

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958
Рег. № НИОКТР 121081900118-2
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН
чл.-корр. РАН

_____ А. А. Шпедт

«18» января 2023 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕД
С ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА В ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
(промежуточный, этап 2)

Направление фундаментальных исследований
1.1.3. Математическое моделирование
(№ FWES-2021-0002)

Руководитель НИР
главный научный сотрудник
д-р физ.-мат. наук, проф.

_____ В. К. Андреев

Красноярск 2023

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы г.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	В. К. Андреев (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
Исполнители: зав. отд., д.ф.-м.н.	<hr/>	В. Б. Бекежанова (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
зав. отд., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН	<hr/>	В. М. Садовский (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
г.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	В. М. Белолипецкий (Раздел 3)
	(подпись, дата)	
г.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	Е. А. Новиков (Раздел 5)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	О. В. Капцов (Раздел 1)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.	<hr/>	В. А. Кочнев (Раздел 5)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.т.н.	<hr/>	К. В. Симонов (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	В. И. Сенашов (Раздел 1)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.т.н.	<hr/>	С. Н. Генова (Раздел 3)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	<hr/>	А. Н. Рогалев (Раздел 5)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	<hr/>	И. В. Киреев (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	<hr/>	О. В. Садовская (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	<hr/>	И. В. Степанова (Разделы 1, 2)
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	<hr/>	А. В. Шмидт (Раздел 1)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	<hr/>	М. В. Ефимова (Раздел 2)
	(подпись, дата)	

н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л. П. Каменщиков (Раздел 5)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е. Н. Лемешкова (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Е. П. Магденко (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю. В. Шанько (Раздел 1)
	(подпись, дата)	
м.н.с., к.ф.-м.н.	_____	О. С. Володько (Раздел 3)
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	И. Е. Петраков (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
м.н.с, к.ф.-м.н.	_____	И. В. Смолехо (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
старший инженер	_____	Н. Ф. Ильина (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
старший инженер	_____	Е. И. Калмыкова (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
нормоконтроль	_____	А. В. Вяткин
	(подпись, дата)	

РЕФЕРАТ

Отчет 69 с., 29 рис., 1 табл., 5 прил.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГИДРОДИНАМИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ПРОБЛЕМЫ БЕЗОПАСНОСТИ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Объектом исследования в рамках выполняемого проекта являются процессы, происходящие в природных и технических системах с границами раздела.

Цель работы в целом по проекту – математическое и численное моделирование задач с поверхностями раздела в неклассических моделях механики сплошных сред: разработка новых нелинейных математических моделей, построение точных решений; анализ их устойчивости; разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ; выработка рекомендаций по аспектам функционирования технических объектов и природных систем.

Методы исследований – математическое моделирование в задачах механики сплошных сред с усложненными свойствами, симметричный анализ моделей и построение точных решений; вычислительное моделирование задач с границами раздела и их применение при анализе природных наукоемких процессов.

В соответствии с планом работ в 2022 году получены следующие результаты:

- 1) Выполнена групповая классификация уравнений Обербека – Буссинеска с нелинейной силой плавучести.
- 2) Изучены бесконечные группы обратимых ростков аналитических отображений конечномерного пространства над полями вещественных и комплексных чисел, а также группы формальных отображений. Показано, что в некоторых подгруппах формальной группы можно обратить каноническое (экспоненциальное) отображение и ввести каноническую структуру. Построены примеры подгрупп ростков и формальных отображений, для которых экспоненциальное отображение необратимо.
- 3) Построены точные обобщенные функционально-инвариантные решения двумерного неоднородного волнового уравнения с переменной скоростью звука.
- 4) Разработан новый подход к построению приближенного автомодельного решения краевой задачи дальнего плоского безымпulsive турбулентного следа.
- 5) Для трехмерной системы уравнений Обербека – Буссинеска построены точные стационарные решения, описывающие ползущие движения однослойных жидкостей и двухслойных несмешивающихся жидких сред с общей недеформируемой поверхностью раздела или свободной границей. Показана возможность управления движением жидким сред за счет граничных тепловых режимов на подложке. В случае

равенства потоков тепла на границе раздела даны достаточные условия устойчивости стационарных режимов.

- 6) Выполнено сравнение решений уравнений конвекции для описания одномерного и двумерного установившегося термогравитационного течения со свободной границей в плоском горизонтальном слое. Доказан асимптотический характер решений. Получены условия, гарантирующие корректность применения точного решения задачи об однонаправленном течении при инженерных расчетах без решения общей нелинейной задачи.
- 7) Проведено численное исследование сопряженной обратной нелинейной краевой задачи, описывающей трехмерное двухслойное нестационарное осесимметричное движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном вращающемся цилиндре с твердой внешней стенкой. Установлено, что увеличение температуры на боковой поверхности цилиндра и рост параметра, характеризующего энергетические свойства границы раздела жидких сред, приводят к интенсификации течения. Показано, что возрастание угловой скорости вращения цилиндра значительно меняет структуру температурного поля.
- 8) Выполнен анализ влияния тепловой нагрузки, распределенной неравномерно на стенках узкого горизонтального канала, на интенсивность разделения бинарной жидкой смеси на компоненты при нестационарном и установившемся течениях, показаны способы управления разделением смеси посредством неоднородного нагрева. Проведено численное моделирование динамики локально нагреваемой двухфазной системы в замкнутой камере. Для пары рабочих сред бензин – воздух получены предельные значения температуры тепловых элементов, обеспечивающие корректное функционирование рабочей камеры без разрыва жидкого слоя. Изучено влияние термодиффузионных эффектов на характеристики конвективных режимов и эволюцию деформируемой поверхности раздела. Показано дестабилизирующее влияние эффекта Соре, которое проявляется с увеличением амплитуды деформаций межфазной границы.
- 9) На основе точного решения задачи испарительной конвекции изучены характеристики режимов течений испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком в миниканале, на стенках которого приложена линейная тепловая нагрузка. Исследовано влияние толщины газового слоя на параметры конвективных режимов и характеристики их устойчивости. Установлен колебательный характер неустойчивости в случае плоских нормальных возмущений; показано, что при любой интенсивности внешней тепловой нагрузки течение неустойчиво относительно коротковолновых

возмущений. Проведена селекция мод и описаны механизмы, отвечающие разным формам неустойчивости.

- 10) Изучена динамика вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя в летний период.
- 11) Разработана трехмерная модель экосистемы соленого озера Шира.
- 12) Разработана новая математическая модель, вычислительный алгоритм и компьютерная программа для расчета напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов, учитывающая разное сопротивление материала растяжению и сжатию.
- 13) На основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды получена оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры.
- 14) Разработана математическая модель для анализа деформационных процессов в многослойных упругих микрополярных пластинах и оболочках.
- 15) Для численного решения задач динамики слоистой упругой среды построены эффективные параллельные вычислительные алгоритмы, обладающие свойством монотонности и полной консервативности.
- 16) Выполнена программная реализация параллельного вычислительного алгоритма для исследования поведения слоя жидкого кристалла в неоднородном электрическом поле на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями.
- 17) Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для расчета по спутниковым данным параметров модели сейсмического воздействия при решении задач сейсмической опасности.
- 18) Выполнено моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений.
- 19) Предложены эффективные методы решения задач безопасного функционирования природных и технических объектов, описываемых с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработаны алгоритмы построения опасных границ в пространстве состояний, отделяющих области устойчивости функционирования систем от областей, возмущения которых выводят за пределы устойчивости.

Полученные результаты являются новыми. Они представлены в 26 работах за 2022 год в научных журналах, входящих в систему баз данных WoS, Scopus и ядро РИНЦ.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	9
1 Построение точных и приближенных решений уравнений гидродинамики.....	11
1.1 Анализ определяющих уравнений трехмерных систем Обербека – Буссинеска с нелинейной силой плавучести.....	11
1.2 Изучение экспоненциального отображения для группы диффеоморфизмов, сохраняющих площадь. Нахождение классов бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру.....	11
1.3 Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в две константы.....	12
1.4 Построение приближенного решения, описывающего течение в дальнем безымпурсном турбулентном следе.....	11
2 Анализ устойчивости гидродинамических течений с поверхностями раздела.....	15
2.1 Аналитическое и численное исследование течений в двухслойных системах и анализ их устойчивости.....	15
2.2 Классификация режимов, определение критических характеристик устойчивости, анализ влияния определяющих параметров на устойчивость и сценарии поведения возмущений.....	25
3 Численное моделирование водоемов с учетом слоистой структуры течений.....	29
3.1 Изучение динамики вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя в летний период в рамках одномерной в вертикальном направлении математической модели.....	29
3.2 Разработка трехмерной модели экосистемы озера Шира.....	30
4 Математическое и численное моделирование в задачах механики деформируемых сред и мониторинга геодинамических явлений.....	34
4.1. Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов при квазистатическом нагружении.....	34
4.2. Оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры на основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды.....	37
4.3 Разработка математических моделей для анализа деформационных процессов в многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластинах и оболочках.....	39

4.4 Построение эффективных параллельных вычислительных алгоритмов, обладающих свойством монотонности, для решения динамических задач.....	40
4.5 Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями.....	43
4.6 Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности, разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия.....	46
4.7 Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учетом влияния внешних геодинамических факторов.....	47
4.8 Атмосферные колебания температуры во время подготовки Байкальских землетрясений 2020 – 2021 гг. по спутниковым данным.....	48
4.9 Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений.....	49
5 Разработка эффективных методов решения задач безопасного функционирования природных и технических систем.....	51
5.1 Описание функционирования математических моделей природных и технических систем как движения в пространстве состояний с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....	51
5.2 Определение опасных границ, отделяющих области устойчивости от областей неустойчивости, возмущения которых выводят за пределы устойчивости.....	54
5.3 Исследование свойств устойчивости множеств решений математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями.....	55
5.4 Анализ математических моделей природных и технических систем, находящихся под постоянным воздействием малых возмущающих сил.....	56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	59
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	60
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	63
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	65
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	66
ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий отчет является промежуточным по теме «Математическое моделирование поведения неидеальных сред с границами раздела в природных и технических системах» за 2022 год.

Проводимые исследования соответствуют приоритетным направлениям: переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта; переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии.

Задачи механики с границами раздела являются предметом интенсивного изучения в России и за рубежом. Подобного рода задачи возникают в химической и пищевой промышленности, металлургии, космическом материаловедении, гидрофизике, экологии, геофизике. Достаточно упомянуть процессы термостабилизации энергетических установок, нанесения покрытий, электрофореза, динамики вечной мерзлоты, поведения геологических разломов и жидких кристаллов, сохранения качеств водных и воздушных масс. Более точный учет различных факторов, влияющих на такие процессы, требует привлечения новых математических моделей и постановок краевых задач.

В связи с этим в отчетный период 2022 года исследования проводились по пяти направлениям:

1. Анализ определяющих уравнений системы Обербека – Буссинеска с нелинейной силой плавучести. Построение новых классов точных решений уравнения неоднородной акустики. Проведение теоретико-группового анализа и построение автомодельных решений иерархии моделей дальнего безымппульсного турбулентного следа.

2. Исследование задач конвекции, включая задачи устойчивости течений, и разработка компьютерных программ для расчета и визуализации движений жидких сред с деформируемой границей раздела (свободной границей).

3. Оценка влияния климатической изменчивости на структуру течений соленых озер. Изучение динамики температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши в летний период на основе одномерной в вертикальном направлении математической модели.

4. Разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов для анализа поведения структурно неоднородных деформируемых сред, в том числе композитных материалов, микрополярных пластин и оболочек, жидких кристаллов и геосред, под действием механических возмущений с учетом влияния электрических и гравитационных полей.

5. Разработка эффективных методов решения задач безопасного функционирования природных и технических объектов и систем.

Полученные в 2022 году результаты соответствуют поставленным целям и задачам. Качество результатов находится на мировом уровне по оценке новизны, оригинальности, значимости и точности. Это подтверждается публикациями в ведущих научных журналах по направлениям проекта, входящих в группы Q1, Q2 международных баз данных Web of Science и Scopus, в других рейтинговых журналах.

При выполнении планов проекта использовались современные методы и технологии исследований. Построенные математические модели процессов и явлений соответствуют принятому в мире уровню полноты и точности описания. Полученные результаты являются фундаментальными и могут служить основой для дальнейших исследований по тематике проекта.

Практическое использование проведенных исследований возможно: а) при разработке оптофлюидных элементов и микрофлюидных платформ для систем полного анализа и средств контроля; б) при оценке влияния погодных условий на толщины мерзлых и талых слоев в условиях Крайнего Севера; в) для анализа распределения биопланктона в озере Шира; г) для инженерных расчетов элементов конструкций из композитных материалов; д) для установления связей глобальных геодинамических и геофизических процессов с катастрофическими сейсмическими событиями.

В тексте отчета изложены основные результаты (с иллюстрациями), полученные в ходе выполнения проекта. К отчету также приложен список работ, опубликованных в 2022 году.

В заключении приведены основные результаты работ в краткой форме.

1 Построение точных и приближенных решений уравнений гидродинамики

1.1 Анализ определяющих уравнений трехмерных систем Обербека – Буссинеска с нелинейной силой плавучести

В процессе решения задачи групповой классификации для уравнений Обербека – Буссинеска, описывающих движение бинарной смеси при нелинейной силе плавучести, выведены определяющие уравнения, часть из которых является классифицирующими относительно пяти неизвестных параметров, выражающих физические свойства смеси и зависящих от температуры θ и концентрации c . В предположении, что указанные параметры произвольны, построена основная алгебра Ли, которая в отсутствие силы плавучести совпадает с алгеброй для уравнений Навье – Стокса, а при учете силы плавучести из описываемой основной алгебры исчезают операторы дилатации и вращения. Если отказаться от предположения о произвольности классифицируемых параметров, анализ определяющих уравнений дает различные спецификации этих элементов и расширение основной алгебры Ли. Установлено наличие восьми различных наборов из пяти классифицируемых функций при ненулевой функции, соответствующей силе плавучести. Расширения основной алгебры состоят из операторов, являющихся линейной комбинацией операторов переноса, растяжения по θ и c , а также перекрестного оператора, возникшего из-за учета эффекта термодиффузии в исходных уравнениях Обербека – Буссинеска.

1.2 Изучение экспоненциального отображения для группы диффеоморфизмов, сохраняющих площадь. Нахождение классов бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру

Изучались бесконечные группы обратимых ростков аналитических отображений конечномерного пространства над полями вещественных и комплексных чисел, а также группы формальных отображений (формальные группы). Показано, что в некоторых подгруппах формальной группы можно обратить каноническое (экспоненциальное) отображение и ввести каноническую структуру. Построены примеры подгрупп ростков и формальных отображений, для которых экспоненциальное отображение не обратимо. Это означает, что каноническую структуру в этих группах невозможно ввести. В частности, это невозможно сделать для групп отображений, сохраняющих объем (площадь).

1.3 Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в две константы

Изучалось классическое волновое уравнение с переменной скоростью распространения звука $p_{tt} = (x^n p_x)_x$. Для счетного числа показателей n это уравнение сводится к уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу вида:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2m}{x} u_x,$$

где m – целое число. Это позволяет найти общее решение волнового уравнения, зависящее от двух произвольных функций. В результате получен широкий класс уравнений, допускающих безотражательное распространение волн на большие расстояния.

Найдены инварианты характеристик одномерных нестационарных уравнений газовой динамики для различных уравнений состояния, что позволило определить классы гладких решений во все моменты времени.

Проведен групповой анализ двумерных нестационарных уравнений однородной идеальной несжимаемой жидкости в терминах функции тока. Найдена бесконечномерная алгебра векторных полей, допускаемая этим уравнением. Построены некоторые инвариантные решения и решения, не связанные с инвариантностью. Найденные решения описывают вихри, струйные течения и вихреподобные образования. Кроме того, получены новые решения стационарного нелинейного уравнения Грэда – Шафранова, описывающие осесимметричные течения с закруткой.

1.4 Построение приближенного решения, описывающего течение в дальнейшем безимпульсном турбулентном следе

Разработан подход для построения приближенного автомодельного решения краевой задачи дальнего плоского безимпульсного турбулентного следа в рамках следующей двухпараметрической модели турбулентности:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial y} - \varepsilon, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - C_{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{e},$$

где $U_1 = U_0 - U$ – дефект продольной осредненной компоненты скорости U , U_0 – скорость невозмущенного потока, e – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость ее диссипации, $C_\mu = 0.25$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ – эмпирические постоянные модели.

С применением теоретико-группового анализа получена автомодельная редукция уравнений рассматриваемой модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенное решение соответствующей краевой задачи для редуцированной системы уравнений строилось путем склеивания асимптотического разложения решения на границе турбулентного следа (в окрестности особой точки) в виде ряда с дробными показателями с разложением решения в степенной ряд на оси турбулентного следа. Склеивание решения осуществлялось посредством определения коэффициентов указанных разложений.

Отметим, что в рассматриваемой задаче имеет место автомодельность второго рода. Для определения значения показателя автомодельности в работах других авторов решается соответствующая нелинейная задача на собственные значения. При использовании разработанного подхода значение показателя автомодельности, а также значение показателя автомодельного вырождения дефекта продольной осредненной компоненты скорости U_1 определяется в ходе построения приближенного решения. Установленные законы атомодельного вырождения согласуются с доступными экспериментальными данными.

Полученные приближенные значения искомых функций на оси следа использовались в качестве данных для пристрелки при решении краевой задачи для редуцированной системы методом стрельбы. Результаты расчетов представлены на Рисунке 1. Разность между приближенным и численным решением не превосходит 2 % в случае использования девяти членов асимптотического разложения решения редуцированной системы в окрестности особой точки.

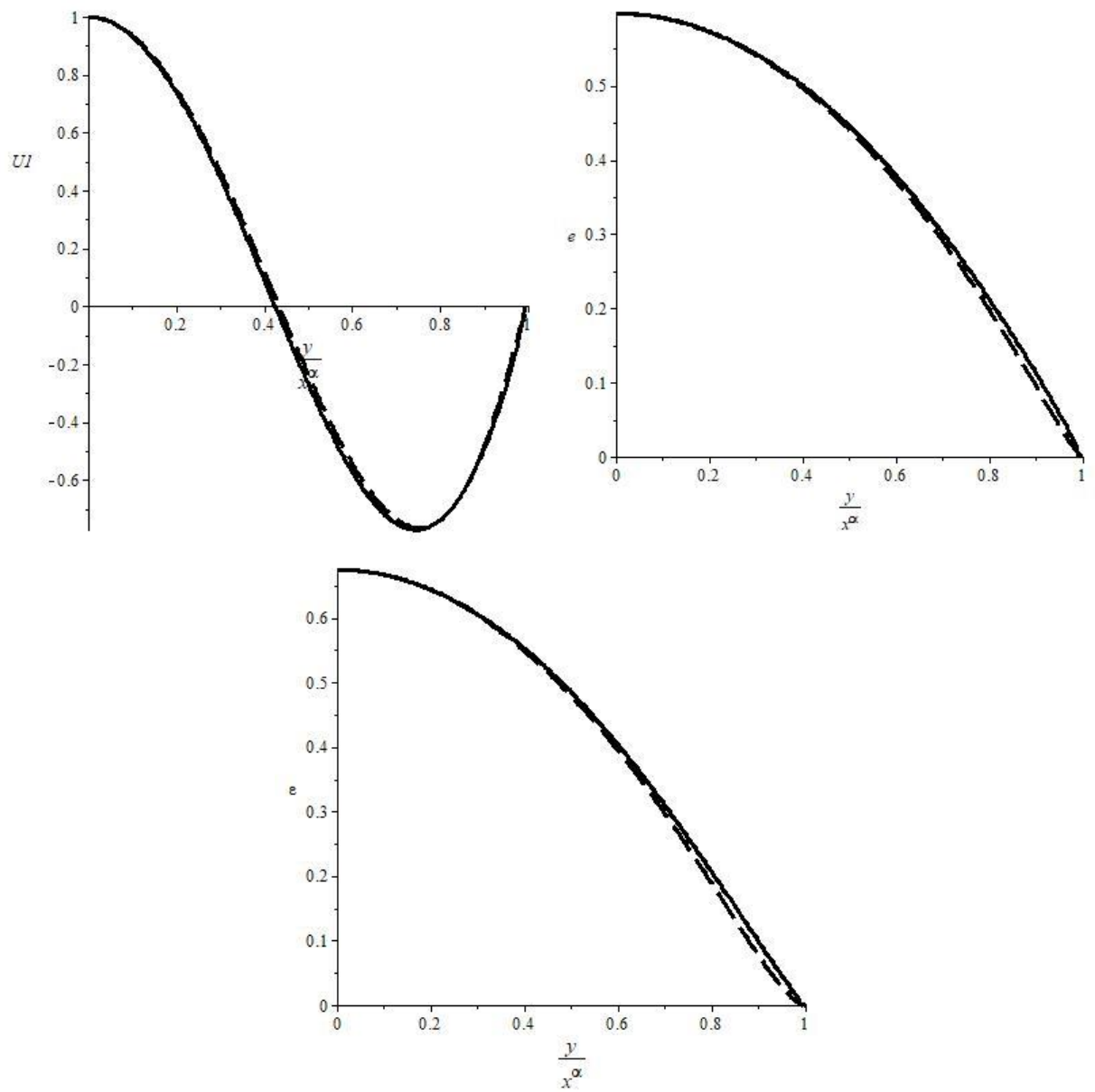


Рисунок 1 – Профили искомых функций (сплошные линии – численное решение, пунктирные линии – приближенное решение)

2 Анализ устойчивости гидродинамических течений с поверхностями раздела

2.1 Аналитическое и численное исследование течений в двухслойных системах и анализ их устойчивости

2.1.1. Моделирование конвекции в плоском слое

Для моделирования конвекции в плоском слое жидкости используется решение уравнений Обербека – Буссинеска вида:

$$\mathbf{u} = \left((f(z,t) + h(z,t))x, (f(z,t) - h(z,t))y, -2 \int_0^z f(\zeta, t) d\zeta \right), \quad (2.1)$$
$$\theta = a(z,t)x^2 + b(z,t)y^2 + q(z,t), \quad C = m(z,t)x^2 + n(z,t)y^2 + k(z,t)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости, θ и C – отклонения температуры и концентрации от их средних равновесных значений. Функция концентрации учитывается при описании движения бинарных смесей; в случае жидкостей без примеси $C = \text{const}$. Изучены следующие постановки задач: а) течение однородной жидкости в трехмерном слое $0 < z < l$ со свободной границей; б) двухслойное течение с поверхностью раздела $z = l_1 < l$, где нижний слой заполнен однородной жидкостью, в верхнем слое может находиться вязкая теплопроводная жидкость или бинарная смесь. В обоих случаях на неподвижной нижней стенке поддерживается температура, распределенная по квадратичному закону $\theta(x, y, 0, t) = a_1(t)x^2 + b_1(t)y^2 + q_1(t)$ с известными параметрами $a_1(t)$, $b_1(t)$, $q_1(t)$. Если $a_1(t) < 0$, $b_1(t) < 0$, то температура на стенке в точке $x = y = 0$ имеет максимум, а при $a_1(t) > 0$, $b_1(t) > 0$ – минимум. На свободной границе и границе раздела поверхностное натяжение есть линейная функция температуры и концентрации.

После подстановки вида решения (2.1) в систему Обербека – Буссинеска возникает одномерная система интегро-дифференциальных уравнений. Доказывается, что для решения (2.1) давление является также квадратичной функцией переменных x и y . Условия на свободной границе, поверхности раздела и твердых стенках редуцируются к соотношениям на f , h , a , b , q , m , n , k . Возникающие начально-краевые задачи являются нелинейными и обратными относительно дополнительных градиентов давления вдоль осей x и y .

Для задачи со свободной границей в случае ползущего движения (число Марангони мало) найден стационарный режим течения; доказаны априорные оценки решения

в равномерной метрике, на их основе даны достаточные условия на функции $a_1(t)$, $b_1(t)$, $q_1(t)$, при которых нестационарное решение с ростом времени выходит на стационарный режим. Для более полного описания эволюции поля скоростей, температуры и давления нестационарное решение найдено в виде квадратур в образах по Лапласу. С помощью численного обращения преобразования Лапласа прослежена эволюция скоростей, градиентов температур и дополнительных градиентов давления.

Для задач описания течения в двухслойных системах вид решения (2.1) справедлив для каждого слоя. В граничном условии учитывалось влияние изменения внутренней энергии поверхности раздела, характеризующейся неотрицательным параметром E . При $E > 0$ скачок потока тепла через границу раздела не равен нулю, соответствующее граничное условие становится нелинейным. На основе найденного аналитического решения показано существование двух решений, описывающих ползущее стационарное течение двухслойной системы (жидкость – жидкость и жидкость – бинарная смесь). Для замыкания задачи в случае, когда в верхнем слое находится бинарная смесь, достаточно задавать среднее значение концентрации в плоскости (x, z) или (y, z) . Подробно исследован практически важный случай радиального нагрева нижней подложки ($a_1 = b_1 = \text{const}$). Построены поля скоростей и температур при разных значениях физических параметров сред и толщины слоев. Аналогичное исследование проведено и для $E = 0$, когда существует только один стационарный режим. В случае нестационарного двухслойного течения несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей при $E = 0$ получены априорные оценки решения обратной начально-краевой задачи в равномерной метрике. Получены достаточные условия на тепловую нагрузку подложки (функции $a_1(t)$, $b_1(t)$, $q_1(t)$), при которых нестационарное решение стремится к стационарному по экспоненциальному закону. Общая линейная нестационарная задача решена методом преобразования Лапласа. При меньших ограничениях на входные данные (функции $a_1(t)$, $b_1(t)$, $q_1(t)$ могут иметь конечное число разрывов первого рода) доказано, что если эти данные стабилизируются со временем, то решение сходится к соответствующему стационарному решению. Для различных входных данных и безразмерных параметров построены поля скоростей и температур. Таким образом, изменяя нестационарный режим нагрева на подложке, можно управлять конвективным движением жидких сред в слоях.

2.1.2. Обоснование применения приближения бесконечного слоя при инженерных расчетах течений теплопроводной жидкости со свободной границей

Проведен сравнительный анализ аналитического решения уравнений Обербека – Буссинеска, описывающего однонаправленное течение со свободной границей в бесконечном слое, и численного решения этих же уравнений, описывающего двумерное течение в прямоугольной кювете. При этом на свободной границе учитывалось третье краевое условие для температуры. В безразмерную постановку двумерной задачи входят числа Марангони (M), Релея (Ra), Био (Bi) и аспектное число δ . Последнее есть отношение высоты кюветы к ее длине. Численно (использовался метод конечных объемов) были построены кривые среднеквадратичного и абсолютного отклонений горизонтальных скоростей рассматриваемых течений. Показано, что при $\delta < 0.2$ эти отклонения незначительны, и кривые для $M \geq 1$ практически не различимы. Поэтому при таких значениях числа Марангони и аспектного числа δ (Ra и Bi почти не влияют на поведение отклонений) для оценки параметров конвекции можно пользоваться конечными формулами для однонаправленного течения.

2.1.3. Трехмерное нестационарное движение двух несмешивающихся жидкостей во вращающемся горизонтальном цилиндре

Проведено численное исследование сопряженной обратной нелинейной начально-краевой задачи, которая описывает трехмерное двухслойное нестационарное осесимметричное движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном вращающемся цилиндре с твердой внешней стенкой. Поверхность раздела не деформируема. Массовые силы отсутствуют. Поверхностное натяжение на границе раздела линейно зависит от температуры. Рассматривается поле скоростей типа поля Хименца. На поверхности раздела учитывается полное энергетическое условие. Для решения задачи был применен модифицированный метод Галеркина, где в качестве базисных функций использовались полиномы Лежандра. Полученная система интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения свелась к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

На основе численного моделирования для системы жидких сред вода – жидкий CO_2 , когда внутренний цилиндр ($0 < \xi \leq \gamma$, ξ – безразмерный радиус, $\xi = \gamma$ – уравнение поверхности раздела) занят водой, а внешний ($\gamma \leq \xi \leq 1$) – жидким CO_2 , было показано,

что с ростом времени численное решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим. Установлено, что при увеличении числа Марангони, то есть при увеличении температуры, задаваемой на боковой поверхности цилиндра, значение безразмерной функции радиальной составляющей профиля скорости $U_j(\xi)$ (j – индекс, обозначающий жидкость) возрастает:

$$\max_{\xi \in [0,0.9]} U_1(\xi, M=100) - \max_{\xi \in [0,0.9]} U_1(\xi, M=10) = 1.2 \times 10^{-3},$$

$$\min_{\xi \in [0.9,1]} U_2(\xi, M=100) - \min_{\xi \in [0.9,1]} U_2(\xi, M=10) = 10^{-4}.$$

При увеличении параметра E , характеризующего энергетические свойства межфазной поверхности и отвечающего энергии, затрачиваемой на деформацию поверхности раздела, имеет место слабый рост значений $U_j(\xi)$ по сравнению с изменениями, вызванными вариациями Марангони:

$$\max_{\xi \in [0,0.9]} U_1(\xi, E=0.9) - \max_{\xi \in [0,0.9]} U_1(\xi, E=0.09) = 2.1 \times 10^{-6},$$

$$\min_{\xi \in [0.9,1]} U_2(\xi, E=0.9) - \min_{\xi \in [0.9,1]} U_2(\xi, E=0.09) = 10^{-7}.$$

На рисунке 2 представлены поля температур и линии функции тока для обеих слоев жидкости, когда число Марангони $M=100$, параметр $E=0.06$, а число Рэлея $Ra=1.74 \times 10^{-4}$.

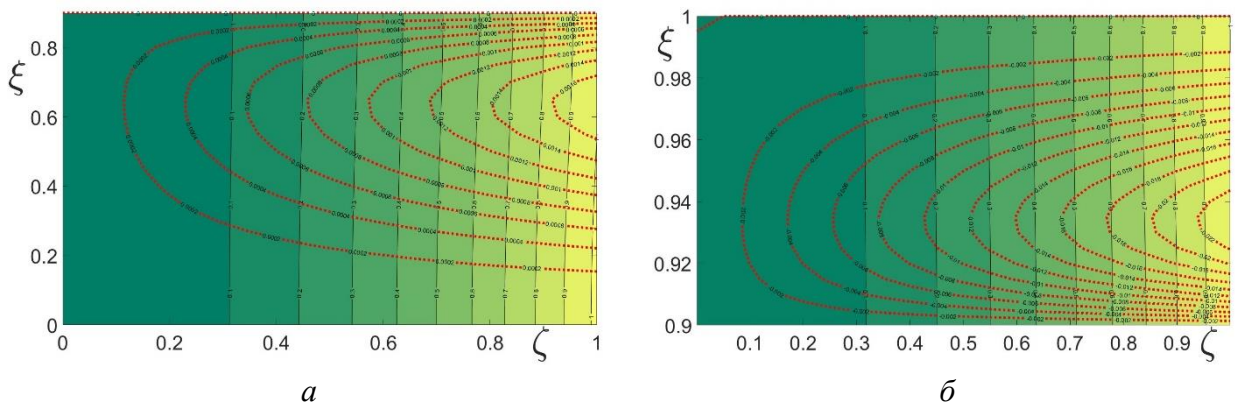


Рисунок 2 – Линии функции тока и поле температур для первой (а) и второй (б) жидкости при $Ra = 1.74 \times 10^{-4}$

Анализ результатов показал, что течение жидкости во втором слое более интенсивное, чем в первом. При этом в обоих слоях направление движения жидкостей меняется вблизи поверхности раздела. Увеличение угловой скорости вращения ω цилиндрической трубы ($Ra \sim \omega^2$) вызывает перестройку температурного поля и увеличение скорости движения сред при сохранении характера течения (рисунок 3).

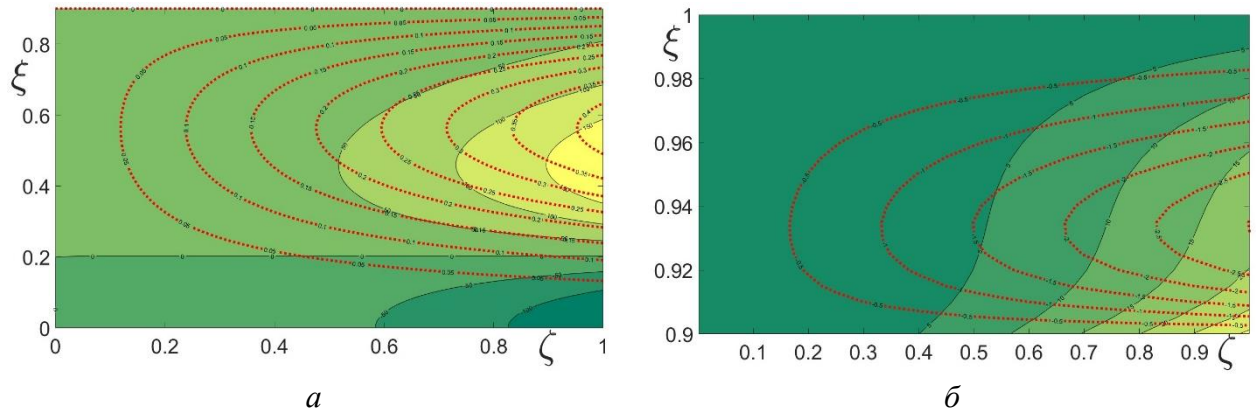


Рисунок 3 – Линии функции тока и поле температур для первой (а) и второй (б) жидкости при $Ra = 1.74$

2.1.4. Моделирование термодиффузии бинарной смеси в узком канале

Проведен завершающий этап исследований применимости решения уравнений Обербека – Буссинеска

$$\begin{aligned}
 u_t + u_{yy} - p_x, \quad \theta + c = p_y, \quad \theta_t + Gr u \theta_x &= \frac{1}{Pr} (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\
 c_t + Gr u c_x &= \frac{1}{Sc} (c_{xx} + c_{yy} - \psi (\theta_{xx} + \theta_{yy})),
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

характеризующегося линейной зависимостью функций температуры $\theta(t, x, y)$ и концентрации $c(t, x, y)$ от горизонтальной координаты x , для описания разделения бинарной смеси в узких протяженных горизонтальных каналах, течение в которых можно считать однонаправленным (вектор скорости имеет только горизонтальную компоненту $u(t, y)$). Уравнения (2.2) записаны в безразмерных переменных; характерными величинами считаются толщина слоя и средняя температура жидкости, используются общепринятые в теории тепловой конвекции смесей обозначения. Стенки канала неоднородно нагреваются по закону, сопряженному с распределением температуры внутри слоя: при $y = 0$, $y = 1$ задана температура $\theta_i(t, x) = A_i(t)x + B_i(t)$, индекс $i = 1$ ($i = 2$) соответствует значениям величин на нижней (верхней) стенке канала. Кроме условий

прилипания и отсутствия потоков вещества через стенки, учтены дополнительные интегральные условия на расход смеси и среднюю концентрацию в сечении $x = 0$. На основе построенного точного решения стационарной задачи проанализировано влияние тепловой нагрузки на конвективное течение в 70 %-ом водном растворе этанола. Показано, что увеличение горизонтального ($\Delta A = A_2 - A_1$) и вертикального ($\Delta B = B_2 - B_1$) градиентов температуры на стенках влечет появление неоднородностей полей температуры и концентрации в смеси. При этом рост продольного градиента температуры на стенках приводит к интенсификации скорости в слое (рисунок 4 а) и ослаблению пристеночных эффектов. Влияние ΔA на перераспределение температуры и концентрации в слое слабое: поля температуры и концентрации, приведенные на рисунках 4 б, в для значения $\Delta A = 0.0012$, практически не изменяются при увеличении продольного градиента. На рисунках 4 б, в можно наблюдать демонстрацию нормального эффекта Соре: более легкий по плотности этанол накапливается у более нагретой нижней стенки $y = 0$. Показано, что поперечный градиент температуры $\Delta B = B_2 - B_1$ не влияет на скорость жидкости, при этом неоднородности температуры и концентрации возрастают при увеличении ΔB . Тем самым, управляя температурой на стенках канала, можно увеличить неоднородность состава смеси.

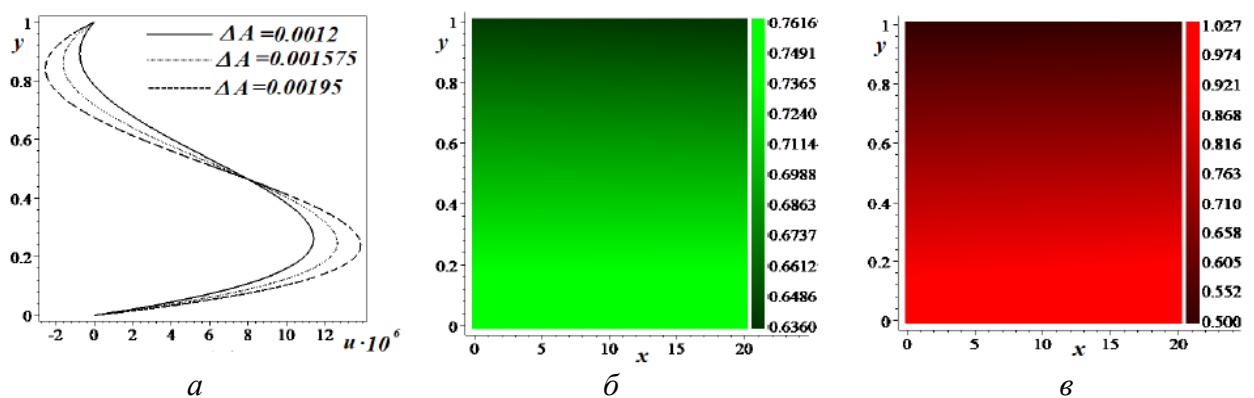


Рисунок 4 – Профили скорости $u(y)$ (а) в зависимости от продольного градиента температуры на нижней стенке: сплошная кривая соответствует $\Delta A = 0.0012$, пунктирная кривая $\Delta A = 0.001575$, штрих-пунктирная кривая $\Delta A = 0.00195$; поля температуры (б) и концентрации (в) при $\Delta A = 0.0012$

Решение полной нестационарной задачи получено с помощью численного интегрирования. Численный метод успешно протестирован в рамках постановки, для которой ранее было доказано, что при больших временах гарантируется выход нестационарного решения на стационарный режим, полученный с использованием дополнительного интегрального условия на концентрацию. Расчет полей температуры и

концентрации проведен для таких граничных условий на температуру, что значения A_1, A_2, B_2 постоянны и согласованы с начальными условиями, а значение $B_1 = b \sin \omega t$ меняется по периодическому закону со временем. Для полученного решения можно наблюдать установление горизонтальных градиентов температуры и концентрации со временем, в то время как полные поля температуры и концентрации не выходят на стационарный режим и меняются по периодическому закону со временем. На рисунке 5

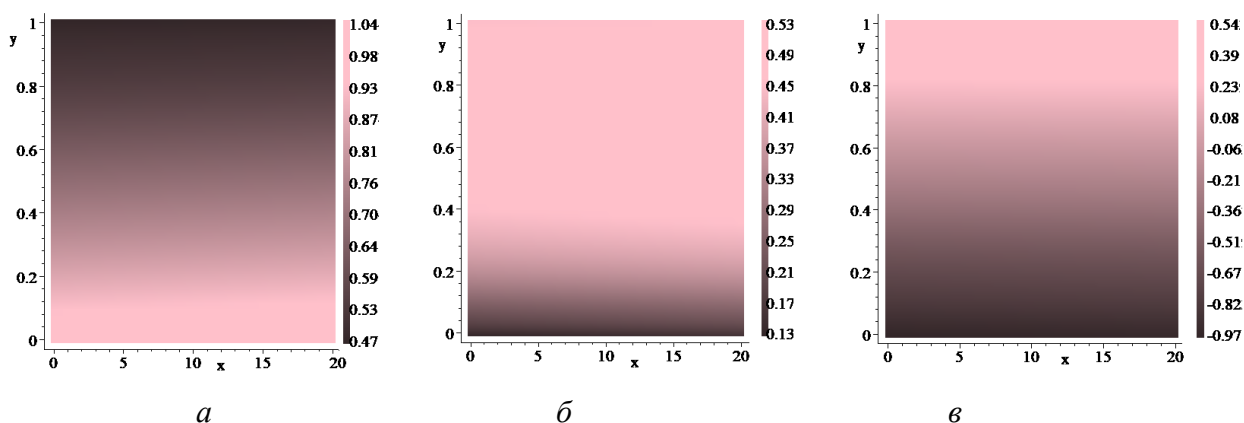


Рисунок 5 – Поля температуры при заданном периодическом граничном условии: (а) на 150 временном шаге, (б) на 300 временном шаге, (в) на 450 временном шаге

показаны поля температуры, построенные при граничном условии на B_1 с параметрами $b = 1, \omega = 0.1$ на разных расчетных временных шагах. Приблизительно с 800-го временного шага поле температуры начинает повторять поведение с первого шага по времени. У полей концентрации периодичность начинает проявляться на более отдаленных шагах по времени, что связано с более медленным, по сравнению с тепловыми процессами, диффузионным переносом вещества. Указанные периодические условия позволяют моделировать нагрев стенок разной интенсивности, чередуя минимальный, максимальный и нулевой, что соответствует условиям проведения лабораторных экспериментов и работе реального оборудования.

2.1.5. Численное моделирование конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела в замкнутой области при локальном нагреве

Интерес к задачам конвективного теплообмена в многофазных системах в условиях внешней температурной накачки вызван широким применением жидкостных технологий в различном оборудовании. Во многих случаях такие технологии используются в микро- и минисистемах, а в качестве рабочих сред выступают однородные и/или многокомпонентные жидкости, парогазовые смеси или капельные аэрозоли.

Примерами могут служить системы, использующие свойства самоорганизации жидкости, под действием эффекта Марангони, когда поверхность жидкости деформируется под действием нагрева. Микрофлюидные технологии, основанные на принципе термокапиллярного отклика, применяются в биомедицине, оптофлюидике и средствах контроля, использующих лаборатории на чипе. В настоящее время разрабатываются адаптивные жидкие элементы, варифокальные линзы и новые методики обработки, основанные на многостадийном анализе не только жидкой пробы, но и ее паров и веществ, возникающих в результате биохимических/физических процессов, реализуемых на чипе. В условиях, когда жидкий образец нагревается до испарения, становится возможным применение высокочувствительных газоанализаторов. Для биомедицинского и контрольного оборудования, обрабатывающего различные фазы одного вещества, необходимо знать условия и времена нагрева жидкой пробы, а также температурные напоры, обеспечивающие получение необходимого для анализа количества паров. Единственной альтернативой дорогостоящей экспериментальной обработке микрофлюидных платформ является математическое моделирование.

Отдельную трудность в возникающих задачах составляет восстановление формы области течения жидкости наряду с определением основных характеристик (скорости, давления и температуры рабочих сред), поскольку деформируемая свободная поверхность (или граница раздела) меняется с течением времени под действием термокапиллярного эффекта. Эволюция деформируемой границы определяется не только тепловыми эффектами, но и концентрационными (если рабочие среды представляют собой смеси или растворы), а также физическими свойствами рабочих сред и кинематическими характеристиками объемных фаз.

В отчетный период решена задача термоконцентрационной конвекции в условиях фазовых переходов жидкость – пар в локально нагреваемой закрытой рабочей камере, частично заполненной жидкостью. Для описания динамики двухфазной системы с деформируемой границей раздела применяется полная двусторонняя модель испарительной конвекции. В качестве определяющих уравнений используются уравнения Обербека – Буссинеска, дополненные уравнением конвективной диффузии, описывающих перенос пара в газовой фазе над слоем рабочей жидкости. В уравнениях, моделирующих конвекцию в газовом слое, и граничных условиях на поверхностях, контактирующих с парогазовой смесью, дополнительно учтены слагаемые, отвечающие прямому и обратному термодиффузионным эффектам (эффектам Соре и Дюфура), которые проявляются в газовой фазе в присутствии испаряемого компонента. Внутренняя граница раздела жидкость – газ является термокапиллярной поверхностью, допускающей перенос

массы диффузионного типа, который учтен в модели путем задания на межфазной границе обобщенного условия теплового баланса.

С целью определения характера и степени влияния термодиффузионных эффектов на параметры конвективных режимов выполнено численное моделирование динамики двухслойной системы жидкость – газ в рамках двумерной постановки. Для расчетов использован авторский программный комплекс, позволяющий получить необходимые для анализа характеристики (скорость, давление, температуры рабочих сред, паросодержание в газе, массовую скорость испарения, значения контактного угла в точках трехфазного контакта и положение межфазной границы в каждый момент времени). Проведен сравнительный анализ режимов многоячейстой конвекции Рэлея – Бенара – Марангони, возникающих при локальном переключаемом нагреве со стороны подложки рабочей камеры двумя тепловыми элементами с разной температурой в условиях фазовых превращений и действия термодиффузионных эффектов, с режимами, реализующимися в отсутствие указанных факторов. Переключаемый нагрев отличает скачкообразное изменение температуры нагревателей в заданные моменты времени. Для системы сред бензин – воздух в миникамере высотой 2 мм с начальной толщиной жидкого слоя 1 мм определена предельная температура нагревателя, при которой не происходит разрыва рабочей жидкости с формированием сухого пятна. Обнаружено, что в системе с испарением после начала температурной накачки быстрее устанавливается стационарный колебательный четырехвихревой режим, характерной особенностью которого является формирование мелкомасштабных вихрей, пульсирующих вблизи зоны теплового удара, и осцилляции межфазной границы с краткосрочным изменением кривизны и амплитуды колебаний (рисунок 6). Установлено дестабилизирующее влияние эффекта Соре даже в условиях слабого испарения, которое проявляется в увеличении амплитуды осцилляций границы раздела за счет формирования специфического поля концентрации пара в газовом слое (рисунок 7). Под действием эффекта Соре тяжелые пары бензина диффундируют от межфазной границы, так что максимальная концентрация пара достигается у верхней холодной стенки камеры. При этом парциальное давление у поверхности жидкости снижается и поверхность раздела осциллирует с большей амплитудой. В отсутствие термодиффузионных эффектов вблизи межфазной поверхности формируется пограничный концентрационный слой с повышенным паросодержанием, что приводит к увеличению парциального давления и, следовательно, к уменьшению амплитуды осцилляций.

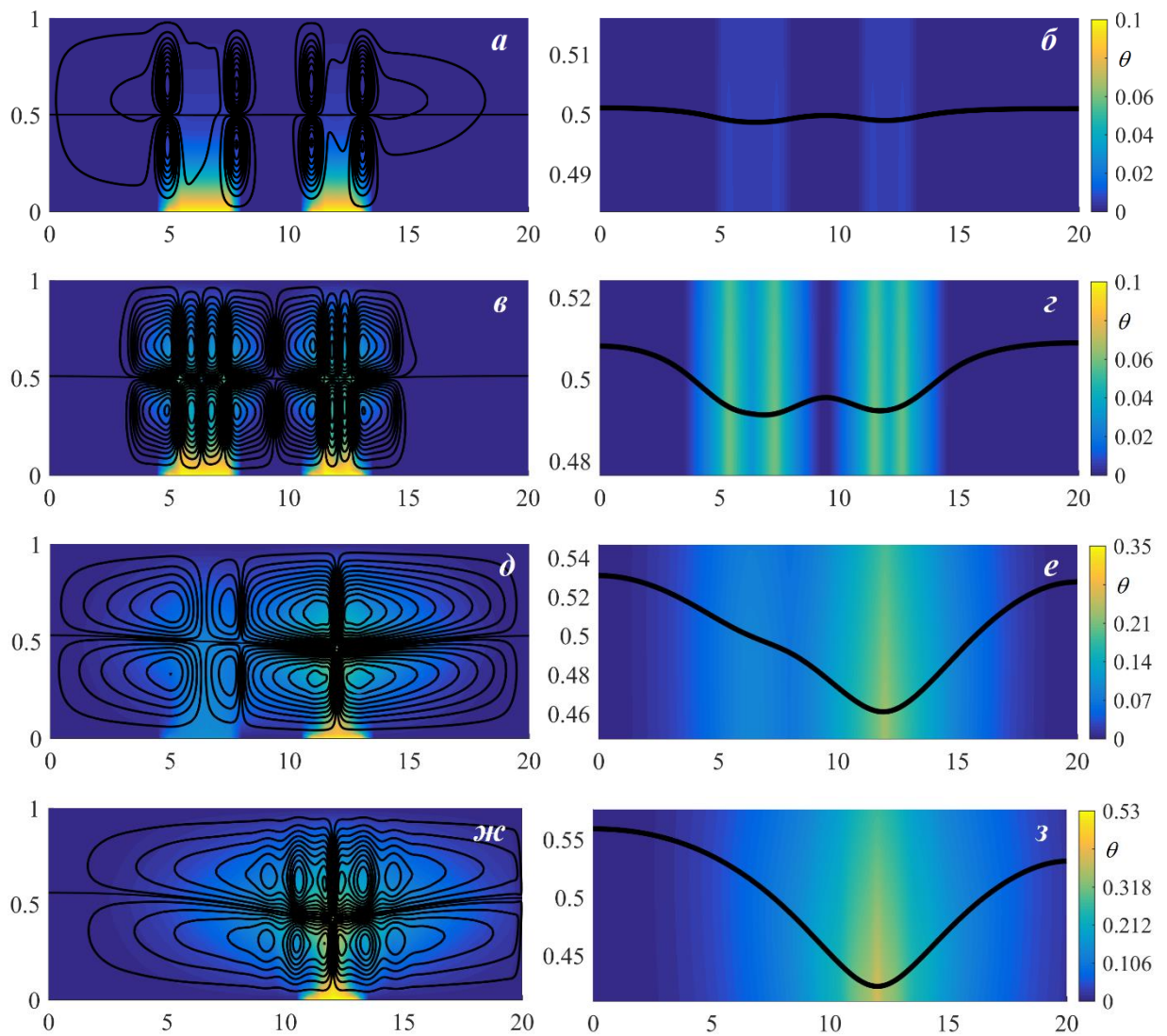


Рисунок 6 – Перестройка полей скорости и температуры (*а, в, д, ж*) и эволюция границы раздела (*б, г, е, з*) в системе бензин – воздух, нагреваемой двумя тепловыми элементами с разной температурой, помещенными на подложку: $t = 3$ с (*а, б*); $t = 7$ с (*в, г*); $t = 50$ с (*д, е*); $t = 185$ с (*ж, з*)

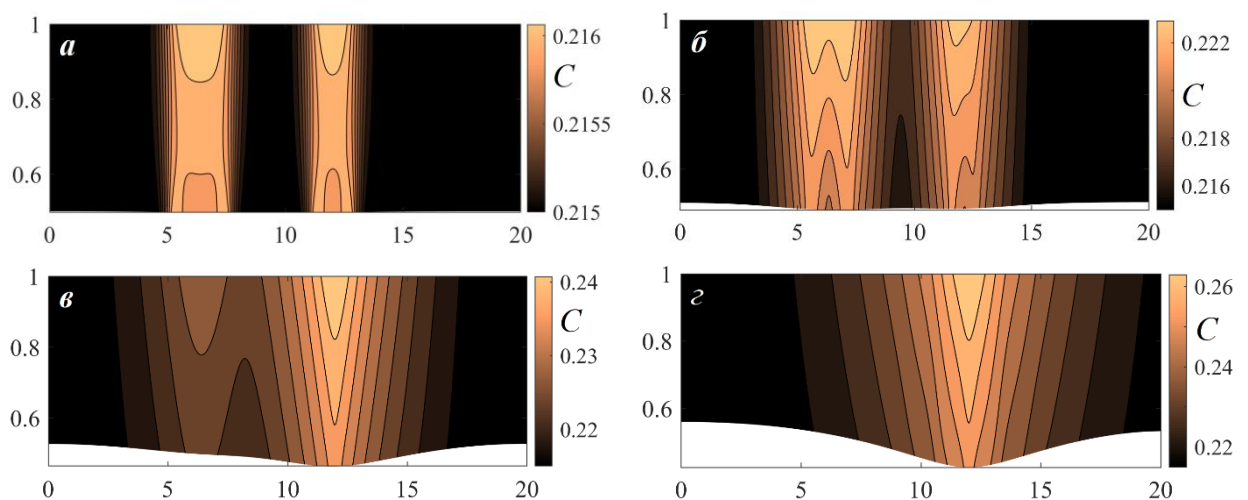


Рисунок 7 – Формирование и перестройка концентрационных структур в газопаровом слое под действием эффекта Соре: $t = 3$ с (*а*); $t = 7$ с (*б*); $t = 50$ с (*в*); $t = 185$ с (*г*)

Полученные результаты позволяют решить вопрос о повышении эффективности жидкостной платформы за счет оптимального размещения газоанализатора в рабочей камере.

2.2 Классификация режимов, определение критических характеристик устойчивости, анализ влияния определяющих параметров на устойчивость и сценарии поведения возмущений

Аналитическое исследование двухслойных течений и их устойчивости может быть эффективно выполнено с помощью точных решений уравнений конвекции. Особая ценность точных решений состоит в том, что они наследуют естественные свойства симметрии пространства–времени и движущейся в этом пространстве текучей среды, заложенные при выводе определяющих уравнений.

Для исследования конвективных режимов, возникающих в двухслойной системе жидкость – газ с испарением, используется точное частично-инвариантное решение – обобщение решения Остроумова – Бириха уравнений Обербека – Буссинеска на случай термоконцентрационной конвекции. Решение, полученное в рамках сопряженной задачи испарительной конвекции при заданном расходе газа R_g в верхнем слое, описывает однонаправленное течение испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, в горизонтальном канале. На стенках канала приложена распределенная по линейному закону тепловая нагрузка с градиентом A . Решение позволяет корректно учесть диффузионный перенос массы через межфазную границу за счет испарения и вклад эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности, которые проявляются за счет присутствия летучего компонента в несущем газе. В силу вида решения при равных граничных температурных градиентах A , линейное распределение температуры с таким же продольным градиентом формируется на межфазной границе. Таким образом, величина градиента A определяет интенсивность эффектов испарения и термокапиллярных напряжений на межфазной границе.

С помощью точного решения изучено влияние изменений толщины h_g парогазового слоя на характеристики конвективных режимов в двухфазной системе сред этанол – воздух в поле массовых сил с $g = 9.81 \text{ м/с}^2$. Изменение толщины слоя существенно влияет на кинематические характеристики газового потока. Справедлива оценка $R_g : h_g u_g^{\max}$, где u_g^{\max} – максимальное значение скорости газа, то есть если расход фиксирован R_g и толщина h_g уменьшается, то u_g^{\max} растет, что может приводить к смене

типа течения с чисто термокапиллярного (термокапиллярные напряжения преобладают над сдвиговыми, рисунки 7 (а-в)) на смешанный (сдвиговые напряжения, индуцируемые потоками газа, доминируют над силами Марангони, рисунки 8 $z - e$).

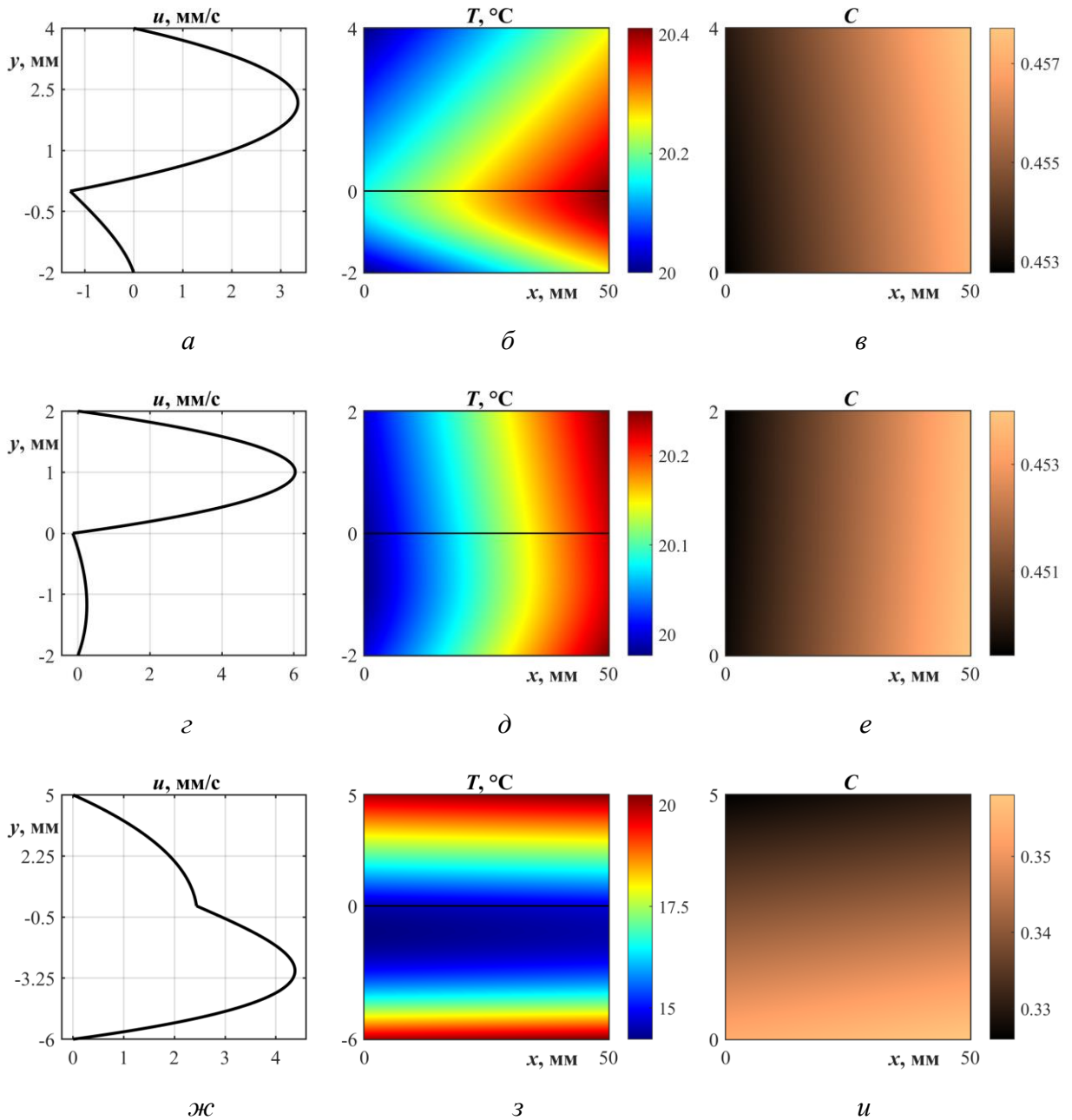


Рисунок 8 – Распределение продольной скорости $u(y)$, температуры $T(x,y)$ и концентрации пара $C(x,y)$ при изменении толщины газового слоя h_g в системе, подверженной тепловой нагрузке с продольным температурным градиентом $A = 5 \text{ }^\circ\text{C/м}$: чисто термокапиллярный режим течения, $h_l = 2 \text{ мм}$, $h_g = 4 \text{ мм}$ (а – в); смешанный режим, $h_l = h_g = 2 \text{ мм}$ (z – e); пуазейлевский режим, $h_l = 6 \text{ мм}$, $h_g = 5 \text{ мм}$ (ж – и)

В случаях, когда толщины жидкого и газового слоев сравнимы, в системе может сохраняться смешанный тип течения; с ростом толщины слоя жидкости реализуется пуазейлевский режим течения (рисунки 8 ж – и).

Изменение баланса сил при изменении толщины газового слоя приводит не только к перестройке топологии течений, но и к перестройке тепловой картины и характера температурной стратификации в системе (достаточно сравнить распределения полей температуры на рисунках 8 б, д, з), что влияет на пороговые характеристики устойчивости течений и формы возникающих неустойчивостей. В рамках линейной теории были определены критические характеристики устойчивости рассматриваемых двухфазных течений относительно плоских нормальных возмущений, пропорциональных $\exp[i\alpha_x \xi - \Lambda \tau]$, где α_x – волновое число вдоль оси x , Λ – комплексный декремент возмущений, ξ, τ – безразмерные переменные, соответствующие продольной координате и времени. На рисунке 9 представлены нейтральные кривые $Gr(\alpha_x)$, рассчитанные на

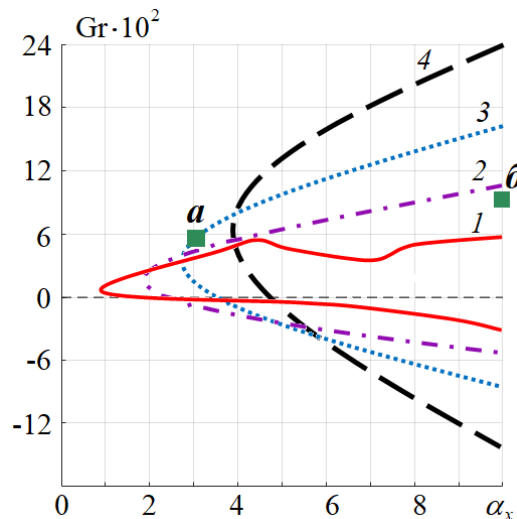


Рисунок 9 – Нейтральные кривые $Gr(\alpha_x)$ для системы с $h_l = 3$ мм при $R_g = 5.76 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и изменении толщины газового слоя: $h_g = 3$ мм (кривая 1); $h_g = 4$ мм (кривая 2); $h_g = 5$ мм (кривая 3); $h_g = 6$ мм (кривая 4)

основе точного решения, определяющие границы устойчивости систем с разной толщиной газового слоя (области неустойчивости лежат внутри кривых, отрицательные значения Gr соответствуют случаю, когда стенки канала охлаждаются ($A < 0$) в направлении оси течения). Значения числа Грасгофа $Gr = g \beta_g A h_g^4 / \nu_g^2$, где β_g, ν_g – коэффициенты теплового расширения и кинематической вязкости, лежащие на указанных кривых, позволяют определить интенсивность внешней тепловой нагрузки (а именно, градиенты A), при которой происходит потеря устойчивости.

Установлено, что основное течение неустойчиво относительно коротковолновых возмущений во всех рассмотренных конфигурациях; при этом с ростом толщины газового слоя область неустойчивости расширяется и происходит сдвиг нейтральных кривых в коротковолновую область. Если расход газа остается фиксированным, то интенсивность сдвиговых напряжений, индуцируемых прокачкой газа, снижается с увеличением h_g , тем самым проявляется стабилизирующее влияние термокапиллярного эффекта.

Для всех рассмотренных конфигураций характерна колебательная неустойчивость, которая проявляется формированием вихревых и тепловых структур, дрейфующих в направлении приповерхностного течения в жидком слое. Так, если основное течение является течением чисто термокапиллярного и пуазейлевского типа, когда имеет место возвратное течение во всей объемной жидкой фазе или в приповерхностной зоне, соответственно, то структуры сносятся основным течением в направлении, противоположном направлению прокачки газа. Возмущения с умеренными волновыми числами представляют собой типичные конвективные ячейки (рисунок 10 а) и, как правило, имеют конвективную природу. Коротковолновые возмущения имеют термокапиллярную природу и проявляются в форме мелкомасштабных приповерхностных вихревых структур и тепловых пятен с шахматной упаковкой (рисунок 10 б). Фазовая скорость распространения возмущений всегда ниже скорости основного течения. Подобные формы неустойчивости подтверждаются результатами известных теплофизических экспериментов.

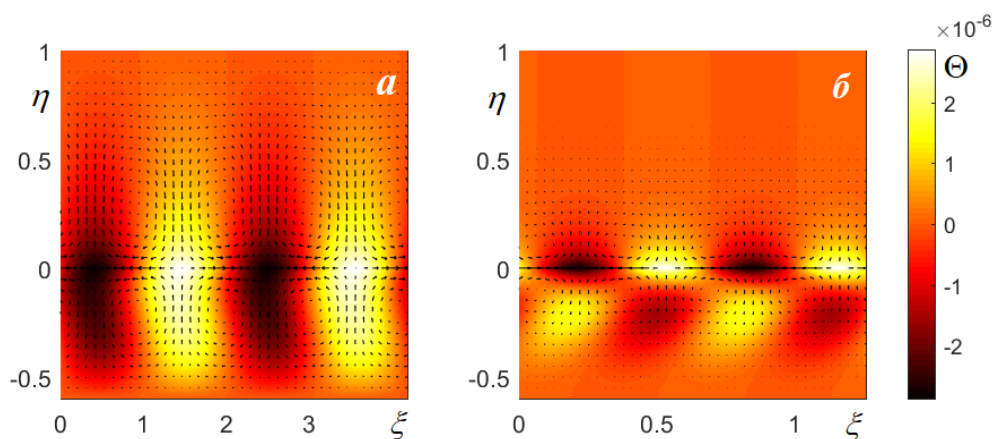


Рисунок 10 – Типичные формы гидродинамических и тепловых структур, возникающих при потере устойчивости в системе с $h_l = 3$ мм, $h_g = 5$ мм:

$$\alpha_x = 3, Gr = 0.06 \text{ (a)}; \alpha_x = 10, Gr = 0.09 \text{ (б)}$$

3 Численное моделирование водоемов с учетом слоистой структуры течений

3.1 Изучение динамики вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя в летний период в рамках одномерной в вертикальном направлении математической модели

Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задачи Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мерзлых и талых слоев [Belolipetskii V.M., Genova S.N. A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. 2016. V. 9, Iss. 2. P. 158–165].

В летний период рассматриваются территории, на которых имеются озера или болота. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются слои: вода, мерзлый грунт, талый грунт, лед. Предлагается численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоев. Выполнена модификация численной модели динамики вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах в летний период заданием на границе вода – атмосфера температуры воды (результаты дистанционных измерений). Выделяются два типа водоемов: а) водоемы, которые зимой промерзают до дна, а летом лед тает по всей глубине и протаивают верхние слои дна («мелкие» водоемы); б) водоемы, которые зимой не замерзают до дна («глубокие» водоемы). Возможны различные варианты расположения мерзлых и талых слоев. Для «глубоких» озер в летний период реализуется вариант: слой воды, слой талого грунта, слой мерзлого грунта; для «мелких» водоемов рассматриваются пять вариантов (таблица 1). При переходе с одного варианта на другой слои добавляются или исключаются.

Таблица 1 – Варианты расположения мерзлых и талых слоев в болотно-озерных ландшафтах летом

№ варианта	Вода	Лед	Вода	Талый грунт	Мерзлый грунт	Талый грунт	Мерзлый грунт
1	+					+	+
2	+	+					+
3	+	+			+	+	+
4	+			+	+	+	+
5	+	+	+			+	+

На рисунке 11 приведены схемы вертикальной структуры вечной мерзлоты. Для решения полученных задач используется следующий алгоритм. Пусть на n -ом временном слое известны распределения температуры в рассматриваемых слоях и положения границ фазового перехода, тогда процесс нахождения неизвестных параметров в момент времени t_{n+1} выполняется в два этапа: на первом этапе определяются распределения температуры в выделенных слоях; на втором этапе уточняются положения границ раздела фаз.

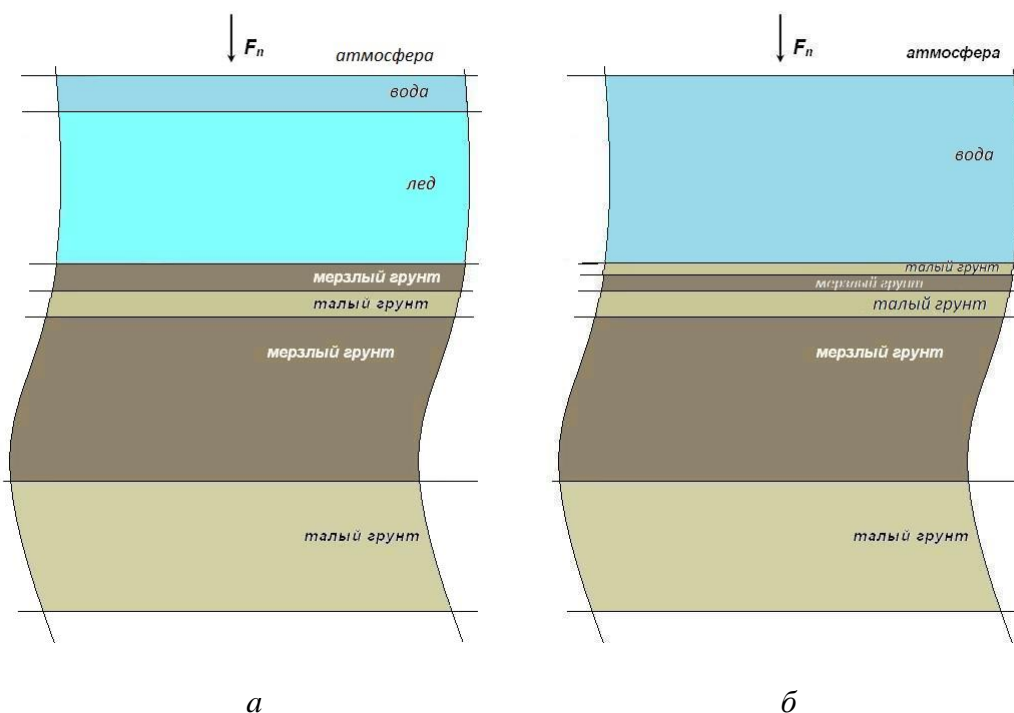


Рисунок 11 – Варианты 3 (1а), 4 (1б)

С помощью созданной компьютерной модели, использующей дистанционное зондирование Земли, можно построить карты температурного режима в труднодоступных болотно-озерных ландшафтах вечной мерзлоты.

3.2 Разработка трехмерной модели экосистемы озера Ши́ра

Динамика течений в водоемах интенсивно изучается прежде всего для того, чтобы проанализировать картину распространения примесей и фитопланктона, и тем самым определить экологический режим водоемов.

Объект нашего исследования – уникальное соленое озеро Ши́ра, которое является центром рекреационной зоны. Увеличение в последние годы антропогенной нагрузки на озеро создало угрозу уменьшения лечебных свойств воды и, соответственно, поставило задачу комплексного изучения экологического состояния этого озера. В последние годы

исследования продолжались как по направлению изучения физических, биологических и химических свойств озера, так и по математическому моделированию гидрофизического режима озера, что позволило уточнить картину течений в озере Ши́ра в осенне-весенний и летний периоды. В летний период озеро стратифицировано по температуре и солености, поэтому важным фактором его функционирования является наличие внутренних волн и обусловленные ими процессы перемешивания в прибрежной зоне.

Моделирование озера Ши́ра было проведено на основе трехмерной численной модели, реализованной открытым кодом ROMS (Regional Oceanic Modeling System). Преимущества ROMS перед другими подобными программами (например, POM, GETM): применение аппроксимаций вплоть до четвертого порядка для адвективных членов, распараллеливание численного алгоритма, возможность использования различных способов построения расчетной сетки, различных формул для уравнения состояния и для расчета коэффициента вертикального обмена. Алгоритмы кода ROMS реализуют математическую модель трехмерного ветрового движения неоднородной жидкости в замкнутом водоеме в приближении Буссинеска и предположении о гидростатичности давления.

Для моделирования течений в озере Ши́ра открытый код ROMS был модифицирован с учетом условий озера. С помощью применения разработанной методики построения цифровой модели дна по нерегулярным данным измерений батиметрии было получено непрерывное и непрерывно-дифференцируемое поле батиметрии озера Ши́ра, которое использовалось для задания равномерной сетки в численной модели. В качестве начального распределения для численных расчетов были заданы вертикальные профили температуры и солености, полученные из натуральных измерений в озере Ши́ра в летний период. Для проведения расчетов с учетом реальных метеорологических данных (ветрового воздействия, температуры и влажности воздуха, осадков) были созданы специальные программы, позволяющие подключать такие данные в численные расчеты. Верификация ROMS осуществлена на полученных частных аналитических решениях.

Расчеты проведены при следующих значениях параметров: шаги по горизонтали $V_x = 15$ м, $V_y = 20$ м, по вертикали $V_z = 1$ м. Применялись методы распараллеливания OpenMP, MPI. Коэффициент придонного трения $k_b = 10^{-4}$ м/с, коэффициент горизонтального турбулентного обмена $K_h = 2$ м²/с. Использовалось линейное уравнение состояния и KPP-параметризация турбулентного вертикального перемешивания.

При ветровом сценарии: мгновенно начинающийся постоянный ветер, который мгновенно заканчивается, после остановки ветра возникают сейшевые колебания. Для определения пространственно-временной структуры возникающих внутренних волн были обработаны данные двух численных расчетов при следующих ветровых сценариях: 1) 8-ми часовое воздействие мгновенно начинающегося постоянного ветра северо-восточного направления со скоростью 8 м/с, который мгновенно заканчивается, и далее 24 часа без ветрового воздействия; 2) 8-ми часовое воздействие мгновенно начинающегося постоянного ветра юго-западного направления со скоростью 8 м/с, который мгновенно заканчивается, и далее 24 часа без ветрового воздействия.

Особенностью применения числовой модели ROMS является то, что значения температуры рассчитываются в так называемых сигма-координатах (различные значения по глубине для разных географических точек). Для построения картины изоповерхностей температуры использовалась линейная аппроксимация между узлами вертикальной сетки.

Графики изоповерхностей температуры ($10\text{ }^{\circ}\text{C}$) при юго-западном направлении ветра через 1 ч, 3 ч, 4 ч, 7 ч после остановки ветра представлены на рисунке 12. По графикам видно, что в этом случае максимальные и минимальные колебания изотерм по глубине наблюдаются в прибрежной зоне на двух противоположных сторонах озера, соответственно. Изоповерхность иллюстрирует вариант одноузловой сейши.

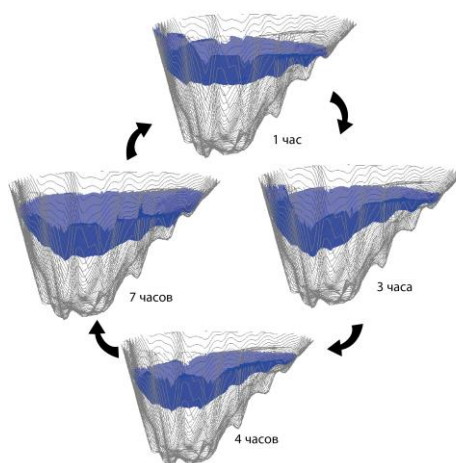


Рисунок 12 – Структура внутренней волны при юго-западном направлении ветра через 1 ч, 3 ч, 4 ч, 7 ч после остановки ветра

Графики изоповерхностей температуры ($10\text{ }^{\circ}\text{C}$) при северо-восточном направлении ветра через 1 ч, 4 ч, 6 ч, 8 ч, 10 ч, 11 ч после остановки ветра представлены на рисунке 13. По графикам видно, что в случае северо-восточного направления ветра максимальные и минимальные колебания изотерм по глубине наблюдаются в прибрежной зоне

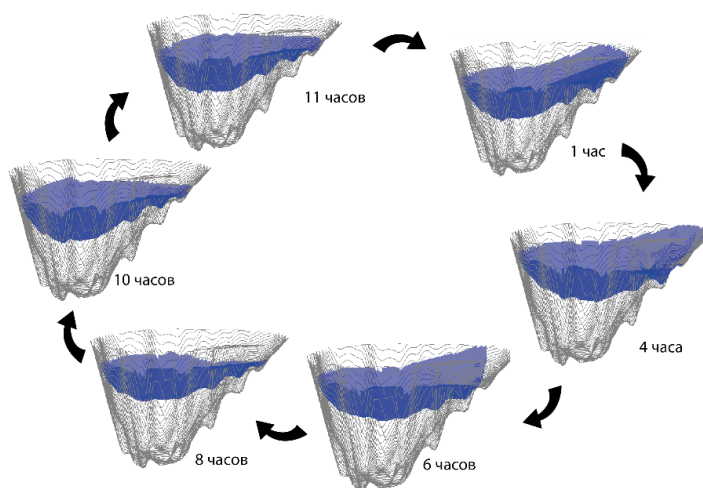


Рисунок 13 – Структура внутренней волны при северо-восточном направлении ветра через 1 ч, 4 ч, 6 ч, 8 ч, 10 ч, 11 ч после остановки ветра

последовательно на всех сторонах озера, то есть изоповерхность иллюстрирует вариант одноузловой вращающейся сейши. При сравнении графиков возвышения свободной поверхности и графиков изоповерхностей температуры, иллюстрирующих вариант одноузловой сейши (рисунки 12, 13), можно наблюдать, что волновые колебания на поверхности и в толще озера идут в противофазе. Например, подобные колебания, возникающие при воздействии юго-западного направления ветра, показаны на рисунке 14.

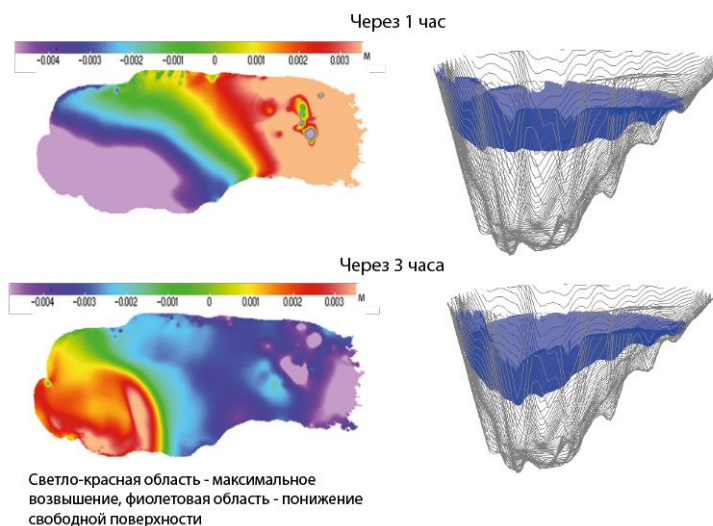


Рисунок 14 – Колебания возвышения свободной поверхности (слева) и колебания изоповерхности температуры (справа), возникающие через 1 ч и 3 ч после прекращения действия восьмичасового юго-западного ветра со скоростью 8 м/с

Таким образом, на основе расчетов трехмерного течения в озере с использованием численной модели ROMS определена горизонтальная структура движения внутренних волн, что позволяет проанализировать картину движения примесей и фитопланктона.

4 Методы математического и численного моделирования в задачах механики деформируемых сред и мониторинга геодинамических явлений

4.1 Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов при квазистатическом нагружении

В отчетный период решены задачи изгиба многослойной композитной пластины в случае идеальной склейки слоев без локальных расслоений на поверхностях раздела. Учет расслоений является задачей очередного этапа работы над проектом. Рассматривалась пластина, состоящая из слоев однонаправленных волокнистых композитов. Каждый слой моделировался как трансверсально-изотропный материал, а упругие постоянные для всей пластины в целом, были получены путем осреднения модулей упругости и модулей сдвига по слоям. Особенностью волокнистых материалов является их разномодульность, то есть разное сопротивление растяжению и сжатию, которое описывалось с помощью введения дополнительных модулей упругости, возникающих при растяжении материала вследствие сопротивления армирующих элементов, которое отсутствует при сжатии композита. При построении определяющих уравнений с учетом этих особенностей использовался обобщенный реологический метод. Задачи решались в рамках технической теории пластин Кирхгофа – Лява.

Решена контактная задача с заранее неизвестной областью контакта для упругой многослойной пластины из разномодульного материала и жесткого штампа. Контактное взаимодействие описано с помощью ограничения в виде неравенства. Постановка задачи основана на вариационном принципе Лагранжа минимума потенциальной энергии пластины. Для численного решения применялся метод конечных элементов с использованием треугольных элементов Белла. Проведены вычисления для различных форм штампа.

Чтобы показать важность учета разного сопротивления материала растяжению и сжатию, была выполнена серия вычислительных экспериментов, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении. Сравнение линий уровня прогиба в расчетах с учетом и без учета разномодульности показало, что в случае неучета пластина оказывается более жесткой и прогиб от воздействия штампа значительно меньше действительного прогиба. Показано влияние направления армирования на прогиб пластины. Рассматривались пластины с различными углами армирования слоев, жестко закрепленные по двум противоположным боковым сторонам.

На рисунке 15 представлен пример расчета для двухслойной композитной пластины с толщиной слоев 5 мм, расположенных перпендикулярно друг другу. Параметры упругости, используемые в вычислительном эксперименте, соответствуют углепластику с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50 %:

$$E_1^+ = 114, E_1^- = 57, E_2 = 6, G = 3.5 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.19, \nu_2 = 0.02,$$

где E_1^+ и E_1^- – модули Юнга вдоль волокон при растяжении и сжатии, E_2 – модуль Юнга поперек волокон, G – модуль сдвига, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона при растяжении вдоль и поперек волокон.

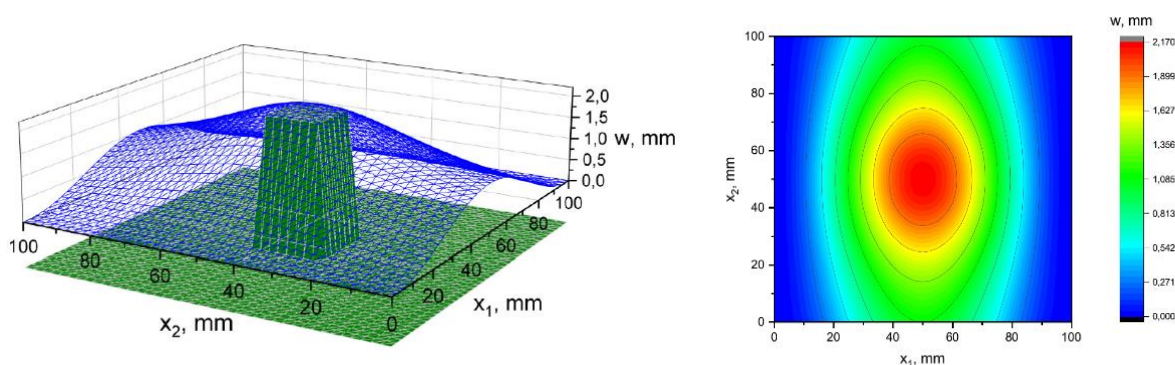


Рисунок 15 – Прогиб композитной пластины при контакте с жестким штампом

Решена задача расчета напряженно-деформированного состояния композитной пластины под действием произвольной системы сил, в которой деформация представляет собой совокупность деформации срединной поверхности и деформации, возникающей вследствие изгиба пластины. Такая постановка задачи позволяет описывать пластины под действием сложных систем нагружения. Для численного решения использовался метод конечных элементов. В качестве конечного элемента применялся треугольный элемент с 24-мя степенями свободы: тремя узлами, в каждом из которых заданы перемещения точки срединной поверхности по трем осям, и частные производные прогиба первого и второго порядков.

Были рассмотрены однослойные и двухслойные композитные пластины с параметрами упругости для углепластика. На рисунке 16 приведен пример расчета изгиба однослойной пластины под действием двух сил, направленных противоположно друг другу. При таком нагружении положение нейтральной поверхности заранее неизвестно и кроме изгибающих моментов возникают также мембранные усилия в плоскости пластины. Проведена верификация полученного решения с помощью программного комплекса расчетов Abaqus. Расхождение максимальных прогибов составило примерно 150 %.

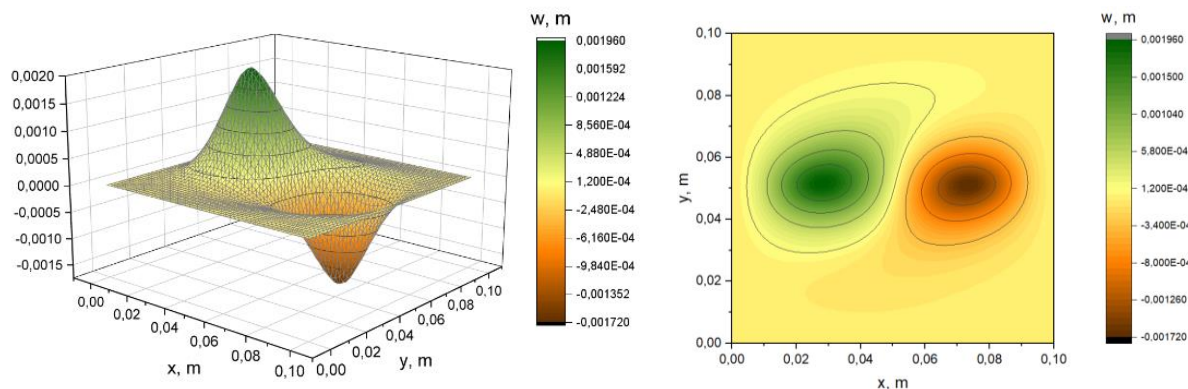


Рисунок 16 – Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием двух сил

Такое расхождение объясняется невозможностью учета сдвига нейтральной поверхности и осреднением изгибных жесткостей в модели композита, используемой комплексом Abaqus. Результат расчета в Abaqus представлен на рисунке 17.

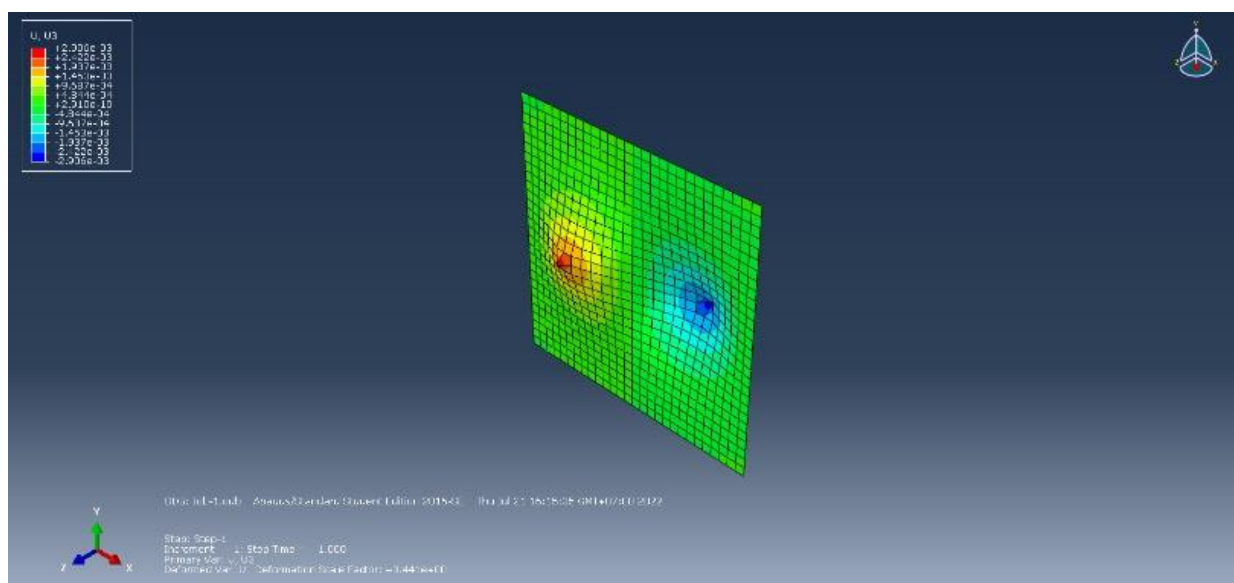


Рисунок 17 – Расчет изгиба пластины под действием двух сил с помощью программного комплекса Abaqus

С помощью программного комплекса Abaqus также проведено сравнение результатов расчетов для задач, которые решались на предыдущих этапах работ по проекту. Для этого проведено две серии вычислительных экспериментов. В первой из них рассматривалось плоское напряженное состояние пластины. Расчеты показали, что величина максимального перемещения отличается приблизительно в два раза в зависимости от знака нагружения, что соответствует отношению модулей упругости при

растяжении и сжатии вдоль волокон и согласуется с результатами предыдущих расчетов плоского напряженного состояния композитных пластин с учетом разномодульности.

Во второй серии вычислительных экспериментов был выполнен расчет чистого изгиба консольно закрепленной по контуру квадратной пластины. Проведено сравнение с расчетом, в котором не учитывался сдвиг нейтральной поверхности и не проводился перерасчет с учетом областей растяжения – сжатия. В этом случае пластина оказывается более жесткой и прогиб уменьшается. Прогиб пластины при неучете изменения областей растяжения – сжатия составил 82 %. Полученные результаты согласуются с результатами проведенных ранее расчетов чистого изгиба разномодульных композитных пластин.

Разработанная компьютерная программа для расчета квазистатического напряженно-деформированного состояния композитной пластины из разномодульного материала зарегистрирована в государственном реестре программ для ЭВМ.

4.2 Оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры на основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды

Оценке эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры посвящена обширная литература. В плоском случае периодическая структура позволяет построить аналитические приближения к упругим характеристикам композиционного материала. Применение же метода конечных элементов для 3D моделирования конструкции связано с большими вычислительными затратами, что затрудняет исследование реальных композитов. Однако развитие в последние годы вычислительных технологий, основанных на формате данных TTF (Tensor Train Format), позволяет объединить перечисленные подходы для оценки параметров конструкционных материалов.

Идея развиваемого подхода состоит в следующем. Рассматривается волокнистый композит (см. рисунок 18) с полимерной матрицей и регулярной структурой, соответствующей гексагональной укладке цилиндрических волокон. Материалы матрицы и волокна предполагаются ортотропно-упругими и однородными. Распределение поля перемещений в волокне постулируется в виде разложения:

$$\mathbf{U}_{ij}^V(x, y, z) = \mathbf{r}_{ij}^V(z) + (x - x_{ij}^V) \mathbf{u}_{ij,x}^V(z) + (y - y_{ij}^V) \mathbf{u}_{ij,y}^V(z).$$

Здесь x_{ij}^V, y_{ij}^V – координаты центра нормального сечения O_{ij} . Смещение $\mathbf{U}_p^1(z)$

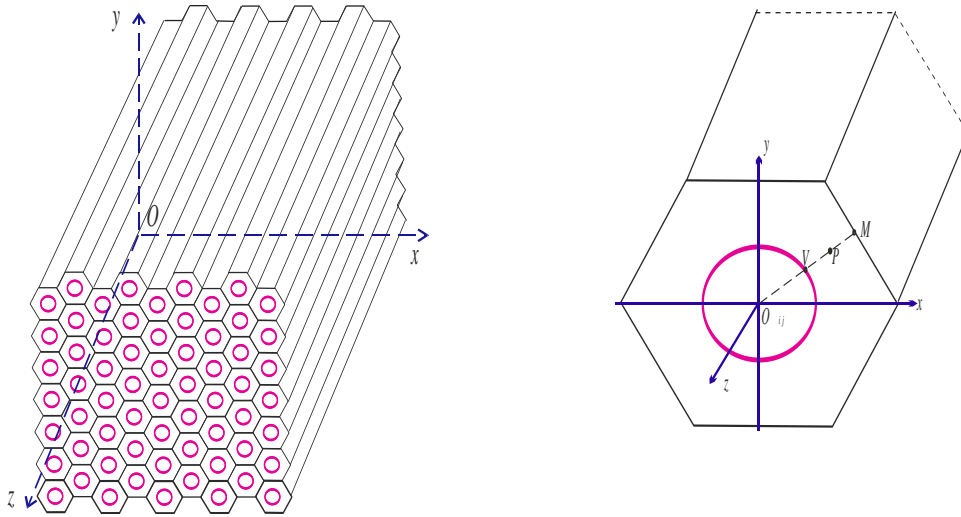


Рисунок 18 – Регулярная структура упругого композита и нормальное сечение одного из ее элементов

произвольной точки P матрицы в нормальном сечении аппроксимируется эрмитовой интерполяцией по узловым значениям $\dot{U}_M(z)$ и $\dot{U}_V(z)$ точек, лежащих на луче $O_{ij}P$: точка V лежит на поверхности раздела волокно – матрица и в ней должны быть выполнены условия сопряжения по перемещениям и усилиям, тогда как точка M – пересечение луча $O_{ij}P$ с ближайшей гранью.

Обозначим через $u_{kl}^M(z)$ смещение при деформировании точки ребра шестигранника с координатами x_{kl}^M, y_{kl}^M , совпадающей с узлом однородной гексагональной решетки. Тогда перемещение $\dot{U}_M(z)$ точки M грани приближаем линейной интерполяцией смещений $u_{kl}^M(z)$ ближайших узлов решетки нормального сечения.

Из вариационного принципа Лагранжа получаем дифференциально-разностные определяющие уравнения относительно $u_{ij}^V(z), u_{ij,x}^V(z), u_{ij,y}^V(z), u_{kl}^M(z)$. Для их решения ТТФ может быть применен несколькими способами. По-видимому, наиболее естественной является следующая реализация ТТФ:

$$u_{ij}^V(z); \sum \alpha_i^V \beta_j^V u^V(z); u_{ij,x}^V(z); \sum \chi_i^V \beta_j^V u^V(z); u_{ij,y}^V(z); \sum \alpha_i^V \gamma_j^V u^V(z); u_{kl}^M(z); \sum \alpha_k^M \beta_l^M u^M(z).$$

Слагаемые определяются последовательно из вариационного принципа, а их количество характеризует имитационную модель исследуемого композита.

Решая серию краевых задач (растяжение – сжатие, кручение, изгиб) и сравнивая полученные решения с эталонными решениями для ортотропно-упругого однородного

образца, можно оценить упругие характеристики композита. Этот алгоритм реализован на языке C++, проводится тестирование программы.

4.3 Разработка математических моделей для анализа деформационных процессов в многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластинах и оболочках

Микрополярные пластины и оболочки представляют собой композиты со слоистой или волокнистой структурой, метаматериалы с заданными специфическими свойствами или функционально-градиентные материалы. Они имеют широкую область приложений в точной механике, электронике и медицине. Примерами являются биологические клеточные мембраны и их искусственные аналоги. Искусственные мембраны используются в фармакологии для изготовления липосом – сферических капсул для точной адресной доставки лекарственных препаратов к больному органу, минуя остальные части человеческого организма. Современные исследования показали также, что теория микрополярных пластин и оболочек применима к изучению деформационных характеристик наноструктур, в частности, плоских листов и нанотрубок графена.

При описании многослойной структуры микрополярной оболочки каждый слой рассматривается как независимая оболочка (рисунок 19). Уравнения отдельного слоя строятся с помощью аппроксимации полей перемещений и вращений. Далее применяется процедура усреднения по толщине оболочки. При этом локальные проскальзывания слоев относительно друг друга вдоль поверхностей раздела не учитываются. Определяющие уравнения записываются в термодинамически непротиворечивой форме законов сохранения. Это обеспечивает корректность начально-краевых задач.

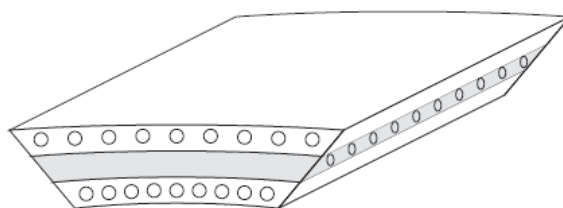


Рисунок 19 – Геометрия слоистой цилиндрической оболочки

Для численного решения получаемых при моделировании гиперболических систем уравнений применяются эффективные параллельные алгоритмы, основанные на методе распада разрыва С.К. Годунова и его модификаций типа ENO-схем. Результаты

численных расчетов распространения волн в микрополярных цилиндрических оболочках демонстрируют качественное различие волновой картины в зависимости от типов частиц.

На рисунке 20 представлены кривые уровня вертикальной скорости для материала из сферических частиц во всех слоях. Наблюдается волновая картина задачи Лэмба. На кривых уровня отчетливо видны две поперечные волны в виде симметричных прямолинейных отрезков, касающихся полуокружности меньшего радиуса (конические волны). Падающие продольные волны имеют округлые фронты, а фронты поперечных волн эллиптические.

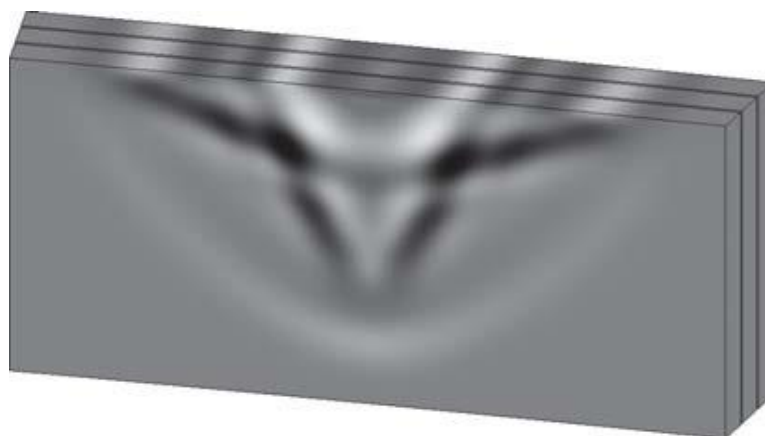


Рисунок 20 – Линии уровня вертикальной скорости частиц в микрополярной цилиндрической оболочке со сферическими частицами

Аналогичные расчеты выполнены для материалов с цилиндрическими частицами, вытянутыми вдоль различных осей в разных слоях. Анализ полученных результатов показал, что в случае цилиндрических частиц за эллиптическими фронтами поперечных волн наблюдается дополнительная система низкочастотных волн, обусловленная вращательным движением частиц и зависящая от их ориентации.

4.4 Построение эффективных параллельных вычислительных алгоритмов, обладающих свойством монотонности, для решения динамических задач

При решении прямых задач сейсмологии рассматриваются достаточно крупные массивы горных пород при достаточно малых возмущениях, генерируемых сейсмическими источниками. В простейшем случае волновые процессы описываются линейными уравнениями динамической теории упругости для однородной среды. В действительности грунты и горные породы неоднородны. На крупномасштабном уровне для геосред характерно блочно-слоистое строение с наличием прослоек, которые можно

рассматривать как поверхности раздела, не имеющие толщины, или как поверхности скольжения блоков. Возможно более сложное моделирование прослоек с учетом их реологии и флюидонасыщенности. Материалы блоков при этом могут иметь различные механические характеристики. На мелкомасштабном уровне грунты и горные породы существенно неоднородны и могут рассматриваться как пористые среды, насыщенные влагой или газом. Осреднение свойств твердой пористой составляющей и жидкости приводит к моделям однородного материала, совмещающим свойства обеих компонент. Однако эффекты, происходящие в горных породах при распространении волн, можно вполне корректно описать, основываясь на феноменологическом подходе. Наиболее адекватными являются такие модели вязкоупругих материалов, как модель Пойнтинга – Томсона или модель стандартного линейного тела (Standard Linear Solid или SLS), а также ее обобщение (Generalized Standard Linear Solid или GSLS).

Исследуются волновые поля в плоскостной геосреде с однородными изотропными вязкоупругими слоями, описываемыми в рамках модели GSLS. Допущение о плоскостной структуре приводит к рассмотрению двумерной осесимметричной задачи, что позволяет сократить вычислительный ресурс по сравнению с трехмерной постановкой. Численный алгоритм основан на методе расщепления по пространственным переменным и физическим процессам.

В расчетах, связанных с определением энергетических характеристик сейсмических источников, необходимо учитывать диссипативные свойства разностных схем. Искусственная или схемная диссипация приводит к определенным неточностям, поэтому было предложено применить разностную схему с контролируемым параметром диссипации, построенную по методу Г.В. Иванова. В предельном случае схема является бездиссипативной и обладает вторым порядком сходимости, но теряет свойство монотонности. Однако в силу присутствия физической вязкости осцилляции сглаживаются и необходимость вводить искусственную диссипацию в схему практически отпадает. Комплекс параллельных программ, предназначенных для распределенных вычислительных систем кластерной архитектуры, был доработан с учетом схем с контролируемой диссипацией. На рисунке 21 показаны результаты тестовых расчетов одномерных задач распространения цилиндрических волн, вызванных мгновенным приложением нагрузки на боковой поверхности, для сред с добротностями $Q = 20$ и $Q = 100$, характерными для реальных пород.

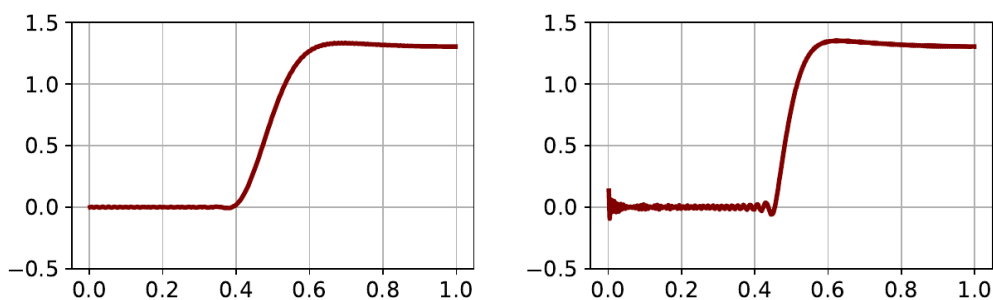


Рисунок 21 – Профили цилиндрической поперечной волны в среде с добротностью $Q = 20$ (слева) и $Q = 100$ (справа)

На рисунке 22 показано распределение вертикальной компоненты скорости в однородных средах при воздействии точечного источника. На обоих рисунках заметно большее сглаживание волновых фронтов и осцилляций в средах с меньшей добротностью.

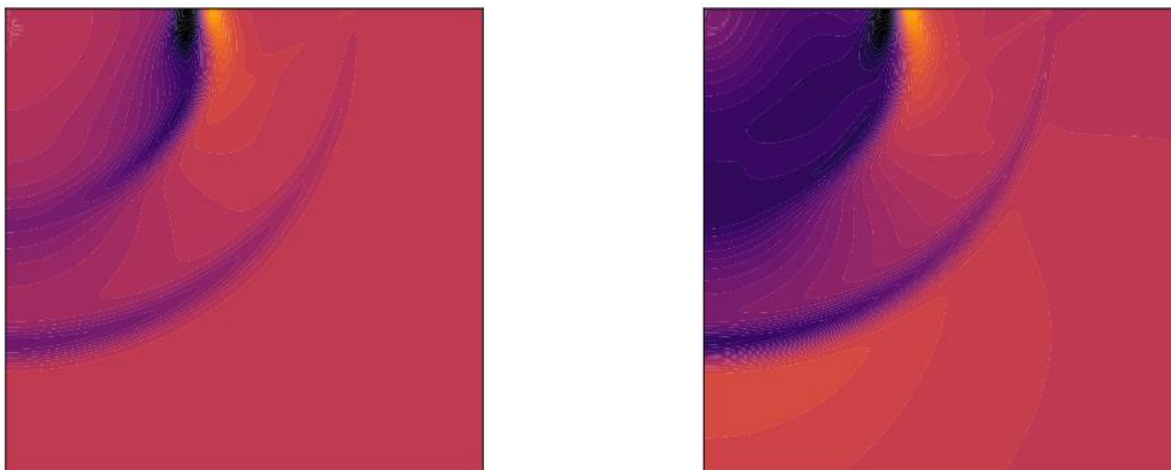


Рисунок 22 – Поле распределения вертикальной компоненты скорости v_z в однородной среде с добротностью $Q = 20$ (слева) и $Q = 8$ (справа)

При построении параллельных алгоритмов для решения одномерных и двумерных задач были исследованы различные методы распараллеливания бездиссипативной схемы, которая состоит из двух этапов «предиктор» и «корректор». На шаге «предиктор» решается трехдиагональная система уравнений методом прогонки, поэтому особое значение имеет организация обменов между процессорами. Было рассмотрено два способа. Первый способ основан на параллельном методе Яненко. Второй способ предполагает обмен данными между процессорами вдоль характеристик с дальнейшим итерационным пересчетом граничных значений. На рисунке 23 представлены графики ускорения параллельных программ для решения одномерной задачи о распространении цилиндрических продольных волн и для решения двумерной осесимметричной задачи.

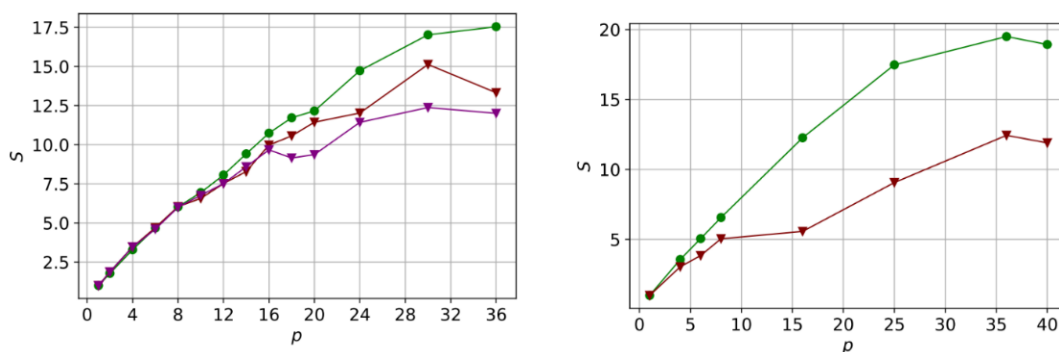


Рисунок 23 – Ускорение параллельных программ для одномерной задачи (слева) и для двумерной осесимметричной задачи (справа): первый способ распараллеливания бездиссипативной схемы (фиолетовая кривая), второй способ (красная кривая), схема Годунова (зеленая кривая)

Приведенные результаты для различных способов распараллеливания бездиссипативной схемы сравниваются с параллельной реализацией схемы «предиктор – корректор» С.К. Годунова. Из графиков видно, что схема Годунова показывает лучшее ускорение, хотя стоит отметить то, что при вычислениях на одном и том же количестве процессоров бездиссипативная схема показывает меньшее время счета.

4.5 Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями

В 2022 году были продолжены исследования по математическому моделированию жидких кристаллов под действием слабых термомеханических и электромагнитных возмущений. Ранее исполнителями проекта изучались динамические процессы. Результаты отчетного периода относятся к решению статической задачи – задачи о равновесии жидкокристаллического слоя в неоднородном электрическом поле.

В процессе воздействия электрическим полем на жидкий кристалл происходит своеобразная конкуренция между электромагнитными силами, которые пытаются сориентировать молекулы вдоль электрического поля, и силами упругости, стремящимися сохранить первоначальное положение молекул. Поэтому в соответствии с теорией Озеена – Франка распределение углов ориентации молекул в равновесном состоянии ЖК удовлетворяет условию стационарности функционала потенциальной энергии, представляющего собой разность между энергией упругого взаимодействия и энергией электрического поля.

Решена следующая задача. Плоский слой жидкого кристалла помещен между симметрично расположенными короткими пластинами–обкладками конденсатора. Слой считается бесконечным в горизонтальном направлении, а система пластин периодической с заданным периодом. Внутри слоя известно начальное распределение углов ориентации молекул относительно горизонтальной оси, которое создается на стадии предварительной подготовки жидкого кристалла с помощью специального технологического процесса. Требуется найти распределения электрического потенциала и углов ориентации молекул в слое (доменов сориентированных молекул) после появления зарядов на пластинах конденсатора.

На основе вариационного подхода получены определяющие уравнения, для численной реализации которых разработан параллельный вычислительный алгоритм и компьютерная программа по технологии CUDA для компьютерных систем с графическими ускорителями. Во внешности слоя электрическое поле рассчитывается по методу прямых. Внутри слоя нелинейные уравнения в частных производных для потенциала электрического поля и угла ориентации молекул жидкого кристалла решаются итерационным методом на основе вариационно-разностной схемы на сетке, согласованной с сеткой метода прямых, с применением быстрого преобразования Фурье.

В CUDA – программе используется центральный процессор CPU (Central Processing Unit), на котором выполняются последовательные части программного кода, и графический сопроцессор GPU (Graphics Processing Unit), где реализуются параллельные вычисления. В начале выполнения программы центральным процессором подключаются используемые библиотеки, задаются размерности конечно-разностной сетки, а также все необходимые константы. Затем описываются динамические массивы для искомым и вспомогательных величин, с применением функции malloc выделяется под них память и задаются входные данные задачи – начальное распределение углов ориентации и т.п. Далее все эти данные копируются на графическое устройство посредством функций cudaMemcpy и cudaMemcpyToSymbol. После того как на GPU выполнены все вычисления, данные в узлах сетки копируются обратно на CPU. Центральный процессор записывает полученные результаты счета в файлы и строит графики по этим данным.

На графическом сопроцессоре GPU тоже производится описание массивов и выделение под них памяти функцией cudaMalloc. С помощью команд dim3 blocks и dim3 threads задаются количество блоков и количество нитей в каждом блоке. В двумерном случае получается сетка, включающая заданное количество блоков, состоящих из определенного числа нитей. После того как все динамические массивы величин скопированы на GPU начинается основной расчетный цикл по итерациям алгоритма.

Происходит последовательный вызов процедур, которые реализуют этапы алгоритма решения задачи. Внутри каждого этапа расчеты производятся в параллельном режиме. После выполнения каждого ядра производится барьерная синхронизация перед началом выполнения следующего ядра. По мере окончания расчетов все полученные массивы данных передаются обратно на CPU для дальнейшей обработки.

С помощью разработанной вычислительной методики выполнена серия расчетов переориентации молекул в плоском ЖК слое. На рисунках 24 и 25 приведены результаты расчетов слоя с горизонтальной начальной ориентацией молекул жидкого кристалла 5СБ ($\theta_0 = 0$). На верхних рисунках слева короткими отрезками изображено распределение углов ориентации после приложения электрического поля. На рисунках справа отрезками показано направление электрического поля с учетом неравномерного распределения диэлектрической проницаемости, обусловленного переориентацией молекул. На нижних рисунках для большей наглядности показаны линии уровня углов ориентации.

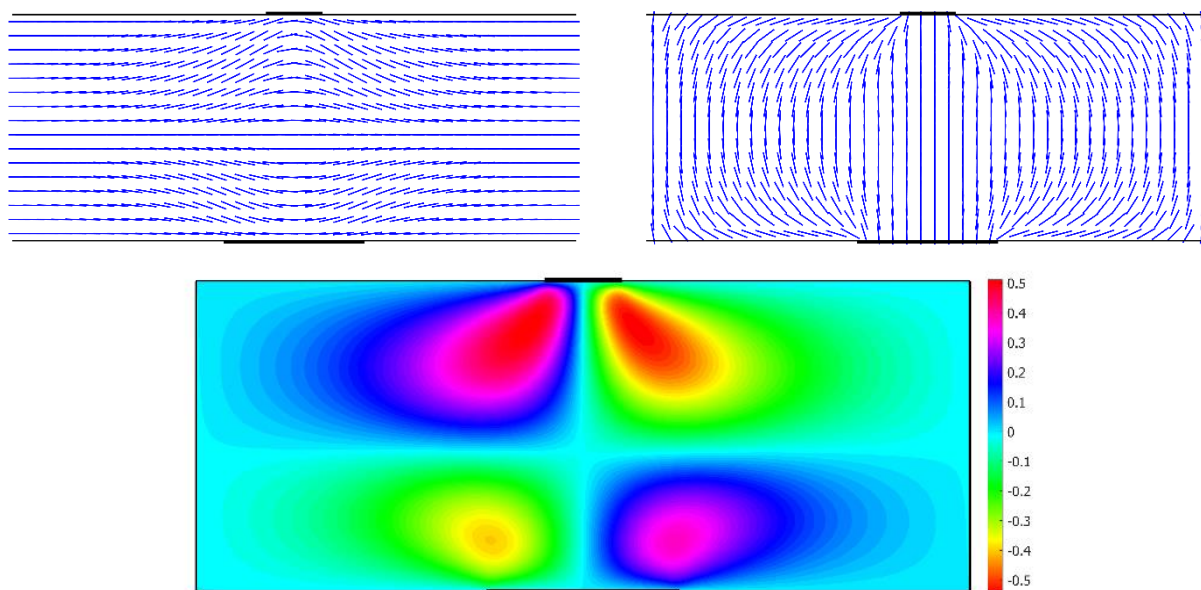


Рисунок 24 – Численное решение с четырьмя рядами молекул

В случае расположения обкладок конденсатора одна над другой в расчетах были получены три различных варианта решения задачи. В первом из них (рисунок 24) образуется четыре ряда молекул симметрично относительно вертикальной и горизонтальной средних линий прямоугольника. При этом молекулы в центральной части не перестраиваются вдоль электрического поля, сохраняя первоначальную ориентацию. Во втором решении (рисунок 25) вместо четырех образуется один ряд, причем молекулы в центральной части поворачиваются из начального положения по часовой стрелке и

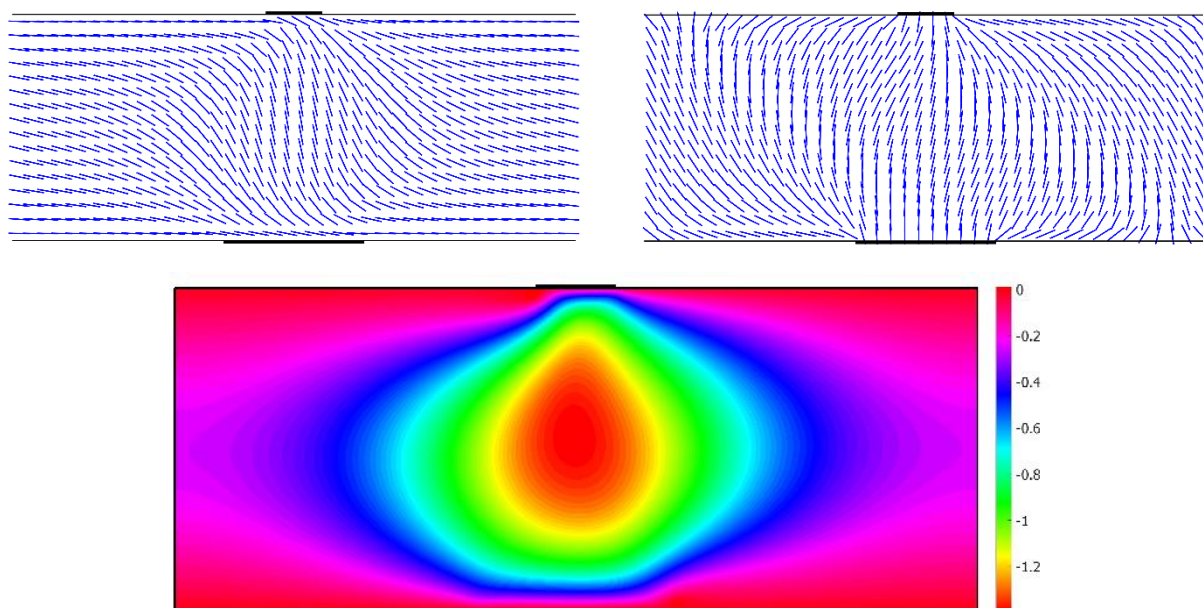


Рисунок 25 – Альтернативное решение с одним роём

выстраиваются в направлении электрического поля. Третье решение аналогично, но в нем молекулы поворачиваются против часовой стрелки.

Анализ результатов показал, что центрами больших доменов сорентированных молекул (роев) в жидком кристалле служат локализованные группы молекул, начальная ориентация которых перпендикулярна направлению поля, и что в зависимости от числа таких центров может образовываться один или несколько роев. Это означает, что формирование роев происходит за счет потери устойчивости равновесия локализованных групп, которые по мере срыва из неустойчивого состояния вовлекают в процесс переориентации соседние молекулы.

4.6 Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности, разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия

Определение достоверных параметров возможных землетрясений при инженерно-геологических изысканиях необходимо для обеспечения сейсмостойкости объектов с целью уменьшения ущерба от разрушений и человеческих жертв. Модель затухания описывает зависимость характеристик колебания грунта от параметров землетрясения, расстояния до источника, локальных условий площадки. Данная модель строится на основе региональных каталогов землетрясений.

Исследование посвящено анализу физических характеристик (амплитуды колебаний и спектры реакции грунта) от землетрясений для Байкальской рифтовой зоны.

Исходными данными являются 252 записи от 53 землетрясений. Критерии отбора – энергетический класс землетрясения ($K \geq 11$) и максимальное эпицентральное расстояние ($R \leq 300$ км). Для получения физических характеристик и обработки записей реализованы вычислительные алгоритмы в среде MATLAB. Применяемые алгоритмы основаны на методологии Тихоокеанского центра инженерных исследований землетрясений и адаптированы к особенностям сейсмического мониторинга Байкальского региона.

Суть обработки заключалась в следующем: выполнялось определение частот среза и применение 5-полюсного акаузального фильтра Баттерворта; путем интегрирования и дифференцирования в частотной области получены временные ряды ускорений, скоростей, смещений; на последнем этапе рассчитывалось среднее геометрическое спектров реакции PGA и PGV от двух горизонтальных компонент (RotD50). Амплитуды RotD50 не зависят от азимута эпицентра землетрясения относительно регистрирующей станции и используются для построения современных моделей затухания.

В ходе обработки для каждого землетрясения вычислены пиковые ускорения грунта, пиковые скорости грунта и амплитуды спектра реакции ускорений для 22 периодов в диапазоне 0.05 – 10 с. Сравнение полученных данных с четырьмя современными зарубежными моделями затухания показало, что для энергетических классов 12 и 13 полученные значения несколько ниже. Результаты исследований позволяют сформировать базу данных сильных движений для Байкальского региона и на этой основе разработать региональную модель затухания.

4.7 Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учетом влияния внешних геодинамических факторов

Исследование посвящено выявлению и анализу триггерных механизмов возникновения сильных землетрясений в системе Земля – Луна. В рамках исследования проводится сопоставление последовательности сильнейших землетрясений с магнитудой больше 7, начиная с 1911 года, и приливные компоненты. Используются каталог данных и приливные компоненты, которые изучались с помощью сингулярного спектрального анализа «Гусеница» (SSA – Singular Spectrum Analysis).

Сильные землетрясения являются экстремальным проявлением жизни сложной тектонофизической системы, которая долгое время «созревает» под действием многочисленных факторов, приходя на конечном этапе к катастрофе. Внешними триггерами землетрясений могут быть как детерминированные процессы, например, движения небесных тел, так и другие физические факторы, имеющие стохастическую

природу. Для анализа землетрясений и сопоставления их с внешними факторами рассмотрен каталог землетрясений с магнитудой 7 и выше, начиная с 1911 года. Данные получены с помощью портала «The Significant Earthquake Database».

При использовании метода «Гусеница» ставилась задача выделить отдельные аддитивные составляющие исходного ряда, такие как тренд (гладкая и медленно меняющаяся часть ряда), различные колебательные и периодические компоненты, а также шумовую компоненту. Используя инструмент «Прогноз» программы «Гусеница» визуализированы обнаруженные низкочастотные процессы во временном ряду.

Исследуемый ряд составляют магнитуды последовательных землетрясений (порядковая нумерация). Поскольку шкала времени представлена неявно, то фактически анализируется форма огибающей ряда магнитуд, что позволяет получать своеобразную «геометрическую» характеристику ряда. На такого рода информации основывается известная методика «энергетический прогностический клин», которая предложена и развивается Сибгатулиным В.Г.

Выделение закономерностей в данных о предвестниках землетрясений является актуальной задачей, поскольку до сих пор ни один предложенный метод не может с высокой точностью определить время, место и силу землетрясений.

4.8 Атмосферные колебания температуры во время подготовки Байкальских землетрясений 2020 – 2021 гг. по спутниковым данным

Исследование посвящено изучению аномальных вариаций температуры в тропосфере во время подготовки землетрясений ($M > 4.0$), зарегистрированных с сентября 2020 г. по май 2021 г. в пределах Байкальской рифтовой зоны на основе измерений радиометра ATMS/SNPP. В результате возбуждения инфразвуковых волн в атмосфере наблюдались колебания температуры на изобарическом уровне 300 гПа. Увеличение мощности колебания температуры в тропосфере сейсмоактивного региона является следствием движения земных блоков во время сейсмических процессов. Причем это движение было неравномерным и характеризовалось толчками с периодом 96 часов или около 3 – 4 суток.

Известно, что в сейсмоактивных регионах с крупными блоковыми структурами во время подготовки землетрясения происходят медленные, но интенсивные колебания земной коры. Подобные колебания возникают, как правило, в месте пересечения разломов и имеют период от 2 до 10 (и более) дней, т.е. частота составляет 10 – 6 Гц и менее. Воздействуя на атмосферу подобно поршню большой площади, данные колебания способны генерировать инфразвуковые волны, возбуждающие сейсмогравитационные

колебания температуры и давления в тропосфере. Исследование временных вариаций этих физических характеристик позволяет получить информацию об изменениях в земной коре, связанных с геодинамическим процессом и подготовкой землетрясений.

Для изучения атмосферных возмущений над сейсмоактивным южным районом Прибайкалья использовались геофизические данные о сейсмособытиях, произошедших в исследуемый период. Согласно информации Единой Геофизической службы (ЕГС) РАН очаги Байкальских землетрясений располагались в пределах Байкальской рифтовой зоны (БРЗ), представляющей собой систему кайнозойских рифтовых впадин и окружающих их хребтов. Сведения о вертикальных профилях атмосферы получены из измерений сканера ATMS (космический аппарат SNPP), который был выведен на солнечно-синхронную приполярную орбиту 28 октября 2011 г. При движении спутника S-NPP по орбите выполняется перекрестное сканирование. Ширина полосы сканирования составляет 2300 км. Пространственное разрешение радиометра около 30 – 50 км.

Для усвоения данных разработан специализированный пакет прикладных программ, позволяющий получать значения температуры T над исследуемым районом на различных изобарических уровнях за определенный временной интервал. В дальнейшей обработке рядов T использовалась программа «Гусеница» (Caterpillar SSA), в которой реализован метод главных компонент. Выполнялось разложение рядов температуры на главные компоненты, далее из ряда T исключался тренд, после чего строились периодограмма ряда.

Выполнен анализ результатов обработки температурных рядов на уровне 300 гПа в районе Байкальских землетрясений (21.09.2020, 11.01.2021, 03.05.2021). Выделен специфический пик колебаний с периодом 92 – 96 часов, который обнаружен в моменты основных толчков Байкальских землетрясений, произошедших с сентября 2020 г. по май 2021 г. Можно предположить, что увеличение мощности колебания температуры в тропосфере сейсмоактивного региона является следствием движения земных блоков во время сейсмических процессов. Причем это движение было неравномерным и характеризовалось толчками с периодом 96 часов или около 3 – 4 суток.

4.9 Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений

За последние десятилетия исследования гравитационного поля и его аномалий с применением космических технологий существенно активизировались. Спутниковые данные позволяют на глобальном и локальном уровне с достаточной точностью

исследовать геодинамику очаговых зон сильных землетрясений. В работе для анализа сейсмоактивных районов Курило – Камчатской дуги и происходящих здесь геодинамических процессов применяются измерения, выполненные КС GRACE. Дополнительно для анализа сейсмической активности в исследуемых районах использовалась геофизическая информация, содержащаяся в каталоге USGS, за период 2006 – 2013 гг. Построены цифровые карты распределения параметра EWH относительно очаговых областей сильных землетрясений с магнитудой $M_w > 8$ для фоновых и возмущенных условий. Рассчитан модифицированный индекс аномальности и на его основе построены цифровые карты наблюдаемых гравитационных аномалий.

В ходе исследований и расчетов получены следующие результаты. Создан архив по сейсмической активности в пиковых областях сильнейших Симуширских (2006, 2007) и глубинного Охотоморского землетрясений (2013) за период 2006 – 2011 гг. и 2012 – 2013 гг., соответственно. Выявлено, что сейсмическая активность по данным USGS относительно очага Симуширского землетрясения продолжалась с июля 2006 г. по март 2009 г. Обнаружено, что в пиковой области Охотоморского землетрясения с $M_w = 8.3$ геодинамическая активность происходила с апреля 2013 г. по июль 2013 г. При проведении анализа сейсмической активности выявлено, что относительно спокойными в сейсмическом плане месяцами, то есть фоновыми, в районе Симуширского землетрясения был январь 2006 г., а в районе Охотоморского землетрясения – январь 2009 г.

Построены цифровые карты распределения EWH для фоновой и «возмущенной» геосреды относительно очаговых зон сильнейших Симуширских и Охотоморского землетрясений на основе спутниковых данных КС GRACE. Рассчитан модифицированный индекс аномальности и построены цифровые карты аномальных областей, наблюдаемых относительно областей катастрофических землетрясений с $M_w > 8$. Дальнейшее изучение выявленных аномалий, возникающих при сильных подводных землетрясениях, направлено на уточнение их параметров и оценку геометрических характеристик относительно очаговых областей изучаемых землетрясений.

5 Разработка эффективных методов решения задач безопасного функционирования природных и технических систем с учетом малых возмущений

Одно из направлений исследований в рамках проекта связано с развитием методов анализа и прогноза безопасности природных и технических систем (ПТС) на основе численных оценок возможности возникновения опасных ситуаций. Математическая модель ПТС определяется как система математических объектов (переменных величин), соответствующих элементам системы, связей и отношений между ними. Связи и отношения между математическими объектами формулируются в терминах уравнений или неравенств.

5.1 Описание функционирования математических моделей природных и технических систем как движения в пространстве состояний с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений

К анализу и оценке безопасности ПТС применяется эффективный подход, в основе которого лежат следующие понятия. Обозначим математическую модель ПТС через Σ , определим векторную функцию состояния системы $Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$, которая включает в себя компоненты, описывающие математические объекты – образы технических элементов, а также компоненты, характеризующие качество работы этой системы. Размерность вектора состояния $Y(t)$ определяется постановкой задачи. Изменение состояния физической системы с течением времени может быть названо движением или преобразованием пространства состояний. В развиваемом подходе описание изменений вектора состояний изучается с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для вектора $Y(t)$ на основе опытных данных определяется область безопасности Z_S . Опасная область F в пространстве состояний характеризуется тем, что попадание в эту область наносит непоправимый ущерб технической системе. Можно привести следующие примеры опасных областей: область резкого падения подъемной силы в результате нарушения нормальных условий обтекания крыла воздушным потоком (сваливание) при полете самолета, область выхода температуры ядерного реактора за критическую границу. При нахождении вектора в области безопасности система считается безопасной. Если хотя бы одна компонента вектора выходит за границы области безопасности, то возникает аварийная ситуация (опасное состояние). Поясняющая иллюстрация представлена на рисунке 26.

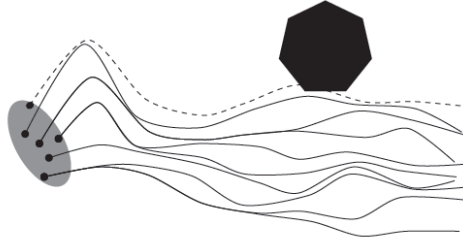


Рисунок 26 – Траектории, выходящие из множества начальных данных пространства состояний (сплошные линии), и траектория (пунктирная линия), пересекающая опасное множество

Для исследования безопасности функционирования системы необходимо с учетом влияния возмущающих или управляющих воздействий оценить динамику перехода всех траекторий математической модели

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y, u). \quad (5.1)$$

Здесь u – управляющее воздействие, которое изменяется в пределах заданного множества U допустимых входных воздействий, $y_0 \in Y_0$ – область начальных состояний системы. Во многих задачах размерность вектора воздействий меньше размерности вектора состояний. Воздействие может играть роль возмущения или управления. Множество всех возможных траекторий математической модели ПТС принимает вид:

$$\Xi(Y) = \left\{ y(t) : \forall y(t_0) \in Y_0, \forall u \in U, \forall t \geq 0 \left| \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)) \right. \right\}. \quad (5.2)$$

Проверка безопасности функционирования технической системы сводится к проверке пересечения вычисленной траектории с опасным множеством в пространстве состояний. Для определения разброса элементов, множество достижимых состояний покрывается малыми окрестностями множества траекторий. Тем самым требуется, чтобы любое достижимое состояние системы находилось на небольшом расстоянии от одной из выбранных траекторий.

Пусть существует единственное решение задачи (5.1) на интервале $[0, T]$. Требуется построить включение (определить границы включения) $G \supseteq \Xi(Y)$ множества

решений (5.2) для задачи (5.1). Проблема усложняется тем, что такие множества представляют собой достаточно сложные подобласти функционального пространства.

Включение $G \supseteq \Xi(Y)$ называется сходящимся к множеству точных решений при начальном включении (5.2), если $\forall t \in I \forall y \in Y(t) \exists y_0 \in Y: y=y(t, y_0, u)$, т.е. если решения $y(t, y_0, u)$ полностью заполняют включение G для $y_0 \in A$.

Для решения рассматриваемой задачи разработан алгоритм, состоящий из двух шагов. На первом шаге конструируется формула решения в символьном виде. На втором – строится оценка области значений этой формулы.

Работа алгоритма основывается на следующем утверждении. Предположим, что найдена точная или приближенная формула решения $y(t, y_0, u)$ математической модели управляемой системы (5.1). Тогда оценка граничных значений этой формулы $\bigcup_{u \in U} \bigcup_{y(t_0) \in Y_0} y(t, y, u)$ является оценкой области решений и может быть использована для проверки пересечения траекторий с областью безопасности. Точность оценивания граничных значений с помощью этой формулы определяется точностью применяемого численного метода и может быть в большинстве случаев вычислена явно. В тех случаях, когда оценка точности метода не может быть получена, производится регуляризация задачи.

5.2 Определение опасных границ, отделяющих области устойчивости от областей неустойчивости, возмущения которых выводят за пределы устойчивости

Исследование опасных и безопасных границ области устойчивости непосредственно связано с практической устойчивостью. Практическая или техническая устойчивость на конечном интервале времени означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий. Прямой метод Ляпунова, в котором реализуется идея «малых» отклонений решений дифференциального уравнения на промежутке времени $[0, +\infty)$ при «небольших» вариациях начальных данных этого решения, недостаточен для решения задачи практической устойчивости, так как в действительности явление или процесс обычно наблюдается на конечном интервале времени и находится под влиянием произвольных возмущений (больших или малых), для которых известны лишь границы возможных значений.

Границей, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости, является совокупность всех тех точек пространства параметров, в которых условие устойчивости

прекращает выполняться. Например, это точки, в которых хотя бы одно из неравенств, ограничивающих корни характеристического уравнения первого приближения, переходит в равенство, т.е. в этих точках границы некоторые корни являются критическими. При значениях параметров, соответствующих точкам границы, невозмущенное движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

В рамках проекта были разработаны методы построения символьных формул решений с учетом геометрических свойств множеств решений, позволяющие оценить границы множеств решений задачи (5.1) и оценить опасность нахождения вблизи этих границ. Для этого применялась формула об оценке возмущений дифференциальных уравнений Алексева – Гребнера, которая определяет соотношение между различными решениями системы (5.1) с учетом возмущений:

$$z(t) = y(t) + \int_0^t \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0, t, y_0 + s(z_0 - y_0))(z_0 - y_0) ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial y}{\partial y_0}(s, x, z(s)) \cdot g(s, z(s)) ds.$$

Также использовалось свойство инъективности оператора решения системы ОДУ, в соответствии с которым граница области начальных данных переходит в границу множества решений. При реализации метода выделяются опорная точка внутри области начальных данных и несколько точек на границе области начальных данных.

Пусть $Sym_{[0, \delta]}(t, Y_0)$ – символьная векторная формула, отражающая зависимость решения исходной системы ОДУ $y(t) = \xi(t; y_0)$ от t и от компонент вектора начальных данных y_0 , изменяющегося внутри заданной области. Тогда множество

$$W(t, Y_1^0, K, Y_n^0; U_1, \dots, U_m) = \{y(t, y_1^0, K, y_n^0, u_1, \dots, u_m) \mid y_i^0 \in Y_i^0, 0 \leq i \leq n, u_j \in U_j, j = 1, \dots, m\}$$

показывает диапазон значений функции $y(t, y_1^0, K, y_n^0, u_1, \dots, u_m)$ в области изменения переменных. Очевидно, что при выполнении условий непрерывности и непрерывной дифференцируемости символьной формулы это множество будет связным с гладкой границей. Для эффективной работы метода можно приблизить рассматриваемую область областями, заданными с помощью многогранников, параллелепипедов, многоугольников, шаров или эллипсов в n -мерном пространстве. На рисунке 27 схематически изображено множество решений, множество внутри и вокруг этого множества, изображены границы внешних включений, а также внутренних включений.

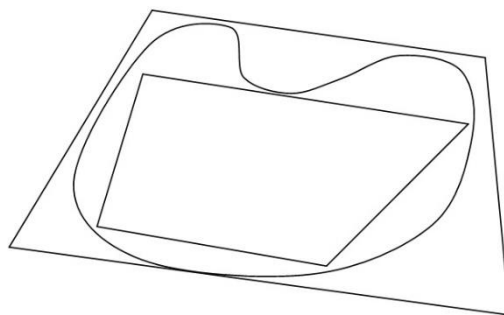


Рисунок 27 – Внешние и внутренние границы включений множества решений

5.3 Исследование свойств устойчивости множеств решений математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями

Проблема исследования устойчивости движения или некоторого состояния как способности системы сохранять текущее состояние под влиянием внешних воздействий возникает на всех этапах проектирования и исследования природных и технических систем. Впервые строгое математическое определение устойчивости и методы исследования устойчивости для широкого класса систем были даны А.М. Ляпуновым.

Принципиально новым понятием устойчивости движения является так называемая техническая устойчивость, потребность в которой вызвана инженерной практикой в области динамики машин, конструирования систем автоматического регулирования, радиотехники, ракетостроения и т.д. В отличие от классических постановок задач устойчивости движения, в реальных системах их функционирование происходит на конечном интервале времени, с начальными и постоянно действующими возмущениями, не превышающими некоторой определенной величины. Вопрос об устойчивости на конечном интервале времени возникает также для ПТС, не имеющих установившегося режима – режима, теоретически реализуемого при $t \rightarrow \infty$.

В качестве примера устойчивости на конечном интервале времени рассмотрим движение самолета, автоматически выходящего на аэродром посадки по радиоугломерной системе. Вначале траектории движения сходятся к оси взлетно-посадочной полосы и боковое отклонение уменьшается, а затем в непосредственной близости к маяку траектории принимают колебательный характер и становятся расходящимися. По Ляпунову такое поведение неустойчиво. Рассмотрим математическую модель движения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(t, y) + u(t),$$

с выделенной относительно вектора состояния линейной частью, возмущениями $u(t)$ и начальными данными, заданными условием $y(t_0) = y_0 \in Y_0$. Для этой модели можно использовать равенство, называемое формулой нелинейной вариации постоянных:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)[g(\tau, y(\tau)) + u(\tau)]d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы.

В рамках данного проекта формула вариации произвольных постоянных применялась как система интегральных уравнений. Решение системы строилось в символьном виде с помощью метода последовательных приближений:

$$y^0(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0.$$

Множество решений состоит из функций $y(t, t_0, y_0) = (y_1(t, t_0, y_0), y_2(t, t_0, y_0), \dots, y_n(t, t_0, y_0))$.

Это множество выражается так: $Y(t, t_0) = \bigcup_{y_0 \in Y_0} y(t, t_0, y_0)$.

Конструктивно можно выделить среди траекторий опорную траекторию $y(t, t_0, y_0)$ $y(t, t_0, y_0)$, всегда входящую в множество $Y(t, t_0)$ для любого $t \in T$, а также граничную траекторию $y_{bound}(t, t_0, y_0)$, такую что для любого $\varepsilon > 0$, в ε – окрестности траектории найдется точка, не принадлежащая ни одной из траекторий $Y(t, t_0)$.

5.4 Анализ математических моделей природных и технических систем, находящихся под постоянным воздействием малых возмущающих сил

Приведем пример построения области D допустимых отклонений управляемой системы, из любой точки которой в заданное время система может быть выведена в безопасный участок пространства решений. Для краткости исследуем только последний участок траектории. Состояние управляемого объекта (самолета) определяется координатами его центра масс в системе координат, связанной с Землей, углом рыскания ψ и углом крена γ . К фазовым координатам относятся также скорости изменения этих величин. Пусть ось Ox совпадает с продольной осью движения, величина z характеризует боковое уклонение центра масс самолета от оси. Управляющие воздействия

– это отклонения рулей (угол δ_δ) и руля направления (угол δ_n). Возмущения – это изменения боковой составляющей скорости ветра W_z (вертикальной W_y и продольной W_x составляющими скорости пренебрегаем).

Уравнения бокового движения самолета принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} &= a_{z\beta} \beta + a_{z\gamma} \dot{\gamma} + a_{z\delta_n} \delta_n, \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= a_{\psi\beta} \beta + a_{\psi\dot{\psi}} \dot{\psi} + a_{\psi\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + a_{\psi\delta_n} \delta_n + a_{\psi\delta_\delta} \delta_\delta, \\ \frac{d^2 \gamma}{dt^2} &= a_{\gamma\beta} \beta + a_{\gamma\dot{\psi}} \dot{\psi} + a_{\gamma\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + a_{\gamma\delta_n} \delta_n + a_{\gamma\delta_\delta} \delta_\delta.\end{aligned}$$

Здесь $\beta = \psi + \frac{\dot{z} - W_z}{V}$ – угол скольжения, т.е. угол между вектором воздушной скорости V и продольной плоскостью самолета. Коэффициенты a_{ij} определяются аэродинамическими параметрами самолета. При выборе области допустимых начальных состояний предполагалось, что управляющее воздействие по возможности увеличивает размеры области, а возмущение стремится уменьшить их. На рисунке 28 представлены границы включений областей допустимых отклонений под влиянием быстрых изменений скорости бокового ветра.

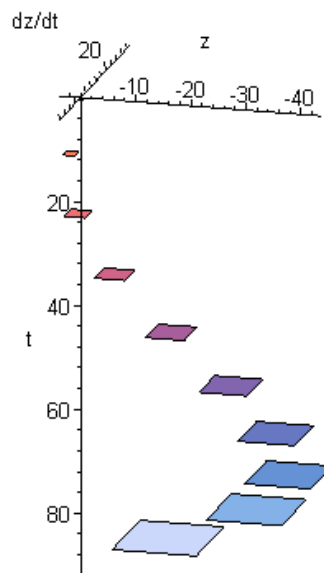


Рисунок 28 – Граница безопасности включений угла скольжения самолета

На рисунке 29 по горизонтальной оси отложено смещение центра масс самолета от линии взлетно-посадочной полосы в метрах, по вертикальной оси – скорость изменения бокового смещения в метрах в секунду.

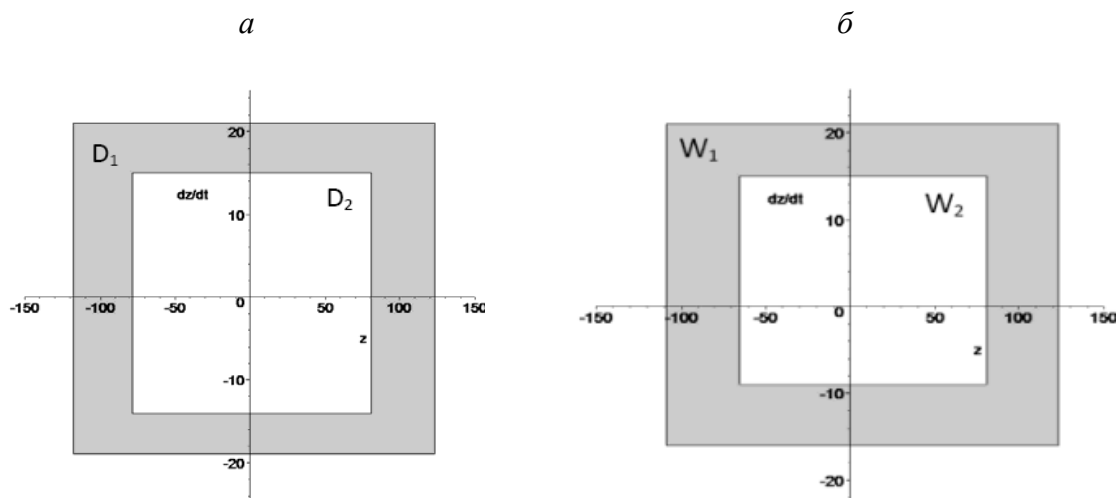


Рисунок 29 – Границы включений областей допустимых отклонений под влиянием быстрых изменений скорости бокового ветра (а), границы соответствующих данным возмущениям областей возможных отклонений (б)

Расчеты, проведенные с применением символьного метода для математической модели бокового движения самолета, позволили выделить область начальных состояний, из которой гарантируется завершение посадки с хорошими показателями качества.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 2022 году выполнен полный цикл исследований, запланированных по данному проекту. В ходе его выполнения получены результаты, приоритет которых подтверждается рейтинговыми публикациями коллектива исполнителей проекта в ведущих российских и зарубежных научных журналах.

1. Исследована структура непрерывных алгебр Ли для спецификаций сил плавучести в уравнениях Обербека – Буссинеска. Изучены классы бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру. Построены точные обобщенные функционально-инвариантные решения волнового уравнения с переменной скоростью звука.
2. Построены карты режимов течений и устойчивости в двухслойных жидкостных системах в пространстве физических параметров состояния.
3. Построены карты температурного режима в болотно-озерных ландшафтах вечной мерзлоты. Исследованы трехмерные гидродинамические режимы течений в озере Шира.
4. Разработаны расчетные методики, включающие описание алгоритмов и программ для решения квазистатических задач механики анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Построены определяющие уравнения многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластин и оболочек, учитывающие микроструктуру материала. Созданы параллельные вычислительные алгоритмы на основе метода двуциклического расщепления по пространственным переменным для решения задач динамической теории упругости. Разработаны компьютерные программы с распараллеливанием вычислений для суперкомпьютеров графической архитектуры для анализа поведения жидких кристаллов в неоднородном электрическом поле.
5. Предложены методы решения задач безопасного функционирования природных и технических систем. Проанализирован разброс элементов множеств решений, выполнена оценка областей притяжения решений и показателей Ляпунова. Разработан метод определения точек пространства параметров, в которых нарушается хотя бы один из критериев устойчивости. Разработан метод построения границ в пространстве состояний, на которых некоторые параметры являются критическими. Выполнена программная реализация методов оценки устойчивости множеств решений, определения граничных и предельных траекторий в рамках математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Bekezhanova V.B., Stepanova I.V. Evaporation convection in two-layers binary mixtures: Equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion // *Applied Mathematics and Computations*. – 2022. – V. 414. – Art. 126424.
DOI: 10.1016/j.amc.2021.126424 (WoS, Scopus, Q1; ядро РИНЦ)
2. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Ovcharova A.S. Numerical simulation of the dynamics of a locally heated bilayer system under weak evaporation // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2022. – V. 185. – Art. 122329.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122329 (WoS, Scopus, Q1; ядро РИНЦ)
3. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Theoretical analysis of the gravity impact on the parameters of flow regimes with inhomogeneous evaporation based on an exact solution of convection equations // *Microgravity Science and Technology*. – 2022. – V. 34, Iss. 5. – Art. 88. DOI: 10.1007/s12217-022-10006-z (WoS, Q3; Scopus, Q2; ядро РИНЦ)
4. Magdenko E.P. Three-dimensional non-stationary flow of two immiscible fluids in a rotating horizontal cylinder // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2022. – V. 10, Iss. 3. – P. 1–16. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2022045623
(WoS; Scopus, Q2; ядро РИНЦ)
5. Aksenov A.V., Druzhkov K.P., Kaptsov O.V. Application of invariants of characteristics to construction of solutions without gradient catastrophe // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2022. – V. 147. – Art. 104249. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104249
(WoS, Q2; Scopus, Q1)
6. Pelinovsky E., Kaptsov O. Traveling waves in shallow seas of variable depths // *Symmetry*. – 2022. – V. 14, Iss. 7. – Art. 1448. DOI: 10.3390/sym14071448. (WoS, Scopus, Q2; ядро РИНЦ)
7. Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kaptsov O.V., Schmidt A.V. Dynamics of passive scalar in swirling turbulent far wakes // *Journal of Engineering Thermophysics*. – 2022. – V. 31, Iss. 3. – P. 512–521. DOI: 10.1134/S1810232822030122 (WoS, Scopus, Q3)
8. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Mathematical modeling of inhomogeneous electric field impact on a liquid crystal layer // *ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik / Journal of Applied Mathematics and Mechanics)*. – 2022. – Art. e202200248 (Early View). DOI: 10.1002/zamm.202200248 (WoS, Scopus, Q2; ядро РИНЦ)

9. Andreev V.K., Uporova A.I. On a spectral problem for convection equations // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2022. – V. 15, Iss. 1. – P. 88–100. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-1-88-100 (WoS; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
10. Andreev V. K., Latonova L.I. Solution of the linear problem of thermal convection in liquid rotating layer // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2022. – V. 15, Iss. 3. – P. 273–280. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-3-273-280 (WoS; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
11. Kaptsov O.V. Some solutions of the Euler system of an inviscid incompressible fluid // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2022. – V. 15, Iss. 5. – P. 672–678. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-672-678 (WoS; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
12. Stepanova I.V. On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2022. – V. 15, Iss. 6. – P.776–784. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-6-776-784 (WoS; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
13. Petrakov I. Modeling the bending of a multilayer composite plate with a rigid stamp // AIP Conference Proceedings. – 2022. – V. 2522, Iss. 1. – Art. 080004. DOI: 10.1063/5.0101137 (WoS, Scopus)
14. Smolekho I.V., Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Numerical solution of equations describing the action of electric field on a liquid crystal // AIP Conference Proceedings. – 2022. – V. 2522, Iss. 1. – Art. 080007. DOI: 10.1063/5.0100758 (WoS, Scopus)
15. Efimov E.A., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Numerical modeling of the seismic wavefields in viscoelastic soils under pulse impact // AIP Conference Proceedings. – 2022. – V. 2522, Iss. 1. – Art. 110003. DOI: 10.1063/5.0100823 (WoS, Scopus)
16. Lemeshkova E.N. Two-dimensional thermocapillary fluid motion in an open channel // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2022. – V. 41. – P. 121–130. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.41.121 (ядро РИНЦ)
17. Senashov V.I., Paraschuk I.A. On recognizing groups by the bottom layer // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2022. – V. 107, Iss. 3. – P. 124–131. DOI: 10.31489/2022M3/124-131 (ядро РИНЦ)
18. Пелиновский Е.Н., Капцов О.В. Бегущие волны в недиспергирующих сильно неоднородных средах // Доклады РАН. – 2022. – Т. 506, № 2. – С. 46–51. DOI: 10.31857/S2686740022070082 (ядро РИНЦ)

19. Андреев В.К., Вахрамеев И.В., Магденко Е.П. Тепловая конвекция во вращающейся трубе // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, № 2. – С. 5–20. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.25.201 (ядро РИНЦ)
20. Андреев В.К., Лемешкова Е.Н. Двухслойное стационарное ползущее термокапиллярное течение в трехмерном канале // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 1. – С. 97–104. DOI: 10.15372/PMTF20220113 (ядро РИНЦ)
21. Киреев И.В., Новиков А.Е., Новиков Е.А. Построение областей абсолютной устойчивости методом Бернулли // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2022. – Т. 25, № 4. – С. 417–428. DOI: 10.1134/S1995423922040073 (ядро РИНЦ)
22. Петраков И.Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учетом различных модулей упругости при растяжении и сжатии // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, № 4. – С. 153–163. DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.412 (ядро РИНЦ)
23. Белолипецкий В.М., Генова С.Н. Гидротермика Абаканской протоки на р. Енисее: математическая модель, численные эксперименты // Гидротехническое строительство. – 2022. – № 10. – С. 37–44. (ядро РИНЦ)
24. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Two-Layer Steady Creeping Thermocapillary Flow In a Three-Dimensional Channel // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics – 2022. – Vol.63, Iss.1 – P. 82-88. DOI: 10.1134/S0021894422010138 (WoS, Scopus)
25. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Thermodiffusion effects in a two-phase system with the thermocapillary deformable interface exposed to local heating // International Journal of Multiphase Flow. – 2022. – Vol.152. – Art.104080. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2022.104080 (WoS, Scopus)
26. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2022. – Vol.29, Iss.21. – P.3147-3162. DOI: 10.34219/2078-8320-2022-13-4-12-17 (WoS, Scopus)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом

1. Авторы: Капцов Олег Викторович
Докладчик: Капцов Олег Викторович
Название доклада: Some solutions of the Euler system of an inviscid incompressible fluid
Название конференции: Modern Achievements in Symmetries of Differential Equations (Symmetry 2022)
Место проведение конференции: Suranaree University of Technology Nakhon Ratchasima, Thailand (a hybrid conference)
2. Авторы: Рогалев Алексей Николаевич
Докладчик: Рогалев Алексей Николаевич
Название доклада: Numerical Estimation of the Boundaries of the Reachability Sets of Controlled Systems Based on Symbolic Formulas
Название конференции: 7-я Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи»
Место проведение конференции: г. Иркутск, Россия
3. Авторы: Кочнев Владимир Алексеевич, Вальчак Владимир Иванович
Докладчик: Кочнев Владимир Алексеевич
Название доклада: Комплексная обработка и интерпретация сейсмических и гравиметрических данных в Восточной Сибири с применением СГ-технологии
Название конференции: 48-е заседание Международного научного семинара им. Д.Г. Успенского – В.Н. Страхова «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей»
Место проведение конференции: г. Санкт-Петербург, Россия
4. Авторы: Бекежанова Виктория Бахытовна, Гончарова Ольга Николаевна
Докладчик: Бекежанова Виктория Бахытовна
Название доклада: Термокапиллярная конвекция в двухфазной системе с испарением
Название конференции: XII Международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и

фундаментальная информатика» (ПМиФИ 2022), посвященная 110-летию со дня рождения академика РАН Л. В. Канторовича

Место проведение конференции: г. Омск, Россия

5. Авторы: Степанова Ирина Владимировна

Докладчик: Степанова Ирина Владимировна

Название доклада: О конвективных течениях бинарной смеси в тонком горизонтальном канале с неоднородным нагревом

Название конференции: XII Международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика» (ПМиФИ 2022), посвященная 110-летию со дня рождения академика РАН Л. В. Канторовича

Место проведение конференции: г. Омск, Россия

6. Авторы: Ефимова Марина Викторовна

Докладчик: Ефимова Марина Викторовна

Название доклада: О решении трехмерной задачи конвекции в двухслойной системе жидкостей

Название конференции: XII Международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика» (ПМиФИ 2022), посвященная 110-летию со дня рождения академика РАН Л. В. Канторовича

Место проведение конференции: г. Омск, Россия

7. Авторы: Андреев В.К., Вахрамеев И.В., Магденко Е.П.

Докладчик: Андреев В.К.

Название доклада: Тепловая конвекция жидкости во вращающейся цилиндрической трубе

Название конференции: LXXV Герценовские чтения: Международная научная конференция "Современные проблемы математики и математического образования"

Место проведение конференции: г. Санкт-Петербург, Россия

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности, зарегистрированных в 2022 году

1. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2022682529 «Программа на языке Фортран DVMH для суперкомпьютерного решения стохастических дифференциальных уравнений, описывающих трехмерные движения ионных частиц с мультипликативным шумом». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Автор: Каменщиков Л. П. Дата гос. регистрации: 24.11.2022.
2. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2022665584 «Расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с учетом разномодульности». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Автор: Петраков И. Е. Дата гос. регистрации: 18.08.2022.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2022 год, утвержденная
государственным заданием

Содержание работы (описание задач)	Планируемый результат выполнения работы
<p>1. Анализ определяющих уравнений трехмерных систем Обербека – Буссинеска с нелинейной силой плавучести. Изучение экспоненциального отображения для группы диффеоморфизмов, сохраняющих площадь. Нахождение классов бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру. Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в две константы. Построение приближенного решения, описывающего течение в дальнем безымпульсном турбулентном следе.</p>	<p>1. Структура непрерывных алгебр Ли для полученных спецификаций сил плавучести. Классы бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру. Классы точных обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения.</p>
<p>2. Аналитическое и численное исследование течений в двухслойных системах и анализ их устойчивости. Классификация режимов, определение критических характеристик устойчивости, анализ влияния определяющих параметров на устойчивость и сценарии поведения возмущений.</p>	<p>2. Карты режимов течений и устойчивости в двухслойных системах в пространстве физических параметров.</p>
<p>3. Изучение динамики вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры</p>	<p>3. Карты температурного режима в болотно-озерных ландшафтах вечной мерзлоты. Трехмерные гидродинамические режимы в озере Шира.</p>

<p>поверхностного слоя в летний период в рамках одномерной в вертикальном направлении математической модели. Разработка трехмерной модели экосистемы озера Шира.</p>	
<p>4. Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов при квазистатическом нагружении. Оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры на основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды. Разработка математических моделей для анализа деформационных процессов в многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластинах и оболочках. Построение эффективных параллельных вычислительных алгоритмов, обладающих свойством монотонности, для решения динамических задач. Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями.</p>	<p>4. Расчетные методики, включающие описание алгоритмов и программ для решения квазистатических задач механики анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов. Результаты апробации методик при решении инженерных задач. Определяющие уравнения многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластин и оболочек, учитывающие микроструктуру материала. Параллельные вычислительные алгоритмы, основанные на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Компьютерные программы с распараллеливанием вычислений для суперкомпьютеров графической архитектуры.</p>
<p>5. Разработка эффективных методов решения задач безопасного функционирования природных и технических систем с учетом малых возмущений. Описание их функционирования как движения в пространстве состояний с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Определение опасных границ,</p>	<p>5. Методы решения задач безопасного функционирования природных и технических систем. Численная оценка не изменяющихся множеств решений, наибольших для поставленной задачи. Вычисление разброса элементов этих множеств, оценка областей притяжения решений и показателей Ляпунова. Метод определения точек пространства</p>

<p>отделяющих области устойчивости от областей неустойчивости, возмущения которых выводят за пределы устойчивости. Исследование свойств устойчивости множеств решений математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями. Анализ реальных природных и технических систем, находящихся под постоянным воздействием малых возмущающих сил.</p>	<p>параметров, в которых нарушается хотя бы один из критериев устойчивости. Метод построения границ, на которых некоторые параметры являются критическими. Программная реализация методов оценки устойчивости множеств решений, определения граничных и предельных траекторий математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями.</p>
---	--

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Количественные показатели проекта, утвержденные государственным заданием, за весь период выполнения проекта по годам

Наименование показателя	Ед. измерения	Всего за 2022 г.
Публикации (типа article и review) в научных журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science Core Collection и (или) Scopus)	единиц	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)
Прочие публикации в научных журналах, входящих в ядро РИНЦ	единиц	17
Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом	единиц	7
Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности	единиц	2