертикальном направлении математической модели. Разработка и апробация упрощённой математической модели теплообмена для описания гидротермики Абаканской протоки. Сценарное моделирование.**

**3.1 Исследование процессов замерзания/оттаивания и биохимических процессов в зоне вечной мерзлоты. Исследование динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши в летний период на основе одномерной в вертикальном направлении математической модели**

В связи с изменением глобальной температуры воздуха представляет интерес оценка реакции вечной мерзлоты на изменение климата. При потеплении климата увеличивается как толщина слоя талого грунта, так и продолжительность периода существования талика. Для исследования мощности сезонно-талого слоя разработана малоразмерная численная модель вертикальных распределений температуры в талом и мёрзлом слоях для периода отсутствия мёрзлого слоя на поверхности почвы. В вертикальном направлении выделяются талый и мёрзлый грунты. Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решения задачи Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мёрзлой и талой зон. На межфазной границе ставятся условие Дирихле для температуры и условие Стефана.

Численный алгоритм основан на методе с выделением фронтов. В одномерной задаче Стефана при переходе к новым переменным расчётная область отображается по пространственной переменной на отрезок  $[0, 1]$ . В уравнениях появляются конвективные слагаемые, характеризующие скорость переноса температуры  $w_i$ . Предложен упрощённый вариант решения задачи Стефана без учёта  $w_i$  в уравнении для температуры («приближение медленных движений границ фазового перехода»).

Алгоритм состоит из двух этапов. Пусть на  $n$ -ом временном слое известны распределения температуры в рассматриваемых слоях и положение границы фазового перехода, тогда нахождение неизвестных переменных в момент времени  $t_{n+1}$  выполняется в два этапа: на первом этапе определяются распределения температуры в выделенных слоях; на втором этапе из условия Стефана уточняется положение границы раздела фаз.

Математическая модель динамики вечной мерзлоты в летний период содержит неопределённые параметры. Значения этих параметров определялись с помощью эмпирических формул, вычислительных экспериментов и результатов натурных измерений. В результате модель настраивается на конкретный объект исследований. Значения параметров модели могут существенно различаться в разных географических регионах.

Проверка работоспособности численной модели проведена для района озера Тулик (Аляска). Использовались массивы среднесуточных значений температуры воздуха, измеренной температуры почвы на глубине до 1.0 м. Получено согласие рассчитанных значений глубины талого слоя и температуры поверхности почвы с результатами измерений. После вычисления толщин мёрзлых и талых слоев, распределений температуры в слоях оцениваются вертикальные распределения биохимических компонентов. Математическая модель динамики концентраций биохимических компонентов основана на уравнении диффузии.

Особенностью модели является относительно небольшое количество входных параметров. В рассмотренном варианте для прогноза динамики сезонно-талого слоя достаточно знать сценарии изменений температуры воздуха. Разработанная численная модель позволяет исследовать динамику температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши. С выбранными параметрами модели по данным 2010 г. выполнены прогнозные расчёты для 2009 г. Использовались только среднесуточные значения температуры воздуха. На рисунке 6 показана динамика заглубления талого грунта, на рисунке 7 приведен график температуры поверхности почвы.

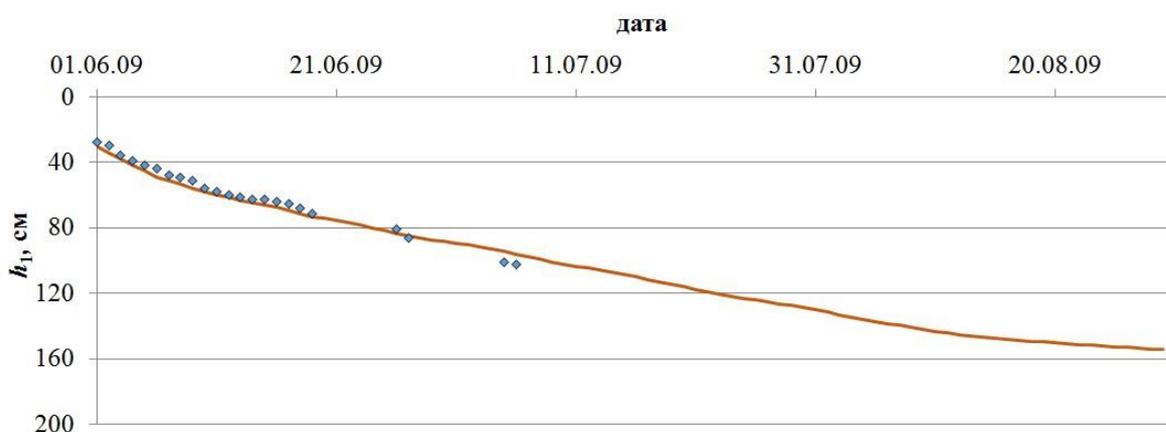


Рисунок 6 – Динамика заглубления талого слоя в 2009 г. Точками обозначены измеренные значения, сплошная линия – рассчитанные

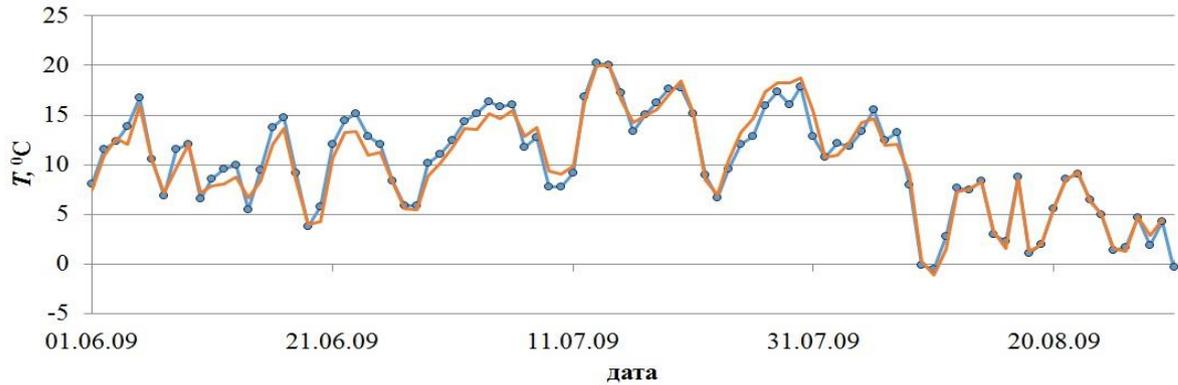


Рисунок 7 – Температура поверхности почвы в 2009 г. Линией с точками обозначены измеренные значения, сплошная линия – рассчитанные

### 3.2 Разработка и апробация упрощённой математической модели теплообмена для описания гидротермики Абаканской протоки. Сценарное моделирование

После возведения Красноярской ГЭС температура воды Енисея ниже плотины понизилась в летние месяцы на 10-12 градусов. С целью создания условий для купания летом Абаканская протока была перекрыта дамбой и устроен выпуск тёплой воды в протоку с ТЭЦ-2 (рисунок 8). Для выработки рекомендаций по сооружению проточного

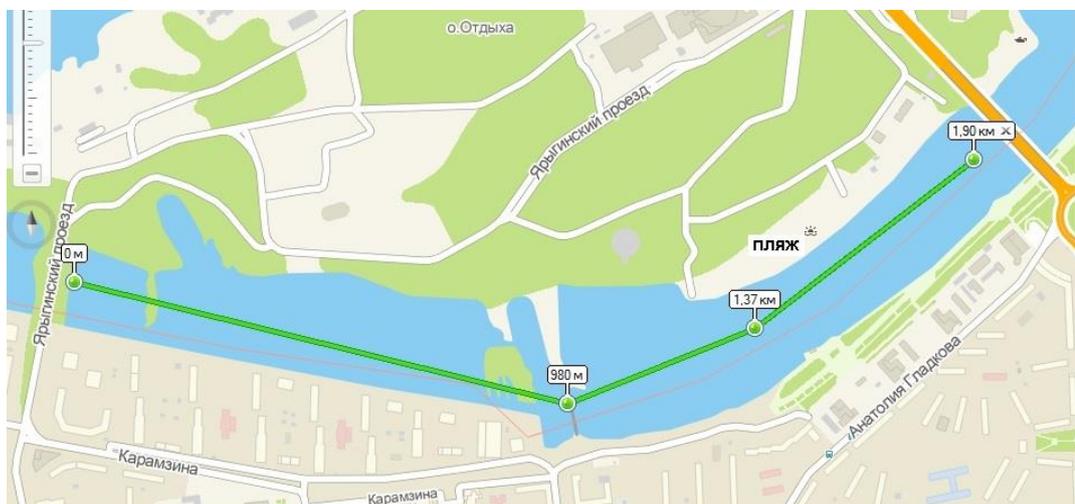


Рисунок 8 – Схема Абаканской протоки (2ГИС Красноярск)

Сброс теплой воды ТЭЦ-2 осуществляется в центральной части протоки у правого берега (на расстоянии ~980 м от дамбы) через рассеивающий выпуск, шириной  $B_{fl}$ ,

бассейна необходимо дать прогноз температуры воды в протоке при различных условиях водообмена. Для исследования гидротермического режима проточного водоёма применялась упрощённая математическая модель (двумерная в вертикальной плоскости) в приближениях Буссинеска, медленных течений, гидростатики, «твёрдой крышки»

в переменных функция тока – вихрь. Коэффициент вертикального турбулентного обмена определялся по формуле Прандтля – Обухова с учётом приближения Экмана и формуле Маккавеева. поэтому температура воды в этом створе близка к средневзвешенной:

$$T^{cp} = \frac{T_3^{cp} \cdot Q_{in} \cdot \frac{B_{fl}}{B_{in}} + T_{fl} \cdot Q_{fl}}{Q_{in} \cdot \frac{B_{fl}}{B_{in}} + Q_{fl}}.$$

Здесь  $T_{in}$  – температура воды в реке,  $T_{fl}$  – температура теплой воды,  $T_3^{cp} = H^{-1} \int_0^H T_3 dz$  – средняя температура в створе смешивания,  $T_3(z)$  – рассчитанная температура воды в конце участка перед водовыпуском,  $Q_{in}$  – расход воды через дамбу,  $Q_{fl}$  - расход тёплой воды с ТЭЦ-2,  $B_{in}$  – ширина протоки. Численный алгоритм основан на явной схеме, разностное уравнение для функции тока решается методом прогонки. Программа реализована на языке C++ в оболочке Visual Studio, включает в себя расчётные модули и модули по обработке входных параметров и метеоданных. Тепловые потоки рассчитываются на каждом шаге по времени и зависят как от входных данных (широта местности, температура воздуха, влажность, облачность), так и от рассчитанной температуры водной поверхности и текущего времени суток. Рассчитанные значения (температуры воды, скорости течения в каждом створе) выводятся в текстовые файлы, которые экспортируются в Excel, удобный для анализа полученных результатов.

Таблица 1 – Примеры расчетов температуры воды в районе пляжа

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
параметры	$Q_{in}$	9	2.5	4.5	9	4.5	4.5	4.5	9	9	2.5
	$T_{in}$	10	10	10	10	12	10	12	12	12	12
	$Q_{fl}$	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	9	9	9	9	4.5
	$T_{fl}$	18	22	22	22	18	22	18	18	22	22
$B_{fl}$	200	14	12.67	17.71	16	14	15	18	16	15	17
	100	15.33	14	19.39	18	16	16	19.6	16.8	16	18.67
	70	15.93	14.71	20.05	18.89	17.06	16.44	20.21	17.11	16.44	19.41

Комфортными для купания вариантами являются № 3, 4, 7, 10 (в предположении что температура воды выше 18 градусов является комфортной). Результаты работы могут быть полезными при разработке проектов обустройства проток в черте г. Красноярска для организации купания летом.

### 3.3 Построение численной модели взаимодействия биогенных веществ в солёном озере

1. Методом модифицированных периодограмм проведён спектральный анализ длительных измерений температуры в летний период 2013-2015 гг. в различных точках озера Ши́ра. Показано, что основные максимумы спектральной плотности встречаются на частотах, соответствующих следующим периодам внутренних волн: 5.1~5.3 ч; 6.7~7.1 ч; 8.0~8.5 ч и кратным им (10.6~11.8 ч, 21.3~25.6 ч; 13.3~14.2 ч; 16~16.4 ч, 32 ч).

2. Обработаны данные натурных измерений скорости в озере Ши́ра в период 17.06.2014 – 30.07.2014 методом главных компонент; анализ годографа наиболее значимой компоненты течения как функции времени позволил определить преимущественное направление течения, рисунок 9.



Рисунок 9 – Годограф (м/с) для горизонтальной скорости по измерениям ADCP 600 kHz в период 17.06.2014 – 20.06.2014

В начале рассмотренного периода преимущественное направление течения север-юг, в конце – запад-восток, что определяет неравномерное распределение биоты в озере в данный период.

3. Обработаны данные натурных измерений скорости в озере Ши́ра в 2018 году с использованием метода главных кривых; получены годографы скорости, которым можно дать физическую интерпретацию – структура течения в один момент времени в пяти различных географических точках озера, рисунок 10.

В верхнем однородном слое максимальная величина модуля восточной компоненты скорости не превышает 7,7 см/с, северной компоненты скорости – 12,4 см/с.

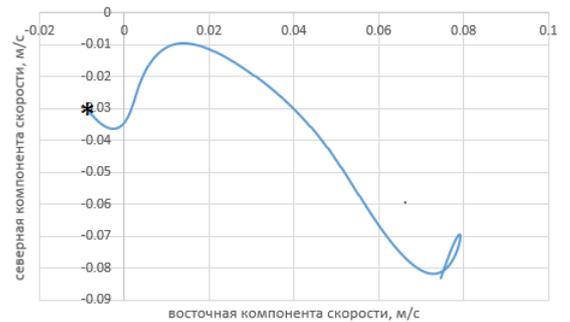
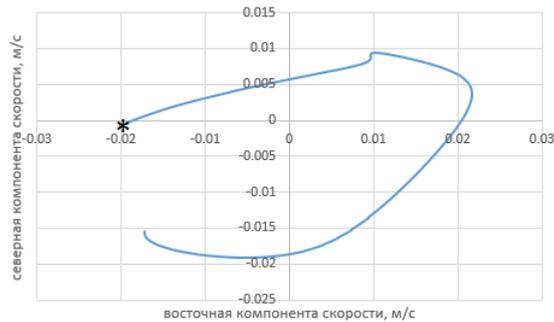
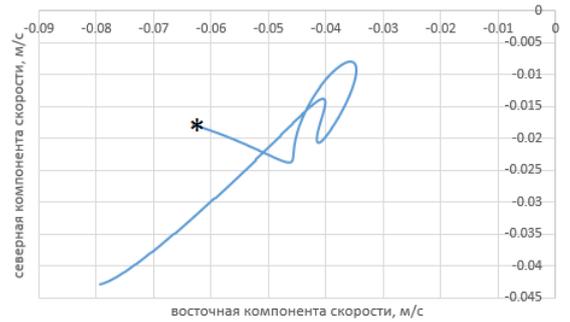
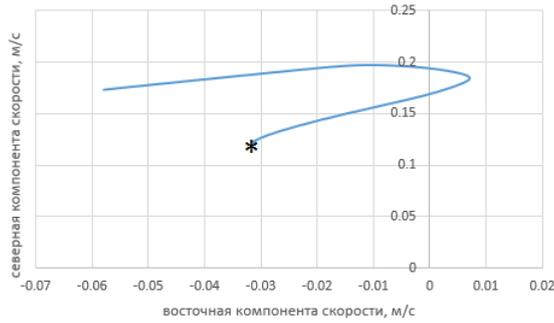
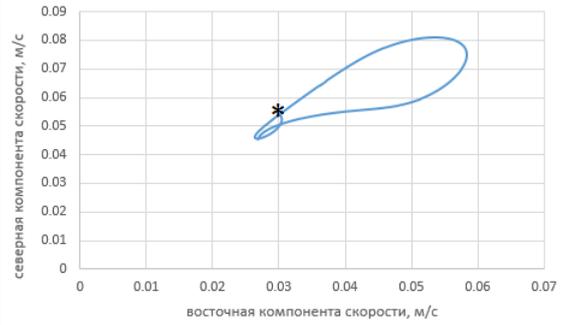


Рисунок 10 – Точки измерений скорости в 2018 году (слева вверху). Годографы скорости (слева-направо, сверху-вниз) в точках Т4, Т3, Т7, Т8, Т9 на глубине от 1,9 м до 6,9 м. Звёздочкой отмечена самая близкая к поверхности точка измерения

В точках Т4, Т8, Т9 в верхнем однородном слое происходит поворот скорости по глубине по часовой стрелке, как и в модели стационарного течения однородной жидкости. В точке Т3 этот поворот осуществляется против часовой стрелки. Результат может быть использован для анализа распределения биопланктона в озере Шира.

**4 Анализ геометрически линейной модели динамики жидкого кристалла, основанной на акустическом приближении уравнений вязкоупругого континуума Коссера с конечными поворотами доменных структур. Алгоритмическая и программная реализация модели для вычислительных систем с графическими ускорителями. Применение разработанной вычислительной технологии к моделированию поведения жидкого кристалла под действием механических напряжений, температурных и электрических полей. Разработка алгоритмов численного решения задачи минимизации квадратичного функционала при ограничениях типа равенств ортогонально-проекционным методом в применении к модели Озеена – Франка**

#### **4.1 Математическое и численное моделирование поведения жидких кристаллов**

Ранее в отчёте Института за 2020 г. по завершённом научном проекте «Математическое моделирование сложных систем и процессов с применением высокопроизводительных вычислительных комплексов новых поколений» (НИР 0356-2019-0015) были анонсированы результаты, связанные с построением и исследованием упрощённой модели жидкого кристалла (модели акустического приближения), которая формулируется в терминах скоростей поступательного движения доменов молекул, угловой скорости, описывающей вращение доменов, давления, касательного напряжения, моментных напряжений и температуры. Были разработаны параллельные вычислительные алгоритмы, реализующие полную модель. В Роспатенте зарегистрирован программный комплекс для компьютеров с графическими ускорителями, созданный по технологии параллельного программирования CUDA. Однако использование этого комплекса для численного решения задач динамики жидкокристаллических структур на протяжённых для такого рода процессов интервалах времени (порядка десятков и сотен миллисекунд), как оказалось, даже с учётом полученного за счёт распараллеливания 30 – 50 кратного ускорения счёта требует процессорного времени порядка нескольких суток. Тем не менее на основе полной модели с применением численных расчётов было показано, что в нематических жидких кристаллах невозможно наблюдать эффект ориентационной термоупругости, который состоит в изменении ориентации доменов молекул исключительно за счёт температурного (немеханического) воздействия на границе. Было также показано, что жидкий кристалл, как микронеоднородная среда с вращательными степенями свободы, обладает специфической резонансной частотой вращательного движения, которая по существу является феноменологическим параметром среды, не зависящим от размеров занимаемой области и условий на её границе.

Исследования отчетного 2021 года были направлены на разработку алгоритмов и программ для численного решения задачи о воздействии электрического поля на протяжённый жидкокристаллический слой. Динамические (переходные) процессы в слое моделировались на основе системы двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для касательного напряжения  $q$  и угловой скорости  $\omega$ , вытекающих из полной модели. Применяя такой подход, удалось многократно сократить временные затраты на решение задачи.

На рисунке 11 изображена схематическая постановка задачи. Там же приведены уравнения для электрического потенциала  $\varphi$  в разных подобластях окружающего пространства – в пределах полосы, занятой жидким кристаллом (диэлектриком), и за её пределами снизу и сверху в вакууме. Задача рассматривается в плоской постановке, где  $\varepsilon$  – тензор диэлектрической проницаемости, учитывающий неоднородную ориентацию молекул. Жидкий кристалл помещён между короткими пластинами конденсатора. Он считается бесконечным в горизонтальном направлении, а система пластин – периодической. Далее при формулировке краевой задачи на вертикальных сторонах прямоугольника, выделенного из полосы с учётом симметрии, ставятся граничные условия симметрии или антисимметрии, в зависимости от физического смысла функций, входящих в эти условия.

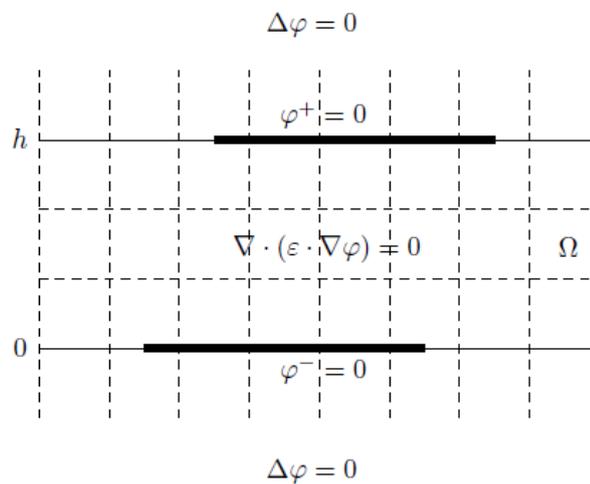


Рисунок 11 – Схема возмущения жидкокристаллического слоя электрическим полем

Система двух уравнений механики описывает вращательное движение доменов с учётом упругого взаимодействия и вязких напряжений:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{\eta} \frac{\partial q}{\partial t} + 2\alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \left( \Delta q + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{2}{j} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\gamma}{j} \Delta \omega + \frac{1}{j} \frac{\partial m}{\partial t}.$$

Здесь  $f_1$ ,  $f_2$  и  $m$  – объёмные силы и момент сил, действующие на жидкий кристалл со стороны электрического поля,  $\rho$  – плотность,  $j$  – объёмная плотность момента инерции молекул (доменов молекул),  $\alpha$  и  $\gamma$  – феноменологические параметры упругости,  $\eta$  – коэффициент вязкости. Для этой системы построена явная разностная схема “крест” с условием устойчивости

$$\left( \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{j} \right) \tau^2 \leq \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)^{-1},$$

где  $\tau$  – шаг сетки по времени,  $h_x$  и  $h_y$  – шаги по пространственным переменным. Распараллеливание вычислительного алгоритма по технологии CUDA для такой схемы не представляет особой сложности, так как отдельные нити графического устройства выполняют однотипные операции по явным формулам.

Алгоритм численного решения уравнений для электрического потенциала с учётом зависимости диэлектрической проницаемости от углов ориентации молекул, который применялся на каждом шаге по времени в соответствии с текущим распределением углов, представлен ниже при описании метода решения статической задачи.

На рисунке 12 приведены результаты расчётов, демонстрирующие образование больших доменов молекул (так называемых роёв) под действием поля, наведённого поверхностными электрическими зарядами на пластинах – обкладках конденсатора (утолщённых линиях на верхней и нижней сторонах слоя), и смену конфигурации роёв со временем. Ориентация молекул показана короткими тонкими отрезками без стрелок.

При исследовании статического (равновесного) состояния протяжённого слоя использовались уравнения Озеена – Франка для угла поворота доменов и электрического потенциала, вытекающие из вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Такие уравнения могут быть также получены из полной модели акустического приближения в рамках гипотезы о пренебрежимой малости касательных напряжений, обусловленных вращением доменов. Вопрос о том, являются ли касательные напряжения малыми, требует дополнительного изучения. Для этого они должны по крайней мере отсутствовать на границе. Но в рассматриваемой задаче касательные напряжения

*a*

*б*

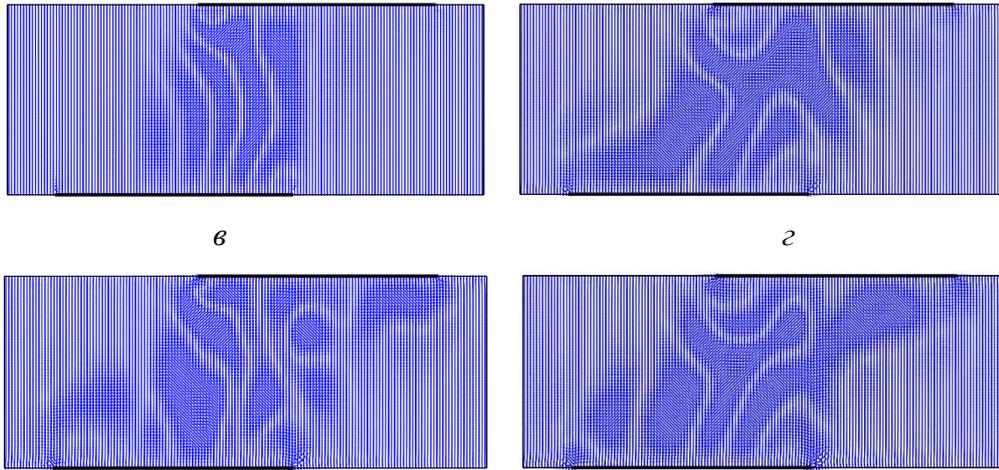


Рисунок 12 – Распределение углов поворота молекул жидкокристаллического слоя  $10 \times 4$  мкм в моменты времени: а) 1.8 мкс, б) 7.2 мкс, в) 10.8 мкс, з) 14.4 мкс

неизбежно появляются на границе, если пластины конденсатора заметно нагреваются под действием электрического поля, деформируясь за счёт температурного расширения, и если коэффициенты объёмного температурного расширения для материала пластин и для жидкого кристалла сильно различаются.

Минимизируемый интеграл упругой потенциальной энергии Франка имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \gamma \left( (\theta - \theta_0)_x^2 + (\theta - \theta_0)_y^2 \right) - \varepsilon^0 \varepsilon^\perp (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \varepsilon^0 (\varepsilon^p - \varepsilon^\perp) (\varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta)^2 \right) dx dy.$$

Здесь  $\theta(x,y)$  – распределение угла поворота доменов относительно горизонтальной оси в состоянии равновесия,  $\theta_0(x,y)$  – начальное распределение угла, которое достигается с помощью специальных технологических операций на стадии изготовления жидкого кристалла;  $\varepsilon^{\parallel}$  и  $\varepsilon^\perp$  – диэлектрические проницаемости в направлении ориентации молекулы и в ортогональном направлении,  $\varepsilon^0$  – электрическая постоянная.

Варьируя интеграл, можно получить два уравнения Эйлера  $\delta_\theta J(\theta, \varphi) = 0$  и  $\delta_\varphi J(\theta, \varphi) = 0$  в развернутой форме:

$$-\frac{2\gamma}{\varepsilon^0 (\varepsilon^p - \varepsilon^\perp)} \Delta(\theta - \theta_0) = 2\varphi_x \varphi_y \cos 2\theta - (\varphi_x^2 - \varphi_y^2) \sin 2\theta,$$

$$-\frac{2\varepsilon^\perp}{\varepsilon^p - \varepsilon^\perp} \Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi_x \cos^2 \theta + \varphi_y \sin 2\theta) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_x \sin 2\theta + 2\varphi_y \sin^2 \theta).$$

Для численного решения полученных уравнений в области  $\Omega$  построена вариационно-разностная схема, разработан параллельный вычислительный алгоритм, выполнена программная реализация алгоритма по технологии CUDA. Уравнение Лапласа для потенциала во внешности жидкокристаллического слоя решалось по методу прямых на сетке, согласованной с разностной сеткой в основной области. На пластинах конденсатора было задано равномерное распределение потенциала:

$$\varphi^+ = \varphi = \varphi^0 \quad \text{при} \quad y = h, \quad \varphi = \varphi^- = -\varphi^0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

где  $\varphi^\pm$  – предельные значения потенциала на границах сверху и снизу относительно слоя,  $\varphi$  – предельные значение потенциала на этих же границах со стороны слоя,  $\varphi^0$  – постоянная, характеризующая интенсивность электрического поля. При переходе через границы раздела “диэлектрик – вакуум” постулировались условия непрерывности электрического потенциала и непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции:

$$\begin{aligned} \varphi^+ = \varphi, \quad \varepsilon_{xy} \varphi_x + \varepsilon_{yy} \varphi_y = \varphi_y^+ \quad & \text{при} \quad y = h, \\ \varphi = \varphi^-, \quad \varepsilon_{xy} \varphi_x + \varepsilon_{yy} \varphi_y = \varphi_y^- \quad & \text{при} \quad y = 0. \end{aligned}$$

На боковых сторонах прямоугольника ставились граничные условия периодичности:

$$\varphi(l, y) = \varphi(0, y), \quad \varphi_x(l, y) = \varphi_x(0, y).$$

Уравнение в области  $\Omega$  с соответствующими граничными условиями решалось численно с помощью быстрого преобразования Фурье на основе итерационного алгоритма:

$$\Delta \varphi^{n+1} = \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^\perp}{\varepsilon^p + \varepsilon^\perp} \left( \Delta \varphi^n - \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi_x^n \cos^2 \theta + \varphi_y^n \sin 2\theta) - \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_x^n \sin 2\theta + 2\varphi_y^n \sin^2 \theta) \right).$$

Необходимо заметить, что решение уравнений для электрического потенциала в бесконечной области, в разных подобластях с условиями сопряжения (склейки) решений на границах раздела представляет собой довольно сложную задачу. Аналогичный итерационный алгоритм, в котором рекуррентно решается уравнение Пуассона, применялся также при решении уравнения для угла ориентации доменов. Для ускорения

счёта при реализации двух вложенных друг в друга итерационных процессов строилась диагональная последовательность.

Верификация алгоритма выполнялась путём сравнения расчётного порогового значения разности потенциалов в жидком кристалле с горизонтальной ориентацией волокон в случае непрерывных пластин конденсатора. Показано, что оно согласуется с пороговым значением, характеризующим эффект Фредерикса потери устойчивости равновесия молекул жидкокристаллического слоя под действием равномерного электрического поля. С помощью численных расчётов проведен анализ неустойчивости равновесия доменных структур под действием слабого электрического поля при различной начальной ориентации молекул. На рисунке 13 представлено распределение

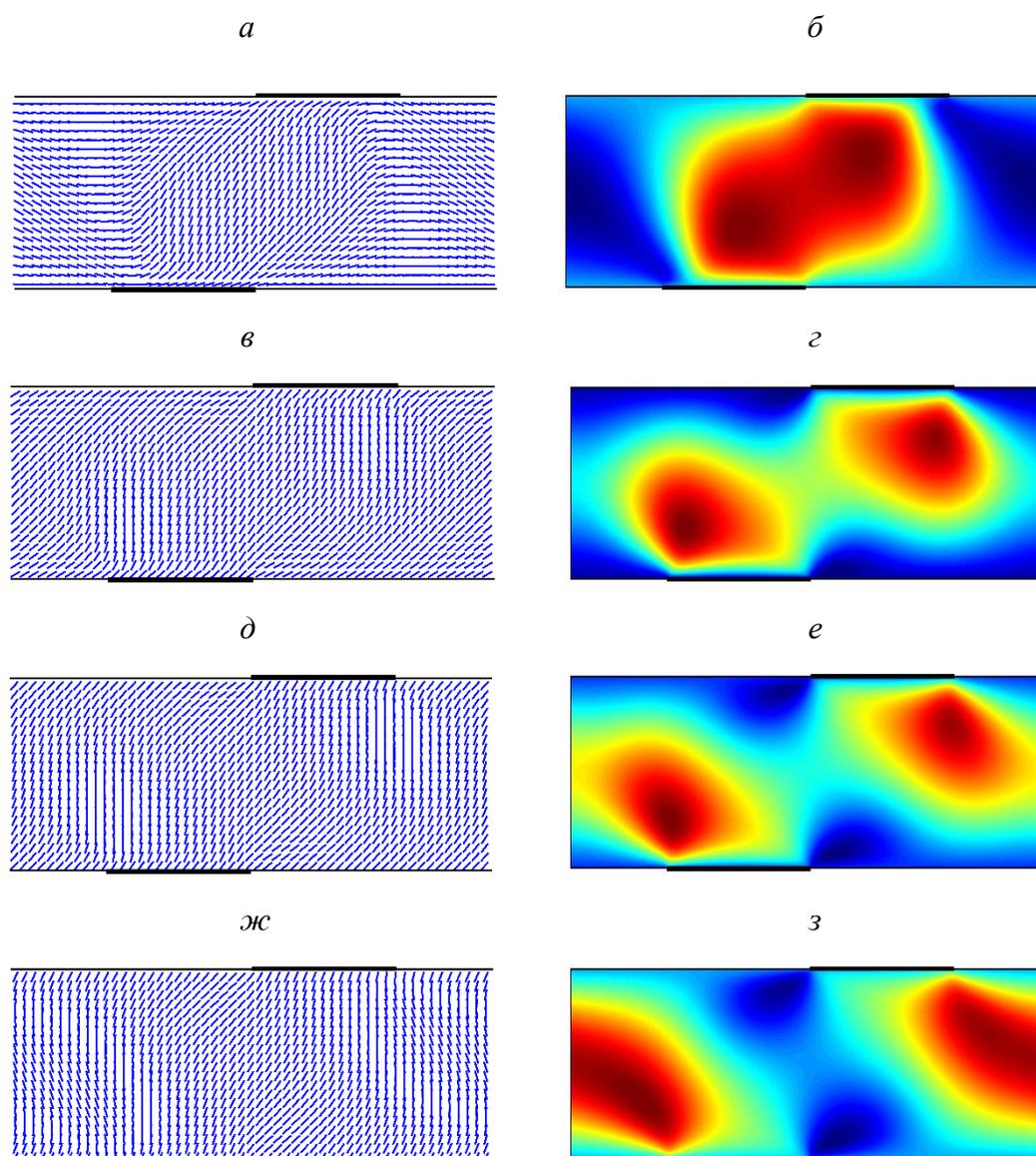


Рисунок 13 – Равновесная ориентация молекул при разных начальных углах  $\theta_0$ :  $0^\circ$  (а, б),  $30^\circ$  (в, г),  $45^\circ$  (д, е),  $60^\circ$  (ж, з); распределение углов поворота молекул (а, в, д, ж), линии уровня  $\theta$  (б, г, е, з)

углов поворота в слое жидкого кристалла под действием разности потенциалов, которая превышает пороговое значение, приводящее к потере устойчивости равновесия. Как видно из рисунков, зоны потери устойчивости могут наблюдаться независимо от начальной ориентации молекул по отношению к плоскости пластин конденсатора.

В целом, проведённые расчёты показали, что предлагаемая математическая модель и вычислительная методика качественно описывают некоторые особенности поведения жидкокристаллических материалов и могут применяться при исследовании переходных динамических процессов и равновесного состояния жидких кристаллов под действием слабых механических, температурных и электрических возмущений.

#### **4.2 Вычислительные алгоритмы и компьютерные программы для решения статических задач**

В течение 2021 года получены следующие основные научные результаты.

Базовые дискретные модели тел, которые учитывают их неоднородную, микронеоднородную структуру в рамках микроподхода, имеют очень высокую размерность. Реализация метода конечных элементов для таких базовых моделей в силу ограниченности ресурсов ЭВМ затруднительна. Для решения данной проблемы разработаны следующие два метода.

1. Метод эквивалентных условий прочности (МЭУП) для расчёта на статическую прочность упругих тел с неоднородной и микронеоднородной регулярной структурой, который реализуется с помощью метода конечных элементов с применением многосеточных конечных элементов. Расчёт на прочность композитных тел по МЭУП сводится к расчёту на прочность упругих изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности, которые определяются на основе условий прочности, заданных для композитных тел. В основе метода лежит следующее утверждение: для всякого композитного тела  $V_0$  существует такое изотропное однородное тело  $V^b$  и число  $p > 0$  (коэффициент эквивалентности), что если коэффициент запаса  $n_b$  тела  $V^b$  удовлетворяет эквивалентным условиям прочности вида

$$pn_1(1 + \delta_\alpha) \leq n_b(1 - \delta_\alpha^2) \leq pn_2(1 - \delta_\alpha),$$

то коэффициент запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ , где  $n_1, n_2$  заданы, коэффициент запаса  $n_0$  ( $n_b$ ) отвечает точному (приближённому) решению задачи теории упругости, построенному для композитного

тела  $V_0$  (тела  $V^b$ ),  $\delta_\alpha < (n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$ ,  $\delta_\alpha$  – верхняя оценка погрешности  $\delta_b$  максимального эквивалентного напряжения тела  $V^b$ , отвечающего приближённому решению.

При построении эквивалентных условий прочности, т. е. при нахождении коэффициента эквивалентности  $p$ , используется система дискретных моделей, размерности которых меньше размерностей базовых моделей. Если для композитных тел задано множество различных нагружений, то в этом случае применяются обобщённые эквивалентные условия прочности. Доказано следующее утверждение. Пусть для множества  $Q$  различных нагружений, заданных для композитного тела  $V_0$ , согласно МЭУП построены обобщённые эквивалентные условия прочности и для коэффициента запаса изотропного однородного тела  $V^b$ , имеющего нагружение  $F \in Q$ , обобщённые эквивалентные условия прочности выполняются. Тогда выполняются заданные условия прочности для коэффициента запаса композитного тела  $V_0$ , имеющего нагружение  $F$ .

Реализация МЭУП требует малых ресурсов ЭВМ и не использует процедуры измельчения композитных дискретных моделей.

2. Метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчёта на прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой.

Дискретные модели композитных тел будем называть фиктивными моделями, если последние обладают следующими свойствами:

1. Неоднородные структуры фиктивных моделей отличаются от неоднородной структуры базовых моделей.

2. Фиктивные модели отражают форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры композитных тел, распределение модулей упругости, отвечающее базовым моделям.

3. Последовательность, состоящая из фиктивных моделей, сходится к базовым моделям композитных тел, т. е. предельная фиктивная модель последовательности совпадает с базовой моделью.

4. Размерности фиктивных моделей меньше размерности базовых моделей, кроме предельной фиктивной модели, размерность которой равна размерности базовой модели.

Отметим, что свойства 3, 4 являются важными для практики.

В качестве фиктивных моделей рассматриваются масштабированные композитные дискретные модели, размерности которых меньше размерности базовых моделей. Предлагаемые фиктивные модели, образованные с помощью масштабированной регулярной ячейки композитных тел, имеют такие же характерные размеры, форму,

закрепления и нагружения, как базовые, но неоднородные структуры фиктивных моделей отличаются от неоднородной структуры базовых. Рассматриваемые фиктивные модели отражают вид неоднородной структуры базовых моделей и распределение модулей упругости, отвечающее базовым моделям. В расчётах используется последовательность фиктивных моделей, которая сходится к базовым моделям, т. е. предельная фиктивная модель этой последовательности совпадает с базовой. Сходимость такой последовательности обеспечивает сходимость напряжений фиктивных моделей к соответствующим напряжениям базовых моделей, что используется в расчётах на прочность композитных тел. Расчёты показывают равномерную монотонную сходимость максимальных эквивалентных напряжений фиктивных моделей к максимальному эквивалентному напряжению базовых моделей композитных тел. Реализация МФДМ требует в  $10^3 \div 10^6$  раз меньше объёма памяти ЭВМ, чем аналогичный расчёт с использованием базовых моделей композитных тел, и не требует их измельчения. Реализация МКЭ для фиктивных моделей с применением МнКЭ приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для расчётов на прочность тел с микронеоднородной регулярной структурой.

#### **4.3 Верификация пакетов программ для моделирования НДС конструкций**

Проблема верификации пакетов для моделирования НДС конструкций является важной составляющей вычислительной механики. Проверка корректности вычислений особенно затруднена для неоднородных сред. В частности, для анизотропных слоистых конструкций отсутствуют достоверные экспериментальные данные о внутреннем распределении НДС, а известные точные решения не очень “физичны” и крайне сложно реализуются численно. Следуя широко известному подходу (С. П. Тимошенко, С. А. Амбарцумян, Ю. В. Немировский) в теории прочности тонких ортотропных линейно упругих слоистых пластин, позволяющему перейти от трёхмерных задач к двумерным, удалось получить новый класс аналитических решений пространственных стационарных задач.

Считая заданными значения вектора перемещений и нормальных компонент тензора напряжений на срединной плоскости ортотропной пластины, последовательным интегрированием по нормальной (к срединной плоскости) координате линейных стационарных уравнений равновесия и дифференциальных зависимостей нормальных составляющих деформаций от напряжений получены выражения полей перемещений и нормальных внутренних усилий через три оставшиеся “плоские” компоненты тензора напряжений. Для последних силовых составляющих из закона Гука выведена система из

трёх интегродифференциальные уравнений. При отсутствии массовых сил и температуры, эта система уравнений имеет тривиальное решение, отправляясь от которого получен класс точных решений пространственной задачи ортотропной линейной теории упругости. Каждое решение из этого класса однозначно определяется двенадцатью константами и одной гармонической функцией прямоугольных координатах срединной плоскости пластины. В силу простоты этих решений, достоверно и эффективно вычисляемых при помощи стандартных математических пакетов, метод Сен-Венана позволяет использовать их в качестве верификационных тестов при моделировании напряжённо-деформированного состояния конструкций.

**5 Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений. Сравнительный анализ исследуемых изменений параметра EWN по данным наблюдений миссии GRACE с данными новой системы спутников GRACE-FO. Проверка гипотезы о взаимосвязи параметров гравитационного поля Земли с активными сейсмическими процессами в её недрах.**

### **5.1 Моделирование данных наблюдений геокатастроф**

В отчётный период выполнено моделирование и детальный анализа особенностей изменчивости параметра EWN, а также его связь с глобальными геодинамическими и геофизическими процессами относительно очаговых зон катастрофических землетрясений: Японское (2011) и Охотоморское (2013).

В работе исследованы особенности очаговой области Японского землетрясения с  $M_w = 9.1$  по данным каталога USGS за период с 2010 по 2012 гг. Сформирован архив данных, полученных на основе измерений космической системы GRACE. По разработанной вычислительной методике уточнены размеры гравитационных аномалий, обусловленных процессами в очаговой зоне подводного землетрясения с  $M > 8$ .

Используя спутниковые данные, построены пространственные модели вариаций параметра EWN относительно очаговой зоны Японского землетрясения 2011 г. для возмущённых и фоновых условий геосреды. Изучены вариации параметра EWN с периодом 30 суток относительно гипоцентральной области Японского землетрясения за исследуемый период. Обнаружено, что во время подготовки катастрофического землетрясения в течение трёх месяцев в этой области существенно возрастают значения параметра EWN, при афтершоковой активности значения EWN понижаются. Вариации этого параметра относительно очаговой зоны могут быть обусловлены различными геофизическими причинами.

На основе разработанной методики рассчитано распределение индекса аномальности в виде  $\delta EWN(\varphi, \lambda, t)$  (относительное отклонение в период активизации от фонового сейсмического режима) и построены уточнённые цифровые карты гравитационных аномалий относительно исследуемой очаговой зоны (рисунке 14). Полагаем, что образование аномальной области связано с геодинамическими процессами в регионе. Полученные результаты свидетельствуют о том, что измерения гравиметрических систем GRACE и GRACE-FO применимы для анализа очаговых зон сильнейших землетрясений.

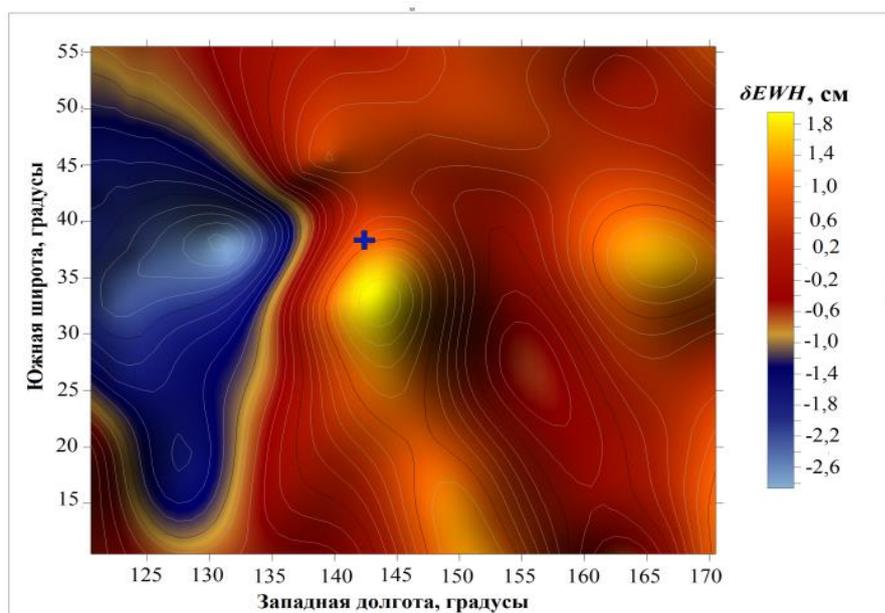


Рисунок 14 – Визуализация области, выделенная по индексу аномальности в виде  $\delta EWN(\varphi, \lambda, t)$ , относительно очаговой области Японского землетрясения 2011 г. (крестиком отмечено местоположение эпицентра)

Выполнен анализ геодинимических особенностей сильного глубокофокусного Охотоморского землетрясения с  $M_w = 8.3$  по данным USGS за период с 2008 по 2014 гг. Для выявления особенностей аномалии вариаций параметра EWN относительно очаговой зоны землетрясения построены карты отклонений EWN, а также карты распределения модифицированных индексов аномальности  $\delta EWN$  и  $\omega EWN$  для периода времени – май 2013 г. Выполнен статистический анализ результатов расчётов. По картам распределения индексов аномальности  $\delta EWN$  и  $\omega EWN$  выполнена оценка местоположения положительной аномалии относительно эпицентра. Область этой аномалии ориентирована в направлении SW-NE (рисунок 15). Считаем, что образование выделенной аномалии связано с активными геодинимическими процессами в исследуемом регионе в апреле-июле 2013 г.

Выполнен сравнительный анализ особенностей изменения параметра EWN на основе спутниковых измерений космических систем GRACE и GRACE-FO. Оценка производилась для Земли в целом, включая районы Суши и Мирового океана. Анализ, проведённый за отчетный период, ограничивается относительными изменениями параметра EWN в географическом пространстве (регионы Суши и Океана) во времени с интервалами примерно в один месяц. В итоге, изучена временная зависимость значения «Массы» для Океана и Суши по данным GRACE и GRACE-FO. Полиномиальные тренды для Суши и Океана представлены на рисунок 16. Синий график соответствует Океану,

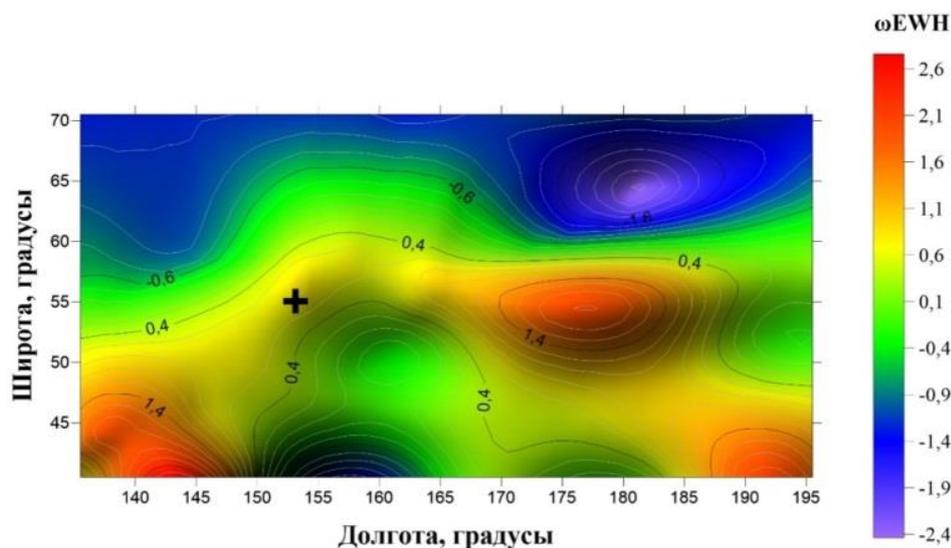


Рисунок 15 – Визуализация пространственного распределения индекса аномальности в виде  $\omega EWN$  (усреднённое относительное отклонение в период активизации от фонового сейсмического режима) относительно очаговой зоны Охотоморского землетрясения (крестиком отмечено местоположение эпицентра)

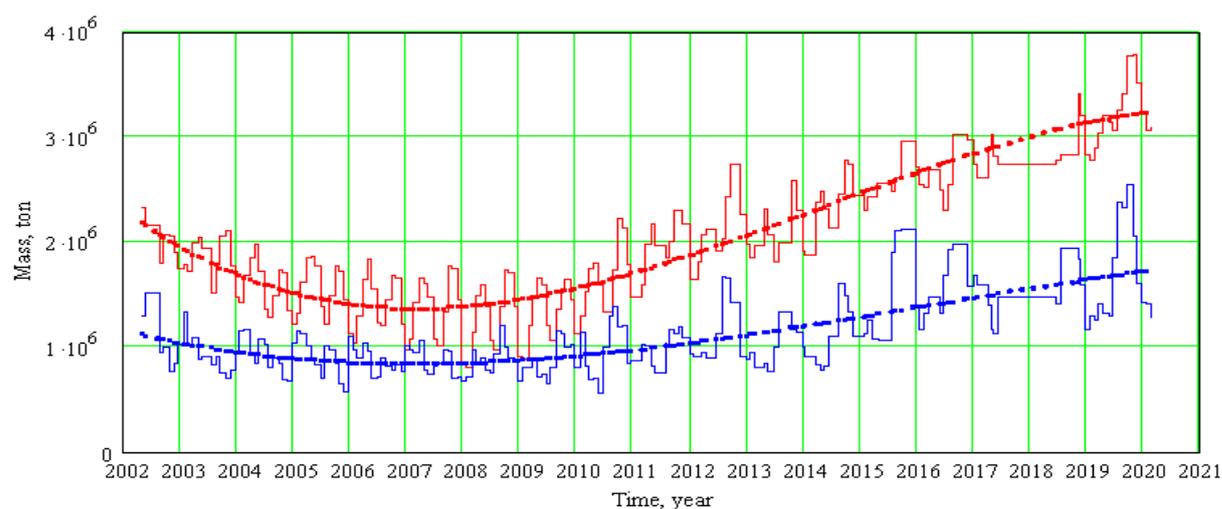


Рисунок 16 – Полиномиальные тренды значения «Массы» для Океана и Суши по данным спутниковых систем GRACE и GRACE-FO

красный – Суше, а точки представляют соответствующие тренды (полиномы 3-й степени). По осям время указано в годах, а величина «Масса» – в тоннах. Как видно из рисунка 16, тренды для суши и океана примерно похожи друг на друга. Таким образом, на основе статистического анализа изменений параметра EWN для Суши и Мирового океана показано, что временные закономерности, полученные по наблюдениям миссии GRACE, сохраняются в данных новой миссии GRACE-FO для основных обнаруженных аномалий. Следовательно, данные GRACE и GRACE-FO хорошо согласуются друг с другом. Выявленные тенденции могут быть связаны с глобальными изменениями климата на Земле.

Выполнены исследования средствами ДЗЗ очаговых зон сильных региональных (Байкальских) землетрясений. Разрабатывались алгоритмы и программные модули для обработки записей землетрясений сильных региональных землетрясений. Цель обработки данных состоит в определении достоверных значений ускорений грунта и других параметров землетрясений от имеющихся записей временных рядов скоростей. Разработанные алгоритмы и реализованное программное обеспечение позволят в дальнейшем сформировать базу данных сильных движений для построения региональных моделей затухания. В отчетный период также изучены сильные землетрясения ( $M > 5.0$ ), зарегистрированные с 2008 по 2020 годы в пределах Байкальской рифтовой зоны.

## **5.2 Влияние магнитного поля Солнца на одну из моделей динамо**

В 2021 году продолжены работы по анализу магнитного поля Солнца с позиции кинематико-гравитационной ионной модели динамо. В итоге сделаны следующие выводы:

1. Влияние внутренних сил и внешних гравитационных полей планет создает полоидальные и тороидальные токи положительно заряженного вещества и, соответственно, генерируют тороидальные и дипольные магнитные поля в исследуемых слоях Солнца.

2. При оценке плотностей зарядов, токов и напряжённости магнитного поля семи верхних слоев Солнца, полученные результаты позволяют предположить, что каждый слой может участвовать в генерации МПС.

3. Интенсификация процесса генерации МПС приливными силами обусловлена подъёмом вещества к поверхности Солнца, способствующим генерации МПС и замедляющим скорость верхних слоёв Солнца.

4. МПС генерируется внутренними силами, которые заставляют вещество двигаться. Внешние приливные силы планет усиливают или ослабляют эти процессы.

5. С учётом различий в углах наклона планетарных орбит по сравнению с плоскостью солнечного экватора был создан корреляционный метод оценки полярности Солнца и применён к детальному анализу полярности МПС в 21 и 22 циклах. Предполагается, что смена полярности предопределяется поочередной сменой солнечной активности северного и южного полушария Солнца.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан и реализован программный комплекс для прямого численного моделирования конвекции в областях с деформируемыми границами, в том числе в условиях фазовых превращений диффузионного типа. Разработаны средства визуализации, позволяющие отслеживать все основные характеристики системы (поля скорости и температуры, распределение концентрации пара в газовой фазе, форму границы раздела, массовую скорость испарения) в динамике и формировать статичные изображения в заданные моменты времени.
2. Проведён анализ граничных условий для описания течения бинарной смеси в длинном горизонтальном канале, для одной из постановок получено точное решение, посредством которого изучено влияние толщины канала, интенсивности расхода и действия поля массовых сил на характеристики течения.
3. Исследованы две обратные начально-краевые задачи для линейного параболического уравнения, возникающие при математическом моделировании движений вязкой теплопроводной жидкости с двумя или одной свободными границами. Неизвестная функция времени входит в правую часть уравнения аддитивно и находится из дополнительного условия интегрального переопределения. Для обеих задач получены априорные оценки решений в равномерной метрике. Установлены достаточные условия на входные данные, при которых решения с ростом времени стремятся к стационарному режиму по экспоненциальному закону.
4. Задача об устойчивости нестационарного движения вращающейся круглой струи идеальной жидкости сведена к решению начально-краевой задачи для уравнения типа Пуанкаре – Соболева с эволюционным условием на свободной начальной границе струи. Решение поставленной задачи построено методом разделения переменных. Найдено асимптотическое поведение амплитуд возмущения свободной границы струи при  $t \rightarrow \infty$ . Произведено сравнение полученных результатов с известными результатами об устойчивости потенциального движения струи. Отметим, что основное движение является трёхмерным и нестационарным. Устойчивость такого рода движений исследовалась впервые в мире.
5. Изучена регуляризация задач устойчивости множества траекторий под влиянием произвольных возмущающих воздействий. Для этого эффективно и точно оцениваются границы множеств решений на основе символьных формул решений обыкновенных дифференциальных уравнений и вычисления параметров кинематики векторного поля. Параметры кинематики векторного поля выполняют регуляризацию, устраняющую

чрезмерный рост границ включений. Показаны преимущества данного подхода в задачах устойчивости множества траекторий.

6. Найдены точные решения трёхмерных уравнений Кадомцева – Петвиашвили; эти решения являются трёхмерными солитонами. Построены общие решения для некоторых классов линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Это позволяет строить широкие классы решений уравнений неоднородной акустики. Для двумерного уравнения неоднородной акустики получены необходимые условия существования классов решений, включающих произвольную функцию и её производные до заданного порядка. Также для этого уравнения построен новый класс точных решений. Построены согласующиеся с экспериментальными данными автомодельные решения, описывающие течение в дальних областях плоского безымпурсного турбулентного следа.

7. Разработана малоразмерная численная модель для прогноза температуры в талом и мёрзлом слоях и заглубления талого слоя в летний период. Предложена упрощённая модель в «приближении медленных движений границ фазового перехода». Калибровочные параметры модели для исследуемого района находятся по известным данным о глубине талого слоя и температуре воздуха в один из летних сезонов. Тестовые расчёты по предложенной модели показывают её адекватность, согласованность с натурными измерениями. Особенностью модели является относительно небольшое количество входных параметров. В рассмотренном варианте для прогноза динамики сезонно-талого слоя достаточно знать сценарии изменений температуры воздуха.

8. Разработана упрощённая математическая модель для исследования двумерных в вертикальной плоскости течений несжимаемой жидкости, реализованная в виде компьютерной программы. Выполнены численные эксперименты по прогнозированию прогрева воды в Абаканской протоке для различных условий водообмена. Результаты работы могут быть полезными при разработке проектов обустройства проток в черте г. Красноярска для организации купания летом.

9. С использованием метода модифицированных периодограмм проведён спектральный анализ длительных измерений температуры и определены частоты внутренних волн в озере Шира в летний период 2013-2015 гг. Методом главных компонент построен годограф наиболее значимой компоненты течения как функции времени, позволяющий определить преимущественное направление течения в озере Шира в период 17.06.2014 – 30.07.2014. Методом главных кривых обработаны данные натурных измерений скорости в озере Шира в 2018 году, позволившие определить одномоментную структуру течения в верхнем однородном слое.

10. Построена математическая модель нестационарного поведения и равновесного состояния жидких кристаллов под действием механических, температурных и электрических воздействий. Выполнена алгоритмическая и программная реализация модели в задачах динамики и статики. Проведена верификация алгоритмов и программ на точных решениях типа монохроматических волн. Получены результаты, имитирующие ориентационный эффект Фредерикса с помощью предложенной модели.

11. Получены результаты моделирования данных наблюдений космической системы GRACE относительно очаговых зон катастрофических землетрясений (Японское, 2011; Охотоморское 2013), а также сравнительного статистического анализа изменений параметра EWH по наблюдениям GRACE и GRACE-FO. Выполнены исследования средствами ДЗЗ очаговых зон сильных региональных (Байкальских) землетрясений. Разработаны алгоритмы и программные модули, предназначенные для обработки записей сильных региональных землетрясений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Petrakov I. E. On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // *Composite Structures*. – 2021. – V. 268. – Art. 113921. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113921. (WoS, Q1)
2. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2021. – DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725. (WoS, Q1)
3. Zakhvataev V. E., Kompaniets L. A. On the existence of soliton like collective modes in liquid water at the viscoelastic crossover // *Scientific reports*. – 2021. – V. 11(1). – Art. 5417. DOI: 10.1038/s41598-021-84277-8. (WoS, Q1)
4. Kaptsov O. V., Kaptsov D. O. Symmetries and Solutions of the Three-Dimensional Kadomtsev – Petviashvili Equations // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2021. – V. 62(4). – P. 649-653. DOI: 10.1134/S0021894421040143. (WoS, Q4)
5. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Smolekho I. V. Modeling of the dynamics of a liquid crystal under the action of weak perturbations // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2021. – V. 62(1). – P. 170-182. DOI: 10.1134/S0021894421010211. (WoS, Q4)
6. Kochnev V. A. Seismogravimetric Methodology: Specifics and Applicability to the Siberian Platform // *Russian Geology and Geophysics*. – 2021. – V. 62(7). – P. 790-797. DOI: 10.2113/RGG20194163. (WoS, Q4)
7. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Surface Tension Effects in the Evaporative Two-Layer Flows // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2021. – V. 9(1). – P. 1-29. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2021036538. (WoS)
8. Kaptsov O. V., Mirzaokhmedov M. M. General Solutions of Some Equations with Variable Coefficients // *Ufa Mathematical Journal*. – 2021. – V. 13(2). – P. 33-40. DOI: 10.13108/2021-13-2-33. (WoS)
9. Lemeshkova E. N., Andreev V. K. On the asymptotic behavior of inverse problems for parabolic equation // *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*. – 2021. – V. 7(2). – P. 905-921. DOI: 10.1007/s41808-021-00127-8. (WoS)
10. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Shefer I. A. Solution of a Two-Layer Flow Problem with Inhomogeneous Evaporation at the Thermocapillary Interface // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2021. – V. 14(4). – P. 404-413. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-404-413. (WoS, ядро РИНЦ)

10. Andreev V. K. Asymptotic behavior of small perturbations for unsteady motion an ideal fluid jet // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021. – V. 14(2). – P. 204-212. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-204-212. (WoS, ядро РИНЦ)
11. Kaptsov O. V. Iterations and groups of formal transformations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021. – V. 14(5). – P. 584-588. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-5-584-588 (WoS, ядро РИНЦ)
12. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. Mathematical modelling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – V. 1889(2). – Art. 022108. DOI: 10.1088/1742-6596/1889/2/022108. (ядро РИНЦ)
13. Rogalev A. N., Feodorova N. A. Regularization of algorithms for estimation of errors of differential equations approximate solutions // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – V. 1715(1). – Art. 012044. DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012044. (ядро РИНЦ)
14. Zakhvataev V.E., Volodko O.S., Kompaniets L.A., Zlobin D.V. Numerical study of a model of terahertz collective modes in DNA // Journal of Physics: Conference Series. – V. 2094, №1. – Art. 22012. DOI: 10.1088/1742-6596/2094/2/022012. (ядро РИНЦ)
15. Kireev I.V. On the class of software system's verification tests for solving stationary problems of linear elasticity // AIP Conference Proceedings. – 2021. – V. 2448. – Art. 020010. DOI: 10.1063/5.0073321. (ядро РИНЦ)
16. Капцов О. В., Мирзаохмедов М. М. Общие решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами // Уфимский математический журнал. – 2021. – Т. 13, № 2. – С. 36-43. (ядро РИНЦ)
17. Капцов О. В., Капцов Д. О. Симметрии и решения трехмерного уравнения Кадомцева – Петвиашвили // Прикладная механика и техническая физика. – 2021 – Т. 62, № 4. – С. 142-147. DOI: 10.15372/PMTF20210414. (ядро РИНЦ)
18. Сенашов В.И. О периодических группах Шункова с почти слойно конечными нормализаторами конечных подгрупп // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2021. – Т. 37. – С. 118-132. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.118. (ядро РИНЦ)
19. Белолипецкий В. М., Генова С. Н. Применение вертикальной модели сезонно-талого слоя для района оз. Тулик (Аляска) // Вычислительные технологии. – 2021. – Т. 26, № 4. – С. 4-15. DOI: 10.25743/ICT.2021.26.4.002. (ядро РИНЦ)
20. Садовский В. М., Садовская О. В., Смолехо И. В. Моделирование динамики жидкого кристалла под действием слабых возмущений // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 193-206. DOI: 10.15372/PMTF20210121. (ядро РИНЦ)

21. Кочнев В. А. Применение сейсмогравитационной технологии при изучении структуры осадочного чехла сибирской платформы // Геология и геофизика. – 2021. – Т. 62, № 7. – С. 967-975. DOI: 10.15372/GiG2020134. (ядро РИНЦ)
22. Петраков И. Е., Садовский В. М., Садовская О. В. Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62, № 5, – С. 172-183. DOI: 10.15372/PMTF20210517. (ядро РИНЦ)
23. Садовский В. М., Садовская О. В., Ефимов Е. А. Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды // Вычислительные методы и программирование. – 2021. – Т. 22, № 1. – С. 47-66. DOI: 10.26089/NumMet.v22r104. (ядро РИНЦ)
24. Mironov V., Simonov K., Zotin A., Kurako. M. Combined Approach to Modeling of Acceleration Response Spectra in Areas of Active Shallow Seismicity // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2021. – V. 238. – P. 161-171. DOI:10.1007/978-981-16-2765-1\_13. (ядро РИНЦ)
25. Zotin A., Kents A., Smonov K., Hamad Yu. Methods of interpretation of CT images with COVID-19 for the formation of feature atlas and assessment of pathological changes in the lungs // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2021. – V. 238. – P. 173-183. DOI: 10.1007/978-981-16-2765-1\_14. (ядро РИНЦ)
26. Kobalinskiy M.V., Simonov K.V., Kuimov V.V., Kirillova S.V. Environmental aspects of the integrated development of forest ecosystems: Zoning and visualization of multidimensional data // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2021. – V. 848, Is. 1. – Art. 12131. DOI: 10.1088/1755-1315/848/1/012131. (ядро РИНЦ)

Приложение Б

Доклады на ведущих международных научных (научно-практических)  
конференциях в Российской Федерации и за рубежом

ФИО докладчика	ФИО всех соавторов доклада, включая докладчика (как указано в программе конференции или в тезисах конференции)	Название доклада	Название конференции (полное, как указано в программе конференции)	Место проведения	Время проведения конференции
Bekezhanova V.B.	Bekezhanova V.B., Goncharova O.N.	Modeling of convection in a two-phase system with weak evaporation induced by local heating	International Symposium "Non-Equilibrium Processes in Continuous Media"	Perm State University, Perm, Russia	September, 16-18, 2021
Смолехо И.В.	Smolekho I., Sadovskaya O., Sadovskii V.	Numerical solution of equations describing the action of electric field on a liquid crystal	Thirteenth Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'21)	пос. Албена, Болгария (online)	24-29 июня, 2021
Садовский В.М.	Sadovskii V., Sadovskaya O.	Simulation of microstructures in blocky rock massifs with thin pliable interlayers	Third Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" - 21st Conference of Continuum Mechanics Focusing on Singularities (CoMFoS21)	г. Новосибирск – г. Токио (online)	14-16 декабря, 2021

Андреев V.K.	Andreev V.K., Lemeshkova E.N.	On the Asymptotic Behavior of Inverse Problems for Parabolic Equation	Analytical and Numerical Methods in Differential Equations (Yanenko 100 and ANMDE 2021)	Suranaree University of Technology Nakhon Ratchasima, Thailand	23-27 августа, 2021
Симонов К.В.	Симонов К.В., Куимов В.В., Зотин А.Г., Кириллова С.В., Кругляков А.С.	Методика геометрическ ого анализа визуальных данных мониторинга ресурсных территорий.	Международн ый научно- практический форум по проблемам устойчивого развития в цифровом мире: «Человек. Экономика. Технологии. Социум» (HETS-2021)	г. Красноярск	14-16 октября, 2021
Рогалев А.Н.	Рогалев А.Н. ИВМ СО РАН г. Красноярск, Рогалев А.А. СФУ г. Красноярск, Федорова Н.А. СФУ, г.Красноярск	Mathematical modelling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories	II International Conference on Metrological Support of Innovative Technologies - ICMSIT-II 2021 Saint Petersburg - Krasnoyarsk, Russia	Петербург, Россия, Санкт- Петербургский гос. университет аэрокосмическ ого приборостроен ия	4-6 марта, 2021
Капцов О.В.	О. V. Kaptsov, М. М. Mirzaokhmed ov	General solution of some linear equations with variable coefficients	Analytical and Numerical Methods in Differential Equations	Thailand	August, 23- 27, 2021

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2021 год

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы
<p>1 Исследование задач конвекции, включая задачи устойчивости течений, и разработка программ для расчёта и средств визуализации движений жидких сред с деформируемой границей раздела (свободной границей) в канонических областях.</p>	<p>1 Комплекс программ для расчёта и визуализации движений жидкости с деформируемыми границами</p>
<p>2 Теоретико-групповой анализ: полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения; уравнений тепломассообмена с учётом эффектов Соре и Дюфура. Построение новых решений интегрируемых моделей Буссинеска. Получение необходимых условий существования классов решений, включающих произвольную функцию и её производные до заданного порядка, для уравнения неоднородной акустики. Построение новых классов точных решений уравнения неоднородной акустики. Проведение теоретико-группового анализа и построение автомодельных решений иерархии моделей дальнего безымпulsiveного турбулентного следа.</p>	<p>2 Автомодельные решения уравнений полуэмпирических моделей турбулентного слоя смешения; новые решения интегрируемых моделей Буссинеска: новые классы точных решений уравнения неоднородной акустики; групповая классификация и точные решения нелинейных уравнений тепломассопереноса</p>
<p>3 Оценка влияния климатической изменчивости на структуру течений соленых озер. Исследование процессов замерзания/оттаивания и биохимических процессов в зоне вечной мерзлоты.</p>	<p>3 Серии прогнозных расчётов для течений в солёных озерах типа оз. Шира на основе трёхмерной модели. Программный модуль для исследования глубины оттаивания и составления карт температурного режима в</p>

<p>Исследование динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши в летний период на основе одномерной в вертикальном направлении математической модели. Разработка и апробация упрощенной математической модели теплообмена для описания гидротермики Абаканской протоки. Сценарное моделирование. Построение численной модели взаимодействия биогенных веществ в солёном озере.</p>	<p>районах вечной мерзлоты</p>
<p>4 Анализ геометрически линейной модели динамики жидкого кристалла, основанной на акустическом приближении уравнений вязкоупругого континуума Коссера с конечными поворотами доменных структур. Алгоритмическая и программная реализация модели для вычислительных систем с графическими ускорителями. Применение разработанной вычислительной технологии к моделированию поведения жидкого кристалла под действием механических напряжений, температурных и электрических полей. Разработка алгоритмов численного решения задачи минимизации квадратичного функционала при ограничениях типа равенств ортогонально-проекционным методом в применении к модели Озеена – Франка.</p>	<p>4 Математическая модель нестационарного поведения жидкого кристалла под действием слабых механических, температурных возмущений и воздействия электрическим полем. Вычислительная технология, включающая в себя параллельные алгоритмы и компьютерные программы. Результаты верификации алгоритмов и программ на тестах – точных решениях. Результаты валидации модели (сравнение расчётных и экспериментальных данных). Результаты моделирования эффекта Фредерикса на основе уравнений динамики жидкого кристалла. Вычислительные алгоритмы и компьютерные программы для решения статических задач</p>
<p>5 Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на</p>	<p>5 Результаты моделирования данных наблюдений природных геодинамических</p>

<p>основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений. Сравнительный анализ исследуемых изменений параметра EWH по данным наблюдений миссии GRACE с данными новой системы спутников GRACE-FO. Проверка гипотезы о взаимосвязи параметров гравитационного поля Земли с активными сейсмическими процессами в её недрах</p>	<p>катастроф и пространственно-временные зависимости на основе спутниковых данных о гравитационных аномалиях Земли. Результаты статистического сравнительного анализа изменений параметра EWH для акваторий Мирового океана по наблюдениям миссии GRACE и новой миссии GRACE-FO</p>
--	---

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

**Количество публикаций по тематике проекта за весь период выполнения проекта по годам**

Индикатор	Ед. измерения	Всего за 2021 г.
<p>Публикации (типа article и review) в научных журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science Core Collection и (или) Scopus)</p>	<p>единиц</p>	<p>9  (из них 3 в научных журналах первого и второго квартилей Web of Science Core Collection)</p>
<p>Прочие публикации в научных журналах, входящих в ядро РИНЦ</p>	<p>единиц</p>	<p>17</p>
<p>Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом</p>	<p>единиц</p>	<p>7</p>
<p>Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности (далее – РИД)</p>	<p>единиц</p>	<p>2</p>