

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»  
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958

Рег. № НИОКТР 121081900118-2

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН  
чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А. А. Шпедт

«\_\_\_\_\_» января 2024 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕД  
С ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА В ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(заключительный)

Направление фундаментальных исследований  
1.1.3. Математическое моделирование  
(№ FWES-2021-0002)

Руководитель НИР

главный научный сотрудник

член-корреспондент РАН

\_\_\_\_\_ В. М. Садовский

Красноярск 2024

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы гл. науч. сотр., член-корреспондент РАН Исполнители:	<hr/> (подпись, дата)	В. М. Садовский (Раздел 4)
зав. отд., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	В. Б. Бекежанова (Разделы 1, 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	В. К. Андреев (Разделы 1, 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	В. М. Белолипецкий (Раздел 3)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	Е. А. Новиков (Раздел 5)
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	О. В. Капцов (Раздел 1)
вед. науч. сотр., д-р техн. наук	<hr/> (подпись, дата)	В. А. Кочнев (Раздел 5)
вед. науч. сотр., д-р техн. наук	<hr/> (подпись, дата)	К. В. Симонов (Раздел 5)
ст. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	В. И. Сенашов (Раздел 1)
ст. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	И. В. Степанова (Раздел 1)
ст. науч. сотр., канд. техн. наук	<hr/> (подпись, дата)	С. Н. Генова (Раздел 3)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	И. В. Киреев (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	А. Н. Рогалев (Раздел 5)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	О. В. Садовская (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	А. В. Шмидт (Раздел 1)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	<hr/> (подпись, дата)	М. В. Ефимова (Разделы 1, 2)

науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Е. Н. Лемешкова (Разделы 1, 2)
	(подпись, дата)	
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Е. П. Магденко (Разделы 1, 2)
	(подпись, дата)	
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Ю. В. Шанько (Раздел 1)
	(подпись, дата)	
мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	О. С. Володько (Раздел 3)
	(подпись, дата)	
мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	И. В. Смолехо (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
ст. инж.	_____	Н. Ф. Ильина (Раздел 2)
	(подпись, дата)	
ст. инж.	_____	Е. И. Калмыкова (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
инж.	_____	Е. А. Ефимов (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
инж.	_____	И. Е. Петраков (Раздел 4)
	(подпись, дата)	
нормоконтроль	_____	А. В. Вяткин
	(подпись, дата)	

Отчет 82 с., 35 рис., 5 прил.

## РЕФЕРАТ

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГИДРОДИНАМИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Объектом исследования по теме проекта являются процессы, происходящие в природных и технических системах с границами раздела.

Цель исследований состоит в развитии методов математического и численного моделирования задач с поверхностями раздела на основе неклассических моделей механики сплошных сред: разработка новых нелинейных математических моделей, построение и исследование точных решений; анализ их устойчивости; разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ для решения фундаментальных и прикладных задач; выработка рекомендаций по аспектам функционирования технических объектов и природных систем.

Заключительный отчет содержит описание результатов выполнения темы проекта в 2021–2023 гг. На этапе 2021 года разработан комплекс программ для расчета и визуализации движений жидкости с деформируемыми границами; построены новые автомодельные решения уравнений полуэмпирических моделей турбулентного слоя смещения, новые решения интегрируемых моделей Буссинеска, новые классы точных решений уравнения неоднородной акустики; выполнена групповая классификация нелинейных уравнений теплопереноса, на основе которой получены новые точные решения. Проведена серия прогнозных расчетов для течений в соленых озерах типа оз. Шира на основе трехмерной модели. Создан программный модуль для прогноза глубины оттаивания и составления карт температурного режима в районах вечной мерзлоты. Построена математическая модель нестационарного поведения жидкого кристалла под действием слабых механических, температурных возмущений и воздействия электрическим полем. На ее основе разработана вычислительная технология, включающая в себя параллельные алгоритмы и компьютерные программы. Получены результаты моделирования эффекта Фредерикса в рамках уравнений динамики жидкого кристалла. Разработаны вычислительные алгоритмы и компьютерные программы для решения статических задач. В области геодинамики и геофизики получены результаты моделирования данных наблюдений природных катастроф и пространственно-временные зависимости на основе спутниковых данных о гравитационных аномалиях Земли. Получены результаты статистического сравнительного анализа изменений параметра

EWN (Equivalent Water Height – эквивалентной высоты воды) для акваторий Мирового океана по наблюдениям миссии GRACE и новой миссии GRACE-FO.

На этапе 2022 года исследована структура непрерывных алгебр Ли для полученных спецификаций сил плавучести. Построены классы бесконечномерных групп Ли, допускающих каноническую структуру, и классы точных обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения. Построены карты режимов течений и устойчивости в двухслойных системах в пространстве физических параметров. Построены карты температурного режима в болотно-озерных ландшафтах вечной мерзлоты. Исследованы трехмерные гидродинамические режимы в озере Шира. Созданы расчетные методики, включающие описание алгоритмов и программ для решения квазистатических задач механики анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов. Проведена апробация методик при решении инженерных задач. Построены определяющие уравнения многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластин и оболочек, учитывающие микроструктуру материала. В задачах динамики пластин разработаны параллельные вычислительные алгоритмы, основанные на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным, и компьютерные программы с распараллеливанием вычислений для суперкомпьютеров графической архитектуры. В рамках работ по научному направлению, связанному с методами решения задач безопасного функционирования природных и технических систем, построена численная оценка не изменяющихся множеств решений, наибольших для поставленной задачи. Вычислен разброс элементов этих множеств, получена оценка областей притяжения решений и показателей Ляпунова. Разработан метод определения точек пространства параметров, в которых нарушается хотя бы один из критериев устойчивости. Разработан метод построения границ, на которых некоторые параметры являются критическими. Выполнена программная реализация методов оценки устойчивости множеств решений, определения граничных и предельных траекторий математических моделей природных и технических систем с возмущающими и управляющими воздействиями.

В 2023 году получены следующие новые результаты. В рамках новых постановок начально-краевых задач построены точные решения, описывающие движения жидких сред с границей раздела в условиях приложенной распределенной тепловой нагрузки. Развита теория новых линейных определяющих уравнений применительно к задачам механики жидкости. Построены классы точных обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения. Получено приближенное решение в задаче о свободной осесимметричной турбулентной струе. Реализованы программы для расчета

конвективных режимов в системах разной геометрии и вычисления пороговых характеристик устойчивости, построены карты режимов устойчивости 2D и 3D конвективных течений. Выполнено моделирование годового хода температуры вечной мерзлоты в зимний и летний периоды в болотно-озерных ландшафтах. Исследованы гидродинамические режимы глубоководных водоемов. Разработаны математические модели для описания зарождения и продвижения трещин в межблочных прослойках на основе локального и интегрального критериев трещинообразования. Созданы вычислительные алгоритмы и программы, реализующие эти модели на многопроцессорных системах кластерной архитектуры. Проведены расчеты распространения системы трещин по мере прохождения волн нагружения в блочном массиве горных пород. По направлению геомониторинга усовершенствована вычислительная технология вероятностного анализа сейсмической опасности, разработано алгоритмическое и программное обеспечение для расчета параметров модели сейсмического воздействия. Получены результаты исследования моделей в задачах сейсмического мониторинга природных и технических объектов.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	10
1. Построение точных и приближенных решений уравнений гидродинамики.....	12
1.1. Точные решения уравнений термоконцентрационной конвекции. Апробация различных типов граничных условий для функции температуры.....	12
1.2. Построение и анализ точных решений подмоделей конвекции.....	15
1.3. Теория новых линейных определяющих уравнений применительно к задачам механики жидкости.....	20
1.3.1. Аналитические методы построения решений уравнений с частными производными .....	20
1.3.2. Приближенное решение задачи о свободной осесимметричной турбулентной струе.....	21
1.3.3. Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в три константы.....	21
2. Анализ устойчивости гидродинамических течений с поверхностями раздела.....	21
2.1. Устойчивость нестационарных двухслойных течений.....	21
2.2. Устойчивость двухфазного стратифицированного течения с испарением.....	23
2.3. Возбуждение конвекции в двухслойной системе при локальной тепловой нагрузке.....	25
3. Численное моделирование гидродинамических и температурных режимов в водоемах с учетом слоистой структуры несущей фазы.....	28
3.1. Анализ динамики годового термического режима вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя.....	29
3.2. Изучение динамики течений глубоководных водоемов.....	30
4. Математическое и численное моделирование в задачах механики деформируемых сред.....	35
4.1. Разработка и алгоритмическая реализация математических моделей зарождения и развития трещин в прослойках блочной среды.....	35
4.1.1. Моделирование деформации блоков и прослоек.....	36
4.1.2. Моделирование трещинообразования.....	37
4.1.3. Контактное взаимодействие берегов трещин.....	38
4.2. Построение эффективных параллельных вычислительных алгоритмов, обладающих свойством монотонности, для решения динамических задач.....	38

4.2.1. Алгоритмическая и программная реализация модели блочной среды.....	38
4.2.2. Разработка вычислительных алгоритмов для анализа волновых процессов в вязкоупругих средах.....	40
4.3. Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов при квазистатическом нагружении.....	41
4.3.1. Методы расчета разномодульных многослойных пластин из волокнистых композитов.....	41
4.3.2. Оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры на основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды.....	43
4.3.3. Математическое моделирование деформационных процессов в многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластинах и оболочках.....	44
4.4. Численное моделирование жидких кристаллов под действием слабых термомеханических и электрических возмущений.....	45
4.4.1. Математическая модель холестерического жидкого кристалла.....	45
4.4.2. Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями.....	48
5. Оценка сейсмической опасности и методы сейсмического районирования.....	53
5.1. Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности: разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия.....	53
5.1.1. Разработка алгоритмов для построения графиков повторяемости землетрясений...	53
5.1.2. Применение космоснимков в задаче сейсмического районирования.....	55
5.1.3. Анализ физических характеристик (амплитуды колебаний и спектры реакции грунта) от землетрясений для Байкальской рифтовой зоны.....	57
5.1.4. Разработка алгоритмов и программных модулей для обработки записей землетрясений сильных региональных землетрясений.....	58
5.2. Методы выделения предвестников землетрясений.....	58
5.2.1. Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учетом влияния внешних геодинамических факторов.....	58
5.2.2. Выявление и анализ триггерных механизмов возникновения сильных землетрясений в системе Земля – Луна.....	60
5.3. Космическая система GRACE и геодинамические процессы.....	61



5.3.1. Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений.....	61
5.3.2. Анализ сейсмоактивных районов Курило-Камчатской дуги и происходящих геодинамических процессов на основе измерений, выполненных КС GRACE.....	62
5.3.3. Разработка и тестирование методики сравнительного анализа и интерпретации измерений, полученных космической системой (КС) GRACE.....	63
5.4. Эффекты в атмосфере и сейсмичность.....	69
5.4.1. Анализ дополнительных факторов и эффектов взаимодействия литосферно-атмосферных процессов.....	69
5.4.2. Атмосферные колебания температуры во время подготовки Байкальских землетрясений 2020–2021 гг. по спутниковым данным.....	70
5.4.3. Исследования средствами ДЗЗ очаговых зон сильных региональных (Байкальских) землетрясений.....	72
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	73
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	75
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	78
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	80
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	81
ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	82

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий отчет является заключительным по теме «Математическое моделирование поведения неидеальных сред с границами раздела в природных и технических системах» за 2021–2023 годы.

Проведенные исследования соответствуют приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: «а» переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта; «б» переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии.

Тематика отчета соответствует научному направлению Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021–2030 годы) по разделу «1.1.3.7. Моделирование в задачах создания промышленных производств, аэрокосмической техники, машиностроения, разведки, добычи и транспортировки углеводородного сырья, атомной энергетики, робототехники и вычислительной техники. Разработка моделей и методов решения соответствующих математических задач в механике, учитывающих нелинейные свойства сред, большие деформации, реологические и теплофизические свойства, оценку отклика после снятия нагрузки и др. Математическое моделирование новых материалов (композитных, наноматериалов, полупроводниковых гетероструктур и др.)». В рамках этого направления задачи механики с границами раздела являются предметом интенсивного изучения в России и за рубежом. Подобного рода задачи возникают в химической и пищевой промышленности, металлургии, материаловедении, гидрофизике, экологии, геофизике. Достаточно упомянуть процессы термостабилизации энергетических установок, получения покрытий с заданными функциональными характеристиками, электрофореза, динамики вечной мерзлоты, поведения геологических разломов и жидких кристаллов, сохранения качеств водных и воздушных масс. Более точный учет различных факторов, влияющих на такие процессы, требует привлечения новых математических моделей и постановок краевых задач.

В отчетный период 2023 года исследования проводились по пяти направлениям:

1. Выбор интегрируемых подмоделей трехмерной системы конвекции. Разработка теории новых линейных определяющих уравнений и ее применение к задачам механики жидкости.

2. Анализ устойчивости двухслойных 2D и 3D течений, описывающих теплообмен в различных системах. Классификация режимов неустойчивости, определение критических характеристик устойчивости.

3. Анализ динамики годового термического режима вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя в рамках одномерной в вертикальном направлении математической модели. Изучение динамики течений глубоководных водоемов.

4. Разработка и алгоритмическая реализация математических моделей зарождения и развития трещин в прослойках блочной среды. Программная реализация моделей блочной среды с реологически сложными прослойками.

5. Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности, разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия. Исследование модели в задачах сейсмического мониторинга природных и технических объектов.

Полученные в 2023 году результаты соответствуют поставленным целям и задачам. Качество результатов находится на мировом уровне по оценке новизны, оригинальности, значимости и точности. Это подтверждается публикациями в ведущих научных журналах по направлениям проекта, индексируемых в международных наукометрических базах, в других рейтинговых журналах. При выполнении планов проекта использовались современные методы и технологии исследований. Построенные математические модели процессов и явлений соответствуют принятому в мире уровню полноты и точности описания.

Результаты, изложенные в отчете, являются фундаментальными и могут служить основой для дальнейших исследований по тематике проекта. Практическое использование проведенных исследований возможно: а) при разработке средств контроля, оптофлюидных элементов и микрофлюидных платформ для систем полного анализа, создания покрытий с заданными функциональными свойствами, модификации систем жидкостного охлаждения; б) при оценке влияния погодных условий на толщины мерзлых и талых слоев в условиях Крайнего Севера; в) для анализа распределения биопланктона в озере Шира; г) для инженерных расчетов элементов конструкций из композитных

материалов; д) для установления связей глобальных геодинамических и геофизических процессов с катастрофическими сейсмическими событиями.

В тексте отчета приведены основные результаты (с иллюстрациями), полученные в ходе выполнения проекта с 2021 по 2023 гг. Результаты 2021 и 2022 гг. описаны в краткой форме. Более подробно они были представлены в соответствующих промежуточных отчетах по данной теме.

## **1. Построение точных и приближенных решений уравнений гидродинамики**

### **1.1. Точные решения уравнений термоконвекционной конвекции. Апробация различных типов граничных условий для функции температуры**

В отчетный период 2021–2023 гг. изучен ряд задач конвекции, включая конвекцию в двухфазных системах с испарением, с целью выделения корректных постановок, позволяющих построить точные решения, которые могут быть применены для описания процессов тепло- и массообмена в реальных жидкостных системах, в том числе в условиях фазовых переходов жидкость – пар. Установлены существование и единственность решения обратной задачи об определении неизвестной функции источника при краевых условиях второго рода. Проведена апробация граничных условий для задач описания течений бинарной смеси и совместных течений жидкости и газопаровой смеси в горизонтальных каналах. Показано, что в первом случае решение в конечных формулах можно построить только при задании линейного температурного распределения на обеих стенках канала. Для указанной постановки получено точное решение уравнений Обербека – Буссинеска, посредством которого изучено влияние толщины канала, интенсивности расхода и действия поля массовых сил на характеристики течения. Проанализировано влияние тепловой нагрузки, распределенной неравномерно на стенках канала, на процесс термодиффузионного разделения бинарной жидкой смеси на компоненты при нестационарном и установившемся течении. Предложены способы управления разделением смеси посредством неоднородного периодического по времени нагрева подложки. В задаче о двухслойных течениях жидкость – газопаровая смесь изучено влияние граничных режимов для функций температуры и концентрации пара на параметры течений и режимы фазовых переходов. Определен диапазон значений параметров, характеризующих интенсивность внешней тепловой нагрузки, в котором решение позволяет получить физически правдоподобные результаты.

При математическом моделировании тепломассообмена, сопровождающегося фазовыми переходами в многокомпонентных системах с границами раздела, для описания

течения каждой из сред может использоваться точное решение уравнений термодиффузионной конвекции, которое определяет функции скорости, давления, температуры, концентрации легкого компонента следующим образом:

$$\mathbf{u} = \alpha(u(y), 0, 0), \quad p = -a(y)x + b(y), \quad \theta = \alpha x^2 + \beta(y)x + \gamma(y), \quad c = -a_y x + b_y - \theta, \quad (1)$$

где функции  $u(y)$ ,  $a(y)$ ,  $b(y)$ ,  $\beta(y)$ ,  $\gamma(y)$  подлежат определению,  $\alpha \neq 0$  – постоянная. Следует отметить, что решение вида (1) можно построить только для уравнений, описывающих течение неоднородных по составу смесей. В случае течения гомогенной жидкости решение вида (1) не существует. Течение, описываемое решением (1), может возникать в центральной части горизонтального протяженного канала, ограниченного твердыми стенками  $y = -h_1$ ,  $y = h_2$ . Канал заполнен жидкой бинарной смесью, контактирующей с парогазовой двухкомпонентной средой, состоящей из испаряющегося из нижнего слоя компонента и инертного газа, подающегося в канал с некоторой постоянной скоростью.

После определения всех искомым функций встает вопрос об апробации построенного решения для описания режимов конвективных течений с фазовым переходом. Одним из важных этапов анализа является исследование влияния режимов тепловой нагрузки, приложенной на стенках канала, на характеристики течений. Стенки могут нагреваться или быть теплоизолированными, тем самым для функции температуры могут быть поставлены четыре вида граничных условий:

– условия Дирихле: на обеих стенках  $y = -h_1$ ,  $y = h_2$  задано распределение температуры  $\theta^{l,u} = \theta_0^{l,u} x^2 + \theta_1^{l,u} x + \theta_2^{l,u}$ , где символы  $l, u$  обозначают величины, заданные на нижней и верхней стенке, соответственно;

– условия Неймана: на обеих стенках  $y = -h_1$ ,  $y = h_2$  заданы условия отсутствия потока тепла  $\partial \theta^{l,u} / \partial y = 0$ ;

– смешанные условия: на одной из стенок ставится условие Дирихле, на другой – условие Неймана.

Кроме того, на стенках канала считаются выполненными условия прилипания для функций скорости и отсутствия потока вещества через стенки для функции концентрации. На границе раздела фаз постулируются равенства скоростей, температур, баланс концентраций; задаются кинематическое и динамическое условия, равенство потоков вещества. В условиях теплового баланса учитываются затраты энергии на диффузионное испарение. Анализ возможных постановок краевых задач показал, что полное определение всех постоянных интегрирования возможно при использовании условий Дирихле (при этом обязательным требованием является  $\theta_0^l = \theta_0^u$ ) и смешанных условий

обоих типов для функций температуры. Если обе стенки считаются теплоизолированными (условия Неймана), то необходимы дополнительные условия для построения решения в замкнутой форме.

Чтобы показать применимость построенного решения задачи с условиями Дирихле для функции температуры, исследовано влияние толщин жидкого и газового слоев на структуру течения и интенсивность испарения. Последнее характеризуется величиной  $M$ , имеющей смысл массовой скорости испарения. В качестве рабочей жидкости выбрана смесь этанола (70 %) и воды (30 %), за характерную температуру принимается величина  $\theta_2^l = 20$  °С. Представленные рисунки построены для характеристик, выраженных в безразмерных параметрах, нижняя стенка считается более нагретой, чем верхняя. В качестве линейного масштаба в каждом слое выбрана своя толщина. На рисунках 1, 2 показаны профили скорости (*а*), концентрации в сечении  $x = 10$  (*б*) и массовой скорости испарения (*в*) в зависимости от толщины слоя жидкой бинарной смеси (рисунок 1) и газопаровой двухкомпонентной смеси (рисунок 2).

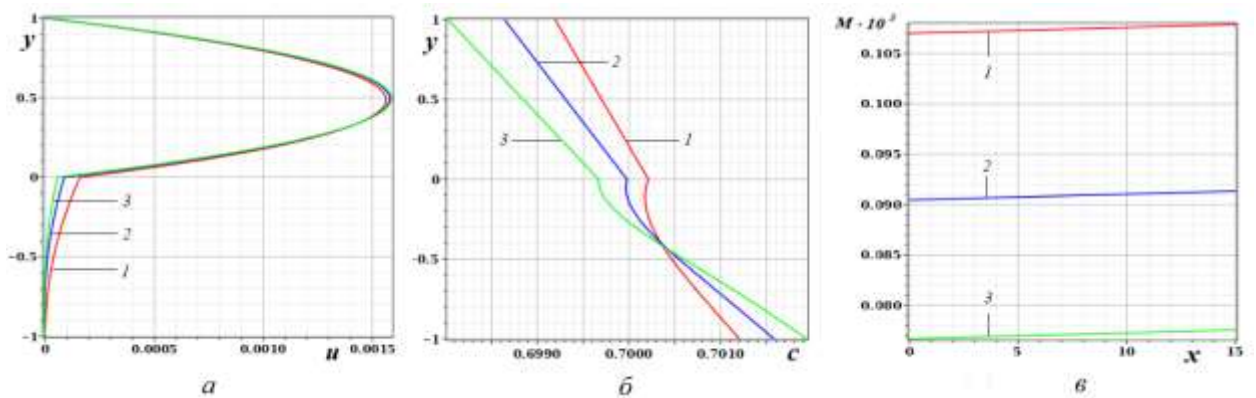


Рисунок 1 – Функция скорости (*а*), функция концентрации в сечении  $x = 10$  (*б*), массовая скорость испарения на границе раздела (*в*) в зависимости от толщины жидкого слоя:

$$1 - h_1 = 0.0015 \text{ м}, 2 - h_1 = 0.0020 \text{ м}, 3 - h_1 = 0.0025 \text{ м}$$

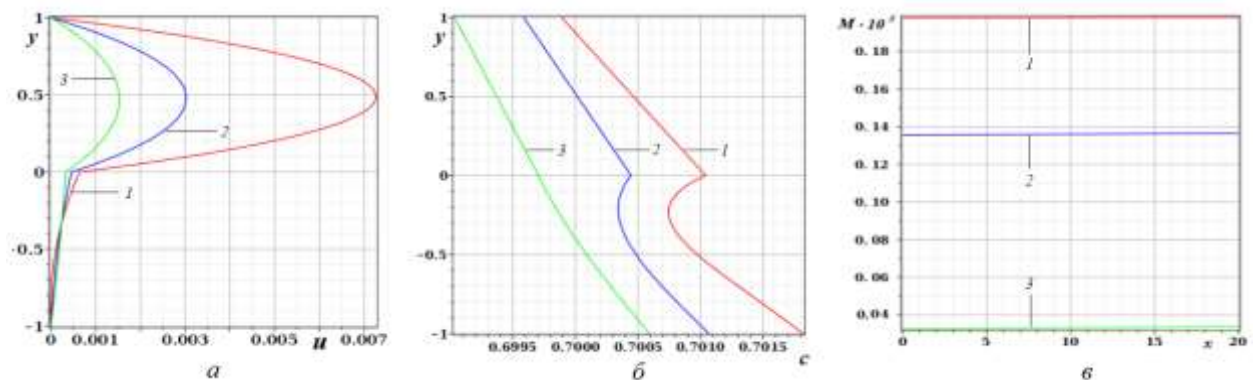


Рисунок 2 – Функция скорости (*а*), функция концентрации в сечении  $x = 10$  (*б*), массовая скорость испарения на границе раздела (*в*) в зависимости от толщины газопарового слоя:

$$1 - h_2 = 0.003 \text{ м}, 2 - h_2 = 0.004 \text{ м}, 3 - h_2 = 0.005 \text{ м}$$

С увеличением толщины слоя может значительно снижаться интенсивность течения, при этом во втором слое кинематические характеристики слабо реагируют на эти изменения (см. рисунки 1, *a* и 2, *a*). В окрестности границы раздела  $y = 0$  возникает выраженный минимум концентрации (см. рисунки 1, *б* и 2, *б*) вследствие возрастающей интенсивности испарения (см. рисунки 1, *в* и 2, *в*). Необходимо подчеркнуть, что построенное решение корректно описывает термокапиллярный и термодиффузионный эффект: вдоль границы раздела жидкость движется в сторону уменьшения температуры, а концентрация более легкого по плотности компонента выше вблизи более нагретой стенки.

## 1.2. Построение и анализ точных решений подмоделей конвекции

В 2021–2023 гг. в рамках моделей термоконцентрационной конвекции, построенных на основе приближения Обербека – Буссинска, исследованы особенности конвекции в двухслойных системах жидкость – жидкость и жидкость – бинарная смесь. Анализ характеристик конвективных режимов выполнен с помощью точных решений определяющих уравнений, имеющих специальный вид. Построенные точные решения позволяют учесть вклад изменений внутренней энергии поверхности, разделяющей среды с различными физическими свойствами, в условии теплового баланса при переходе через эту границу. Указанному эффекту соответствует дополнительный параметр  $E$ , который является коэффициентом пропорциональности в нелинейном энергетическом условии. Для  $E > 0$  и ползущих стационарных совместных течений (линейные задачи) найдено аналитическое решение в виде полиномов, форма которого допускает существование двух различных наборов значений параметров, определяющих два разных решения. Нелинейные задачи с базисными функциями в виде смещенных полиномов Лежандра решены тау-методом.

*Задача 1. Начально-краевые задачи трехмерной конвекции двухслойной системы между неподвижными пластинами.* В рамках трехмерных постановок проведено исследование течений в системах жидкость – жидкость и жидкость – бинарная смесь с общей поверхностью раздела в зазоре, ограниченном твердыми стенками. В качестве математической модели использовались уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, дополненные уравнениями тепло- и массопереноса:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \mathbf{v}_{jt} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla \bar{p}_j + \nu_j \nabla^2 \mathbf{v}_j - \mathbf{g}(\beta_j^T \theta_j + \varepsilon_j \beta^C c), \\ \theta_{jt} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \theta_j = \chi_j \Delta \theta_j, \quad c_t + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla c = D \Delta c + \alpha_2 D \Delta \theta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_j$  – вектор скорости,  $\theta_j$  и  $c$  – отклонения температуры и концентрации от их средних равновесных значений,  $\bar{p}_j$  – модифицированное давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  – ускорение силы тяжести,  $\rho_j, \nu_j, \beta_j^T, \beta_j^C, \chi_j, D, \alpha$  – постоянные плотности, кинематической вязкости, коэффициенты теплового и концентрационного расширения жидкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии,  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$ .

На границе раздела жидких сред справедливы обычные условия равенства скоростей и температуры, динамическое и кинематическое условия (конвективный поток массы в последнем не учитывается), постулируется равенство потоков тепла и отсутствие потока вещества через границу. На стенках канала заданы условия прилипания. На подложке определена тепловая нагрузка, распределенная по квадратичному закону относительно горизонтальных координат, а верхняя граница считается теплоизолированной и непроницаемой.

Для описания движения вблизи локального экстремума температуры (моделируется граничным условием Дирихле, задающим квадратичное распределение температуры на твердой стенке) использовалось решение специального вида:

$$\mathbf{v}_j = \left( (f_j(z, t) + h_j(z, t))x, (f_j(z, t) - h_j(z, t))y, -2 \int_{z_0}^z f_j(\zeta, t) d\zeta \right), \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(x, y, z, t), \quad (3)$$

$$\theta_j = a_j(z, t)x^2 + b_j(z, t)y^2 + q_j(z, t), \quad c = m(z, t)x^2 + n(z, t)y^2 + k(z, t).$$

Рассмотрены две подзадачи:

**Ia.** Система заполнена двумя чистыми несмешивающимися вязкими теплопроводными жидкостями. В этом случае  $c \equiv 0$  и уравнение переноса примеси (последнее уравнение в системе (2)) не учитывается. Соответствующая стационарная сопряженная краевая задача является обратной и редуцируется к системе десяти интегродифференциальных уравнений. Общая нелинейная задача решена тау-методом, где в качестве базисных функций выбирались смещенные полиномы Лежандра. Расчеты тестовых задач показали, что именно они обеспечивают высокую точность при небольшом их числе. Найдено два различных решения нелинейной задачи. Показано, что решение нелинейной задачи с уменьшением числа Марангони аппроксимируется решением задачи о ползущем течении, построенным при  $Ma \ll 1$ .

При малых числах Марангони соответствующая задача является линейной, и ее решение получено в аналитическом виде. Проведен анализ влияния физических и геометрических параметров и поведения температуры на подложке на структуру течений



в слоях. Установлено, что с ростом отношения толщин слоев  $l$  происходит перестройка структуры течения. При малых  $l$  течение в каждом слое является двухвихревым, восходящие/нисходящие потоки в верхнем/нижнем слое формируются вблизи координаты экстремума температуры (режим  $2^+$ ). При  $l = 10^{-3}$  течение в верхнем слое становится четырехвихревым, возникают два приповерхностных и два пристеночных вихря. С дальнейшим увеличением  $l$  происходит переход к двухвихревому режиму, при этом направление циркуляции изменяется на противоположное (в верхнем/нижнем слое в области максимальной температуры наблюдается нисходящее/восходящее течение, режим  $2^-$ ). В невесомости (при  $g = 0$ ) решение предсказывает формирование режима  $2^+$ , с ростом  $g$  происходит переход к режиму  $2^-$ .

**1б.** Для исследования динамики двухслойной системы жидкость – бинарная смесь в канале, на подложке которого приложена распределенная по квадратичному закону тепловая нагрузка, решение (3) было построено при  $h(z,t) = 0$ ,  $a_j(z,t) = b_j(z,t)$ ,  $m(z,t) = n(z,t)$ . Изучена соответствующая линейная задача, которая получена из исходной при малых числах Марангони.

Для стационарного случая построены поля скоростей, температур и концентрации при различных значениях физических параметров сред и толщин слоев. Исследовано влияние гравитационных сил на структуру течения. Обнаружено, что в поле силы тяжести в бинарной смеси могут формироваться четырехвихревые течения, при этом поперечный размер приповерхностных и пристеночных вихрей может изменяться в зависимости от толщины слоя (см. рисунок 3).

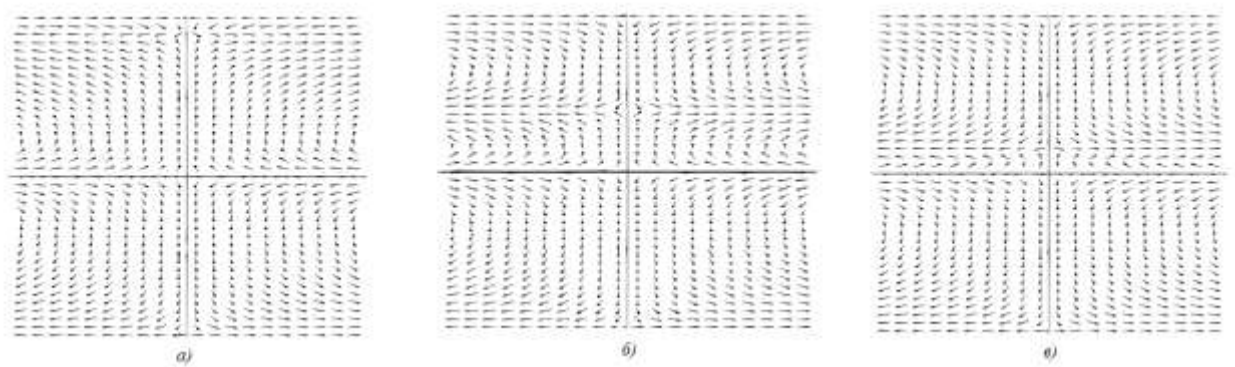


Рисунок 3 – Влияние геометрии системы на поле скоростей в поперечном сечении

$$y = \text{const: } (a) - l = 1, (b) - l = 0.8, (v) - l = 0.65$$

*Задача II. Термокапиллярное однонаправленное движение двух жидкостей в цилиндрической трубе.* В цилиндрических координатах система уравнений конвекции допускает двухпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований,

соответствующую операторам  $\partial/\partial\varphi$ ,  $\partial/\partial z + A\partial/\partial\theta - \rho f(t)\partial/\partial p$ ,  $A$  – постоянная,  $f(t)$  – произвольная гладкая функция. Осесимметрическое инвариантное решение ищется в виде  $\mathbf{u} = (0, 0, w(r, t))$ ,  $p = -\rho f(t)z + P(t)$ ,  $\theta = Az + T(r, t)$ . Это решение применяется для описания однонаправленного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в круглой цилиндрической трубе радиуса  $b$ . Первая жидкость занимает область  $0 \leq r \leq a < b$ ,  $|z| < \infty$ , вторая – цилиндрический слой  $a \leq r \leq b$ ,  $|z| < \infty$ , так что  $w_j$  – осевая скорость,  $p_j$  – давление,  $\theta_j$  – температура,  $\rho_j$  – плотность  $j$ -ой жидкости,  $j = 1, 2$ . Граница раздела сред характеризуется поверхностным натяжением  $\sigma(\theta) = \sigma_0 - \sigma_T \theta$  с известными постоянными  $\sigma_0 > 0$ ,  $\sigma_T > 0$ . Показано, что в отсутствие силы тяжести функции  $w_j$ ,  $T_j$  удовлетворяют системе уравнений параболического типа со сложными условиями на границе раздела  $r = a$ . Кроме того, возникающая сопряженная начально-краевая задача является обратной, поскольку градиенты давлений  $f_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , суть искомые функции, связанные равенством  $f_2(t) = \rho_1 \rho_2^{-1} f_1(t) + \sigma_T A (a \rho_2)^{-1}$ . В качестве условия переопределения задается либо расход первой жидкости (Па), либо общий расход двух жидкостей (Пб). Найдены стационарные решения для общих задач Па, Пб; в случае задачи Пб получены априорные оценки решения в равномерной метрике.

*Задача III. Решение задачи о конвекции во вращающейся трубе.* Для описания тепловой конвекции жидкости во вращающейся цилиндрической трубе используются уравнения Обербека – Буссинеска в цилиндрических координатах. Пусть  $a$  – радиус цилиндра,  $\omega(t)$  – угловая скорость его вращения относительно оси  $z$ ,  $u$  и  $w$  – радиальная и осевая компоненты вектора скорости,  $v$  – разность между азимутальной скоростью и скоростью вращения жидкости  $\omega(t)r$  как твердого тела;  $p$  – отклонение истинного давления от состояния равновесия  $\rho\omega^2(t)r^2/2$ ;  $\Theta$  – отклонение абсолютной температуры от ее среднего значения  $\bar{\Theta} = \text{const}$ . Все теплофизические параметры жидкости предполагаются постоянными и положительными. Ускорение силы тяжести отсутствует. Последнее предположение выполняется, если угловая скорость  $\omega(t)$  достаточно велика. Решение определяющих уравнений ищется в виде

$$\begin{aligned}
 u &= u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t), \quad \Theta = -Az + T(r, t), \quad A = \text{const}, \\
 p &= \rho \left[ \frac{1}{2} A \beta \rho \omega^2(t) r^2 + f(t) \right] z + q(r, t).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Оно является инвариантным относительно бесконечной подгруппы Ли, задаваемой операторами  $\partial/\partial\varphi$ ,  $\partial/\partial z - A\partial/\partial\Theta + [f(t) + A\beta\rho\omega^2(t)r^2/2]\partial/\partial p$ .

Предполагая, что на оси  $z$  отсутствуют источники или стоки, получаем  $u = 0$ , тогда подстановка решения (4) в исходную задачу приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} w_t &= \nu \left( w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) - \frac{1}{2} A \beta \rho \omega^2(t) r^2 - f(t), & T_t &= \chi \left( T_{rr} + \frac{1}{r} T_r \right) + A w, \\ v_t &= \nu \left( v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{1}{r^2} v \right) - \omega_t r, & q_r &= \frac{\rho v^2}{r} \end{aligned} \quad (5)$$

и начально-краевым условиям

$$\begin{aligned} w(r, 0) &= w_0(r), & v(r, 0) &= v_0(r), & T(r, 0) &= T_0(r), & 0 \leq r \leq a, \\ w(a, t) &= 0, & v(a, t) &= 0, & T(a, t) &= 0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ |w(0, t)| &< \infty, & |v(0, t)| &< \infty, & |T(0, t)| &< \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, задается объемный расход жидкости через поперечное сечение трубы  $Q(t)$

$$\int_0^a r w(r, t) dr = \frac{Q(t)}{2\pi}. \quad (7)$$

Совокупность уравнений (5) и условий (6), (7) представляет задачу III. При заданных функциях  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$  решению можно дать следующую интерпретацию: оно описывает течение с заданным расходом  $Q(t)$  в цилиндре, вращающемся с угловой скоростью  $\omega(t)$ , на поверхности которого приложена линейная тепловая нагрузка.

С математической точки зрения задача III является обратной: наряду с  $w(r, t)$ ,  $v(r, t)$ ,  $T(r, t)$  необходимо найти дополнительный градиент давления вдоль оси  $z$  – функцию  $f(t)$ . Задача для  $v(r, t)$  отделяется, основной является задача для определения функций  $w(r, t)$ ,  $f(t)$ . При известной  $w(r, t)$  функция  $T(r, t)$  находится как решение классической первой начально-краевой задачи, а  $q(r, t)$  – интегрированием последнего уравнения системы уравнений (5). Отдельно рассматриваются стационарная и нестационарная постановки.

В стационарном случае показано, что вблизи твердой стенки может возникать пристеночное течение, направление которого определяется взаимодействием двух разных механизмов. Первый связан с расходом жидкости, второй – с тепловыми эффектами и вращением. Для решения нестационарной задачи был применен метод Фурье. Предложена замена, в результате которой интегральное условие, характеризующее объемный расход жидкости через поперечное сечение трубы, становится однородным. Таким образом, обратная задача сведена к прямой с интегральным (неклассическим) условием. Решение

полученной задачи построено в виде рядов по функциям Бесселя 1-го порядка с коэффициентами разложения, зависящими времени.

### 1.3. Теория новых линейных определяющих уравнений применительно к задачам механики жидкости

**1.3.1. Аналитические методы построения решений уравнений с частными производными.** Предложен новый способ построения решений уравнений с частными производными. С этой целью изучались аналитические отображения пространств джетов, сохраняющие контактную структуру – канонические дифференциальные формы Пфаффа. В общем случае они не являются обратимыми и называются контактными отображениями. Доказывается лемма о поднятии контактных отображений. Введены контактные отображения, зависящие от параметра. Эта конструкция потребовала введения последовательности новых определяющих уравнений. Приводятся примеры контактных отображений и новых симметрий уравнений механики.

Изучены одномерные нестационарные уравнения с частными производными второго порядка, описывающие волны в неоднородных и нелинейных средах. Для построения решений использовались контактные преобразования и дифференциальные подстановки Эйлера. Найдены общие решения некоторых нестационарных моделей.

Исследованы двумерные стационарные уравнения Эйлера идеальной жидкости. Подобная модель используется для описания движения плазмы. Предложен простой метод построения решений в виде рациональных выражений от экспоненциальных и эллиптических функций. Найденные решения описывают источники в завихренной жидкости, струйные течения, цепочки источников и стоков, вихревые структуры. Показано, что расход жидкости по замкнутой кривой квантуется в случае эллиптического уравнения SIN-Гордона. Картина линий тока, отвечающая одному из решений, представлена на рисунке 4.

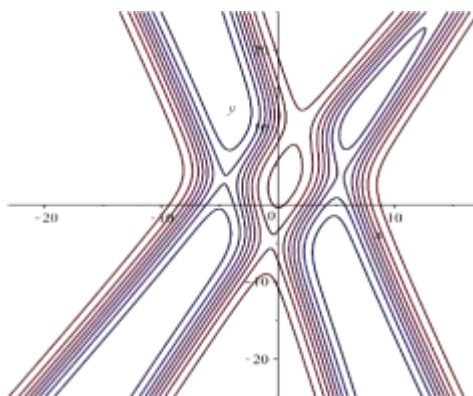


Рисунок 4 – Картина линий тока со струями и вихрями

**1.3.2. Приближенное решение задачи о свободной осесимметричной турбулентной струе.** Предложен новый метод построения приближенных решений математических моделей, описывающих динамику течения в дальних областях безымпультных турбулентных следов. Приближенное решение находится в результате склеивания асимптотического разложения решения вблизи границы турбулентного следа со степенным разложением искомых функций на оси следа. На основе процедуры склеивания удастся выделить значение показателя автомодельности рассматриваемых задач. Проведено детальное сопоставление полученных приближенных решений с результатами численных расчетов других авторов. Развиваемый подход применялся к модели свободной осесимметричной турбулентной струи. Результаты, полученные на основе построенных приближенных решений, согласуются с данными экспериментов.

**1.3.3. Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в три константы.** Рассмотрен класс точных решений с функциональным произволом двумерного уравнения неоднородной акустики, для которого определяющая функция зависит от трех произвольных констант. Эти решения являются обобщением функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева для волнового уравнения. Получены условия на плотность и скорость звука, при которых такие решения для двумерного уравнения акустики будут существовать, построены примеры точных решений.

## **2. Анализ устойчивости гидродинамических течений с поверхностями раздела**

### **2.1. Устойчивость нестационарных двухслойных течений**

В 2021–2023 гг. проведен анализ условий, при которых нестационарные конвективные режимы с полями скоростей специального вида в системах с внутренней границей стабилизируются. Во всех случаях граница раздела предполагалась недеформируемой. Исследована сопряженная обратная нелинейная начально-краевая задача, которая описывает трехмерное нестационарное осесимметричное движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в горизонтальном вращающемся цилиндре с твердой внешней стенкой в условиях невесомости. Изучена динамика нестационарных режимов с полем скорости Хименца в предположении о линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры. В рамках постановки, учитывающей вклад энергетических свойств поверхности раздела в условия теплового

баланса, решение задачи было построено с помощью модифицированного метода Галеркина. В качестве базисных функций использовались полиномы Лежандра. Возникающая система интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения сводилась к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решалась численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Показано, что с ростом времени численное решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим при определенных значениях градиента температуры на твердой стенке цилиндра.

Установлено, что при увеличении числа Марангони (фактически при увеличении температуры, задаваемой на боковой поверхности цилиндра), параметра  $E$  (характеризующего энергетические свойства поверхности раздела) и угловой скорости вращения растет скорость течения двухслойной жидкости, заполняющей вращающийся цилиндр. Показано, что в случае ползущего течения жидкости вращаются как твердые тела.

Исследования 2023 года продолжают цикл работ, связанных с анализом динамики конвективных режимов, описываемых точными решениями специального вида, в областях с границами раздела. Решение нестационарной задачи I (см. п. 1.2) интегрируется в квадратурах в пространстве изображений по Лапласу, что позволяет получить количественную информацию о решении. В образах по Лапласу исследуемая задача сведена к сопряженной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для которой выписано решение в изображениях. Получены априорные оценки решения и на их основе установлены достаточные условия сходимости решения при больших временах к найденному стационарному режиму. Показано, что если заданная температура на нижней подложке стабилизируется со временем, то решение с ростом времени выходит на полученный стационарный режим только при определенных условиях на начальное распределение концентрации в смеси. Численным методом восстановлены истинные поля скорости и температуры. Расчеты демонстрируют стабилизацию течения в двухслойной системе жидких сред при соответствующих условиях, что подтверждает справедливость аналитических оценок.

Решения нестационарных задач  $IIa$ ,  $IIb$  найдены в образах по Лапласу в виде квадратур. Доказано, что если расход стабилизируется со временем, то решения обратных задач  $IIa$ ,  $IIb$  при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к найденным стационарным решениям.

В задаче III получены условия, при которых нестационарное решение выходит на стационарный режим. Результат сформулирован в виде следующей теоремы:

**Теорема:** Пусть

$$w_0(r) \in C^1[0, a], \quad \int_0^a r w_0(r) dr = 0, \quad T_0(r) \in C[0, a], \quad v_0(r) \in C[0, a]$$

и выполнено условие

$$|\omega^2(t) - (\omega^s)^2| \leq C_0 t e^{-\alpha t}, \quad \left| \int_0^t \omega^2(\tau) - (\omega^s)^2 d\tau \right| \leq C_0 t e^{-\alpha t}$$

с положительными константами  $C_0$  и  $\alpha$ . Тогда нестационарное решение обратной задачи с ростом времени стремится по экспоненциальному закону к стационарному решению.

## 2.2. Устойчивость двухфазного стратифицированного течения с испарением

В рамках линейной теории исследована устойчивость течений испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, в плоском горизонтальном канале, на стенках которого приложена линейная тепловая нагрузка с градиентом  $A$ :

$$T_l(x, -h_l) = Ax + v_l, \quad T_g(x, h_g) = Ax + v_g. \quad (8)$$

Здесь индексы  $l$  и  $g$  обозначают параметры жидкой и газовой фазы соответственно,  $h$  – высота слоя,  $v$  – средняя температура стенки.

Для описания установившихся течений используется точное частично-инвариантное решение уравнений (2), обобщенных на случай учета взаимообратных термодиффузионных эффектов. Решение построено в рамках сопряженной задачи испарительной конвекции при заданном расходе газа  $R_g$  в верхнем слое и позволяет корректно учесть диффузионный перенос массы через межфазную границу за счет испарения и вклад эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности, которые проявляются в присутствии летучего компонента в несущем газе. В силу вида решения при равных граничных температурных градиентах  $A$  линейное распределение температуры с таким же продольным градиентом формируется на межфазной границе. Таким образом, величина градиента  $A$  определяет интенсивность эффектов испарения и термокапиллярных напряжений на межфазной границе. Исследовано влияние толщины газового слоя на параметры конвективных режимов в системе сред этанол – воздух и характеристики их устойчивости. Установлен колебательный характер неустойчивости в случае плоских нормальных возмущений; показано, что при любой интенсивности

внешней тепловой нагрузки течение неустойчиво относительно коротковолновых возмущений. Проведена селекция мод и описаны механизмы, отвечающие разным формам неустойчивости.

В 2023 году изучено влияние нагрева сверху на устойчивость подобных течений. Поперечный перепад температур  $v = v_g - v_l$  в системе моделируется путем задания разных значений температур стенок  $v_l$  и  $v_g$  в условиях (8). Установлено, что устойчивая температурная стратификация (пример характеристик конвективных режимов, возникающих в нагреваемой сверху двухслойной системе, представлен на рисунке 5) не гарантирует устойчивости основного течения.

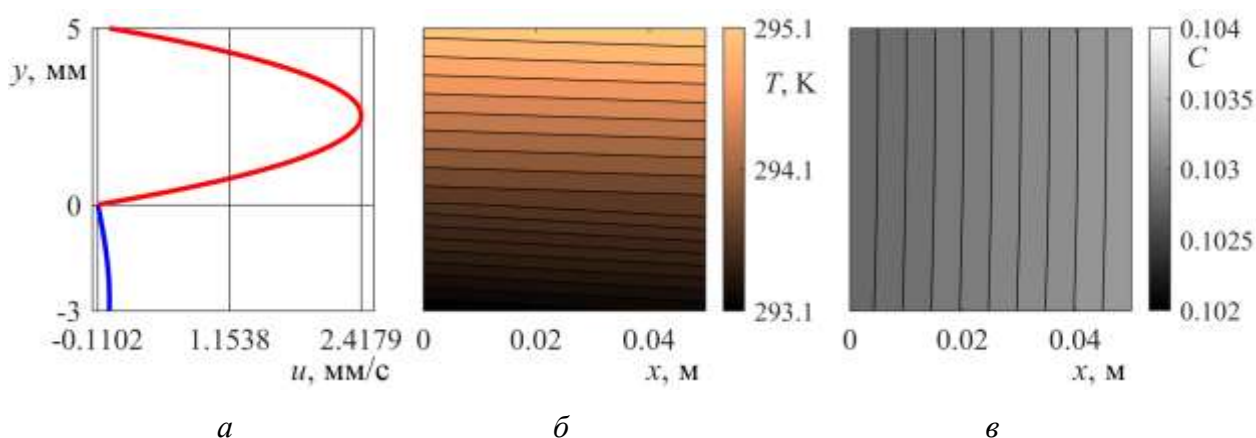


Рисунок 5 – Поле скорости (а), изолинии температуры (б) и изолинии концентрации (в) в двухслойной системе этанол – воздух при  $A = 1.5$  К/м,  $v_l = 293.15$  К,  $v_g = 295.15$  К,

$$R_g = 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$$

Если в отсутствие поперечного перепада температуры даже при малых  $A$  существуют возмущения, вызывающие потерю устойчивости (см. нейтральную кривую 1 на рисунке 6 (а)), критические градиенты вычисляются по значениям числа Грасгофа  $Gr = g\beta_g Ah_g^4 / \nu_g^2$ , то нагрев сверху с минимальной разницей в 1 градус стабилизирует течение. Существует диапазон значений градиентов  $A$  (область между двумя ветвями нейтральной кривой 2 на рисунке 6, а), при которых течение сохраняет устойчивость. Нагрев сверху не меняет формы наиболее опасных возмущений (их структура представлена на рисунке 6, в), а развитие неустойчивости, имеющей колебательный характер, всегда связано с действием термокапиллярного механизма (рисунок 6, б, число Марангони  $Ma = \sigma_T Ah_g^2 / (\nu_g^2 \rho_g)$ ). Неустойчивость реализуется в форме вихревых структур, дрейфующих в направлении приповерхностного течения в жидком слое.



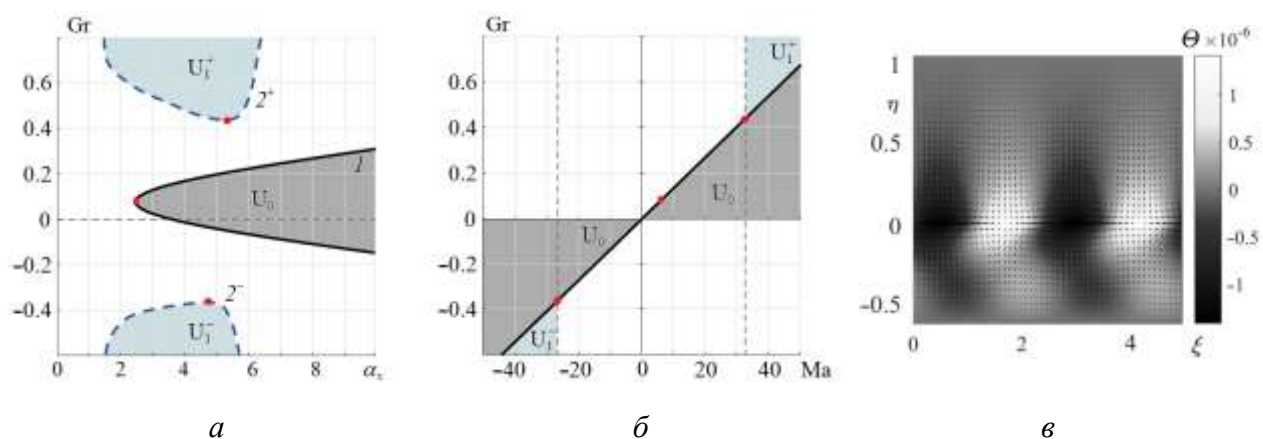
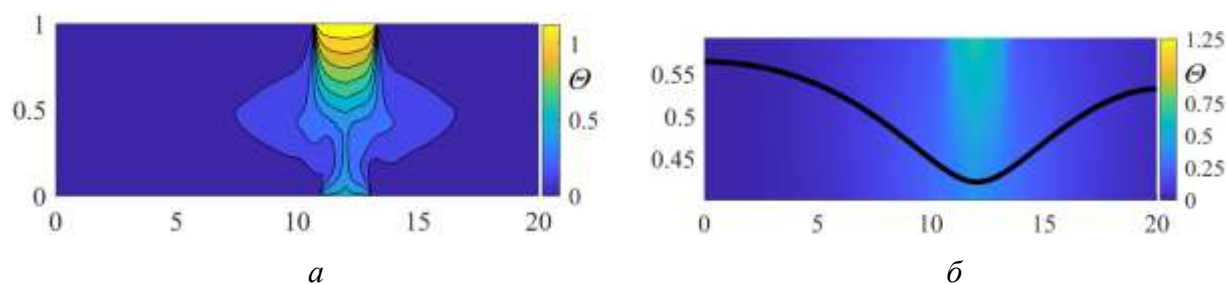


Рисунок 6 – Нейтральные кривые  $Gr(\alpha_x)$  (а), области неустойчивости на плоскости параметров ( $Ma$ ,  $Gr$ ) (б) и структура главных возмущений (в). Кривые 1 и 2 отвечают случаям  $v = 0$  и  $v = 1$  К, соответственно. Области  $U_0$  и  $U_1$  – области неустойчивости, соответствующие  $v = 0$  и  $v = 1$  К

Возможность реализации колебательной неустойчивости в форме ячеистой конвекции подтверждается известными экспериментальными данными. Таким образом, обнаружена возможность контролировать устойчивость конвективных двухслойных режимов с испарением посредством минимального нагрева верхней границы области течения.

### 2.3. Возбуждение конвекции в двухслойной системе при локальной тепловой нагрузке

Для решения задач смешанной конвекции Рэля – Бенара – Марангони в замкнутых массивах, сопровождающейся фазовыми переходами диффузионного типа, в отчетный период разработан и на языке Фортран реализован численный алгоритм для расчета характеристик двухфазной системы (скорости и температуры сред, паросодержания в газовой фазе, массовой скорости испарения, положения границы раздела жидкость – газ, примеры характеристик представлены на рисунке 7) в рамках полных сопряженных постановок на основе уравнений Навье – Стокса и их аппроксимаций.



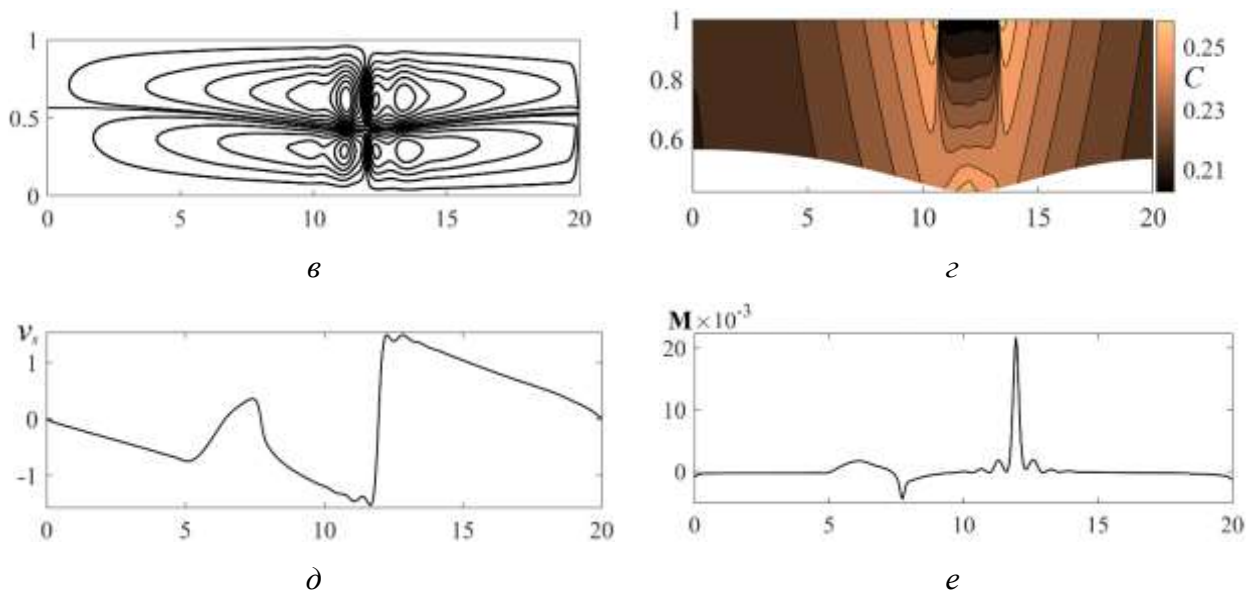


Рисунок 7 – Характеристики установившегося конвективного режима при одновременном локальном нагреве сверху и снизу: (а) – изолинии температуры; (б) – форма межфазной границы и поле температуры в приповерхностной области; (в) – поле скорости; (г) – изолинии концентрации в газовом слое; (д) – касательная скорость на межфазной поверхности (позволяет судить о направлении движения в вихревых структурах); (е) – скорость испарения на границе фазового перехода

Метод расчета предполагает декомпозицию исходной задачи на два унитарных модуля, в качестве условий их сопряжения друг с другом используются граничные условия на поверхности раздела. Алгоритм основан на методе отображения областей с криволинейными границами в каноническую прямоугольную расчетную область. Каждый модуль в численном методе представляет собой однотипную модель, в которой расчет характеристик производится независимо от второго модуля. Программный комплекс допускает модификации основных процедур на случай произвольного числа слоев в системе, включая случай системы со свободными внешними границами, и обобщения исходной задачи на случай более сложных граничных условий, переменных коэффициентов переноса и т. п. Характерной особенностью численного метода является решение задачи в переменных «функция тока – вихрь» и формулировка граничных условий на внутренней деформируемой границе раздела в терминах касательной и нормальной компонент скорости сред на этой поверхности. Предложенный подход позволяет избежать прямого решения задачи о движении точки трехфазного контакта вдоль боковых границ области течения. Определяющие уравнения для всех искомых функций решаются конечно-разностным методом стабилизирующей поправки с использованием дробных шагов.

Проведено численное моделирование динамики локально нагреваемой двухслойной системы жидкость – газ в жидкостной камере для разных типов рабочих сред (этанол – азот, бензин – воздух). Исследовано влияние фазовых превращений, числа и режима работы тепловых элементов конечного размера на динамику системы и поведение границы раздела. Установлено, что испарение слабо ускоряет переходные режимы, вызывает формирование осциллирующих мелкомасштабных вихрей (рисунок 7, в) вблизи зоны теплового удара и колебательное поведение межфазной границы с краткосрочным изменением кривизны поверхности жидкость – газ и глубины термокапиллярного прогиба (рисунок 7, б) в зоне тепловых ударов. Для пары рабочих сред бензин – воздух получены предельные значения температуры тепловых элементов, обеспечивающие корректное функционирование жидкостной камеры без разрыва жидкого слоя. Изучено влияние термодиффузионных эффектов на характеристики конвективных режимов и эволюцию деформируемой поверхности раздела. Показано дестабилизирующее влияние эффекта Соре, которое проявляется увеличением амплитуды деформаций межфазной границы.

В 2023 году проведен сравнительный анализ результатов численного моделирования динамики двухфазной системы с деформируемой границей раздела на основе уравнений Навье – Стокса и Обербека – Буссинеска при локальном нестационарном нагреве. Значения контролируемых величин (время зарождения переходных режимов и формирования установившегося режима, минимальная толщина жидкого слоя, максимальные значения температуры и скорости жидкости, массовой скорости испарения на поверхности раздела, концентрации пара в верхнем слое, частота колебаний поверхности в установившемся режиме), рассчитанные на основе обеих систем уравнений, различаются слабо. В обоих случаях реализуется мягкое возбуждение конвекции после начала нагрева и волновой характер поведения межфазной границы в режимах с переключением нагревателей. Тем самым показано, что приближение стандартного приближения Буссинеска для системы сред с сильно различающимися плотностями дает корректное описание влияния деформаций границ раздела на динамику термокапиллярной конвекции в гравитационном поле, в том числе при пониженной гравитации, даже при сильных деформациях (вплоть до разрыва жидкого слоя с формированием сухого пятна в зоне нагрева).

Полученные результаты снимают вопрос о корректности применимости приближения Буссинеска для описания термогравитационной конвекции в областях с термокапиллярными деформируемыми границами.

### **3. Численное моделирование гидродинамических и температурных режимов в водоемах с учетом слоистой структуры несущей фазы**

В отчетный период в связи с изменением глобальной температуры воздуха проводился анализ реакции вечной мерзлоты на изменение климата. При потеплении увеличивается как толщина слоя талого грунта, так и продолжительность периода существования талика. Для исследования мощности сезонно-талого слоя разработана малоразмерная численная модель вертикальных распределений температуры в талом и мерзлом слоях для периода отсутствия мерзлого слоя на поверхности почвы. Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании/оттаивании осуществляется с помощью решения задачи Стефана. Разработан двухэтапный численный алгоритм, основанный на методе с выделением фронтов. В одномерной задаче Стефана при переходе к новым переменным расчетная область отображается по пространственной переменной на отрезок  $[0, 1]$ .

Математическая модель динамики вечной мерзлоты в летний период содержит неопределенные параметры. Значения этих параметров определяются для конкретного объекта/региона с помощью эмпирических формул, вычислительных экспериментов и данных натурных измерений. Проверка работоспособности численной модели проведена для района озера Тулик (Аляска).

Особенностью модели является относительно небольшое количество входных параметров. В рассмотренном варианте для прогноза динамики сезонно-талого слоя достаточно знать сценарии изменений температуры воздуха. Разработанная численная модель позволяет исследовать динамику температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя суши.

Для выработки рекомендаций по сооружению проточного бассейна в черте г. Красноярска исследован гидротермический режим проточного водоема. Для прогноза использовалась математическая модель (двумерная в вертикальной плоскости), основанная на приближениях Буссинеска, медленных течений, гидростатики, «твердой крышки» в переменных функция тока – вихрь. Коэффициент вертикального турбулентного обмена определялся по формуле Прандтля – Обухова с учетом приближения Экмана и формуле Маккавеева. В оболочке Visual Studio реализована явная численная схема на языке C++. Программа включает расчетные модули и модули по обработке входных параметров и метеоданных. При вычислениях учитываются входные данные (широта местности, температура воздуха, влажность, облачность) и суточный ход температуры водной поверхности.

### 3.1. Анализ динамики годового термического режима вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя

Для исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах используется одномерная численная модель [Belolipetskii V. M., Genova S. N. A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2016, 9(2), 158–165]. Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мерзлых и талых слоев. Рассматриваются территории, на которых имеются озера или болота. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются следующие слои: талый грунт, мерзлый грунт, вода, лед, снег. Возможны различные варианты расположения этих слоев.

Выделяются *мелкие* (зимой промерзающие до дна, а летом оттаивающие вместе с верхними слоями дна) и *глубокие* (промерзающие частично) водоемы.

Для *мелких* водоемов рассматриваются пять вариантов. При переходе с одного варианта на другой слои добавляются или исключаются. Предложен упрощенный численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоев, позволяющий описать годовую динамику замерзания/оттаивания вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах.

Вертикальные распределения температуры в рассматриваемых слоях определяются из решений уравнений теплопроводности, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

**Сезонные периоды динамики вечной мерзлоты.** Выделяются интервалы времени, на которых температура воздуха  $T_a$  одного знака. В зимний период  $T_a < 0$ . Для оценки термического сопротивления снежного покрова используется квазистационарное приближение. Снежный покров схематизируется двумя слоями. Получены формулы для вычисления температуры грунта на границе снег – лед. При повышении температуры снега весной до нуля градусов Цельсия начинается таяние снега. Из уравнения теплового баланса получена формула для оценки интервала времени таяния снега. В летний период температура воздуха положительная. Температура подстилающей поверхности летом определяется дистанционно.

### 3.2. Изучение динамики течений глубоководных водоемов

Исследование динамики течений глубоководных водоемов было проведено на примере озера Шира, Хакасия, Восточная Сибирь (рисунок 8). Оно представляет собой бессточное озеро без островов, в которое впадает одна речка Сон.

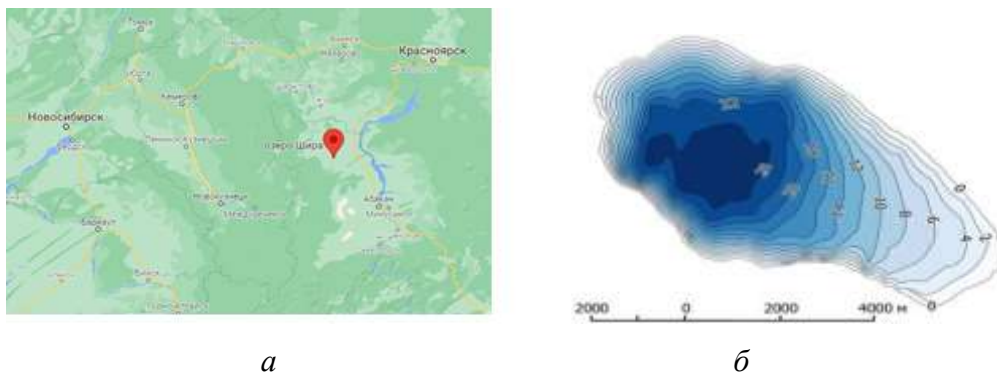


Рисунок 8 – Географическое положение озера Шира (а), батиметрия озера Шира (б)

В силу малости притока все влияние реки сосредоточено в приустьевой зоне, основным внешним фактором, определяющим течение в озере, является ветровое воздействие. Параметры показаны на рисунке 9. На рисунке 10, а приведены типичные профили температуры и солености в озере Шира в летний период, на рисунке 10, б показана зависимость плотности от глубины.

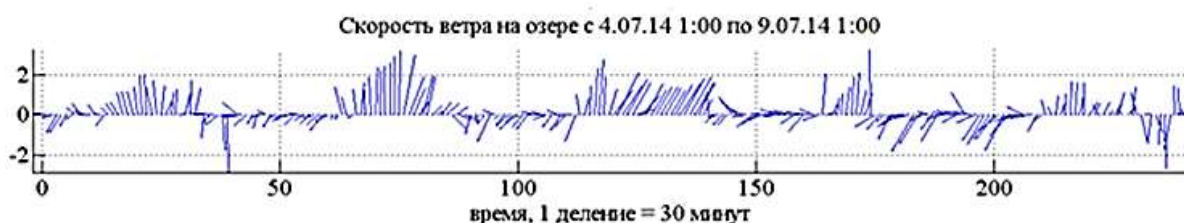


Рисунок 9 – Типичные распределения силы и направления ветра на озере

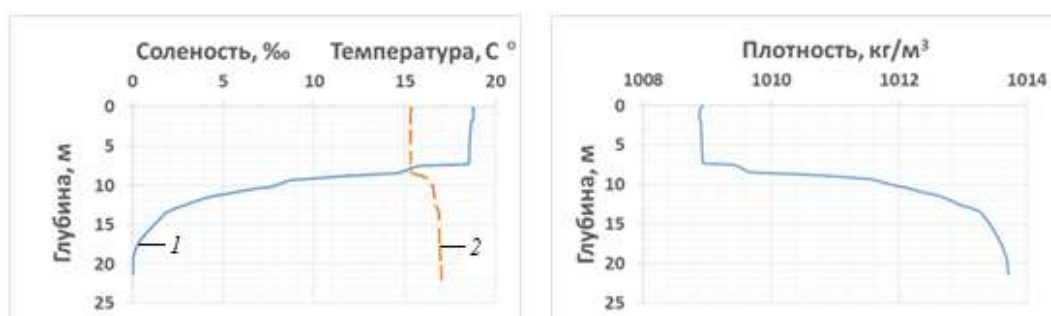


Рисунок 10 – Характеристики озера по измерениям на глубине 22 м: профили температуры (1) и солености (2), профиль плотности

Для исследования характера течений в озере Шира была проведена серия численных расчетов на основе методов распараллеливания OpenMP, MPI в системе моделирования ROMS (Regional Oceanic Modeling System) с использованием батиметрии озера Шира, распределений температуры и солености, типичных для озера Шира в летний период, нулевых начальных скоростей и возвышения свободной поверхности, различных ветровых сценариев. Использовалось линейное уравнение состояния и KPP-параметризация турбулентного вертикального перемешивания.

Были проанализированы следующие ветровые сценарии:

1. Мгновенно начинающийся постоянный ветер, который мгновенно заканчивается.
2. Ветер, который линейно возрастает до максимального значения, в течение некоторого времени сохраняет постоянное значение и линейно убывает.
3. Ветер синусоидально возрастает до максимального значения и также убывает.

Установлено, что в случае западного, юго-западного, северо-западного и северного направлений ветра возникают сейшевые колебания. На рисунке 11 показаны расчетные профили изотерм и изогалин (линий одинаковой солености), которые иллюстрируют сейшевые колебания, возникающие после воздействия восьмичасового юго-западного ветра и достигающие трех метров по глубине в восточной и западной частях.

В случае северо-восточного, юго-восточного, восточного и южного направлений ветра возникают сейшевые колебания с вращением против часовой стрелки с периодом 11 и/или 6 часов, что визуально наблюдается по колебаниям свободной поверхности (рисунок 12). Параметры режимов течений, возникающих после воздействия северо-восточного ветра, представлены на рисунке 13.

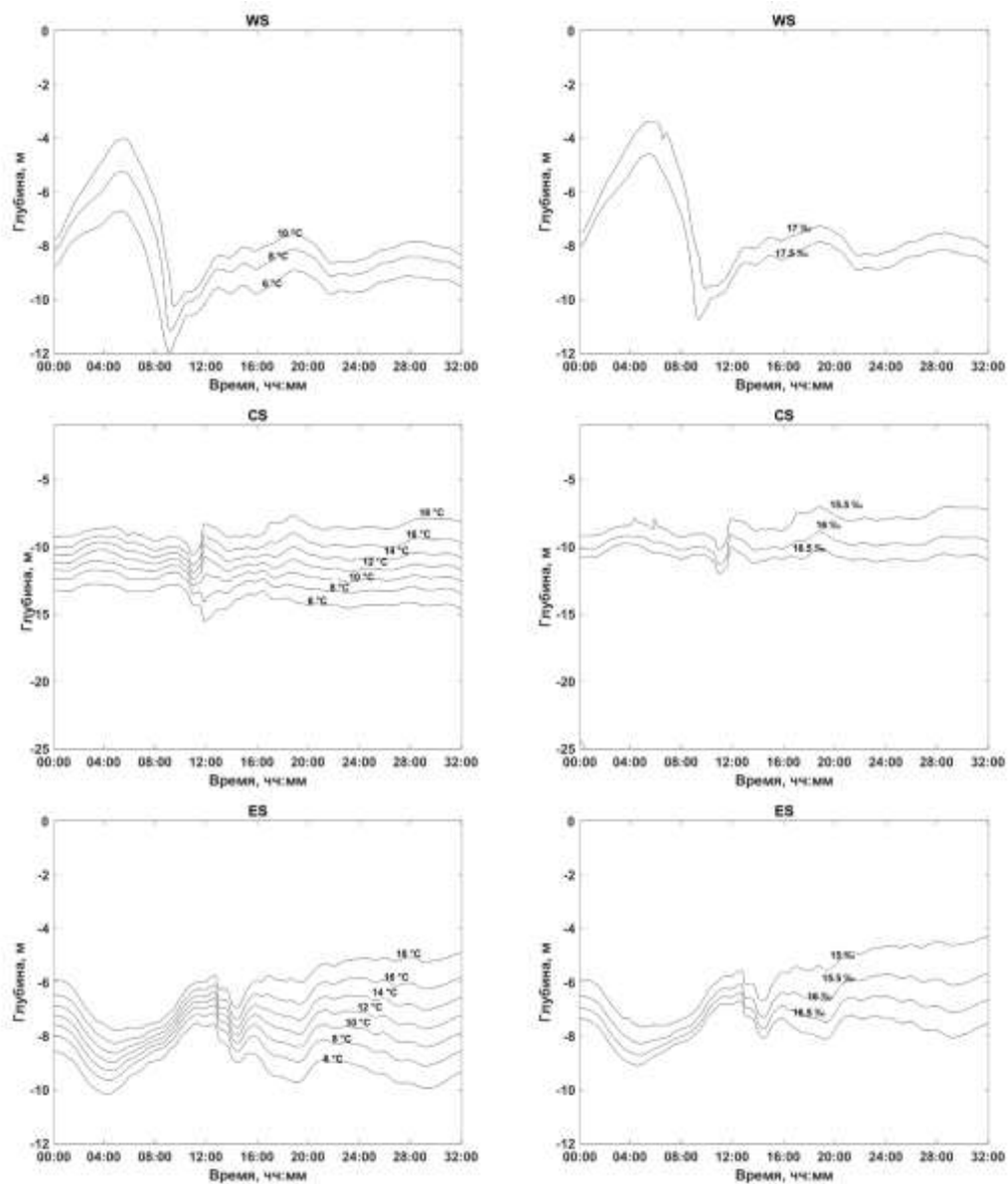


Рисунок 11 – Колебания изотерм и изогалин в случае воздействия юго-западного ветра со скоростью 8 м/с в течение 8 ч, далее 24 ч – без ветра. Слева – изотермы, справа – изогалины.

Сверху вниз: WS – западная часть озера, CS – центральная, ES – восточная

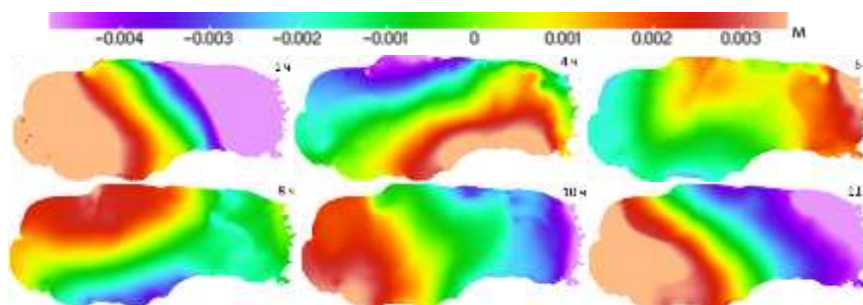


Рисунок 12 – Возвышение свободной поверхности. Колебания с периодом 11 ч после прекращения действия восьмичасового северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с



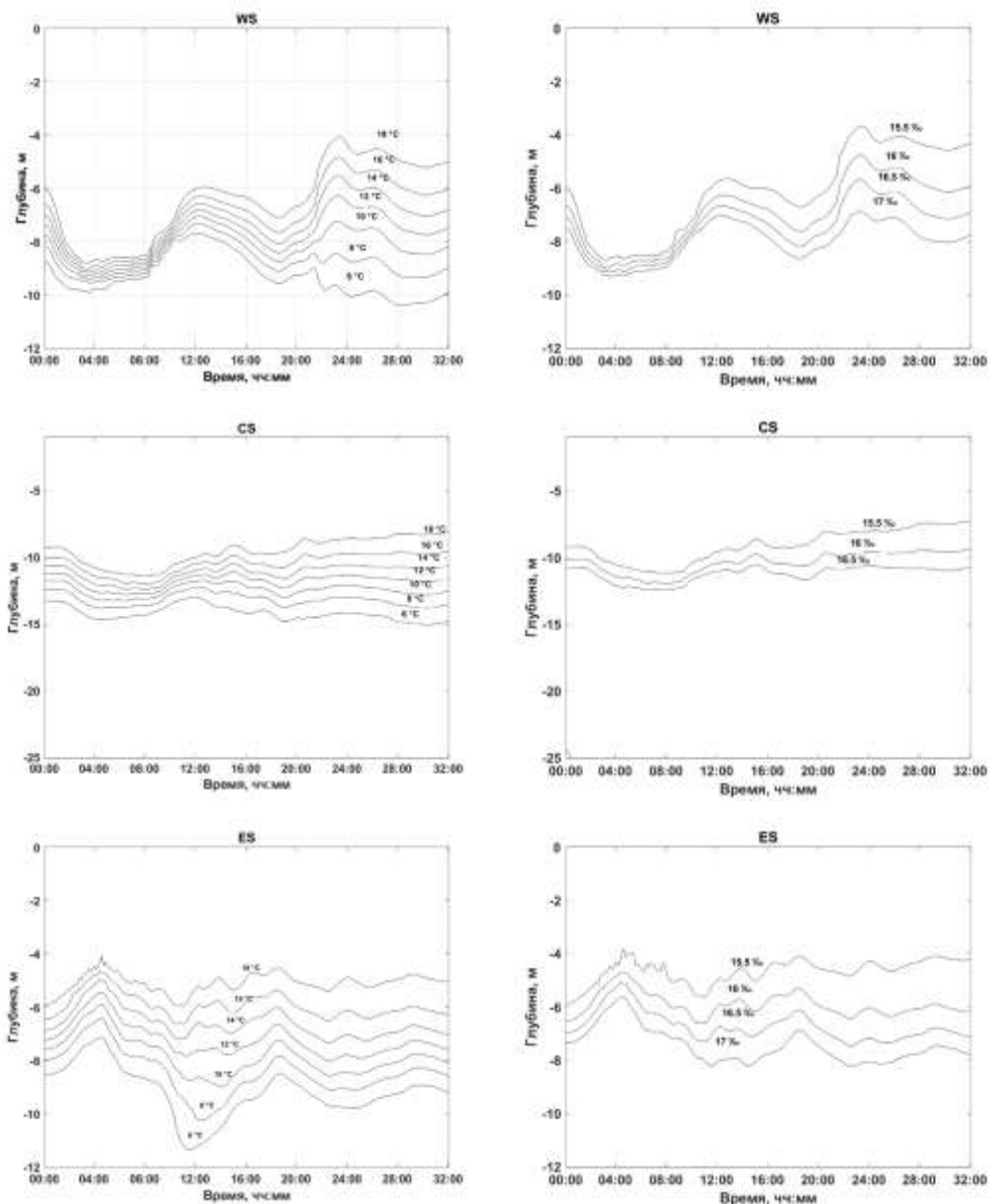


Рисунок 13 – Колебания изотерм и изогалин в случае воздействия северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с в течение 8 ч, далее 24 ч – без ветра. Справа – изогалины, слева – изотермы. Сверху вниз: WS – западная часть озера, CS – центральная, ES – восточная

Наличие в озере значительных колебаний изотерм подтверждается натурными данными (во время прохождения внутренней волны фиксировались колебания с размахом от 3 до 5 метров, рисунок 14).

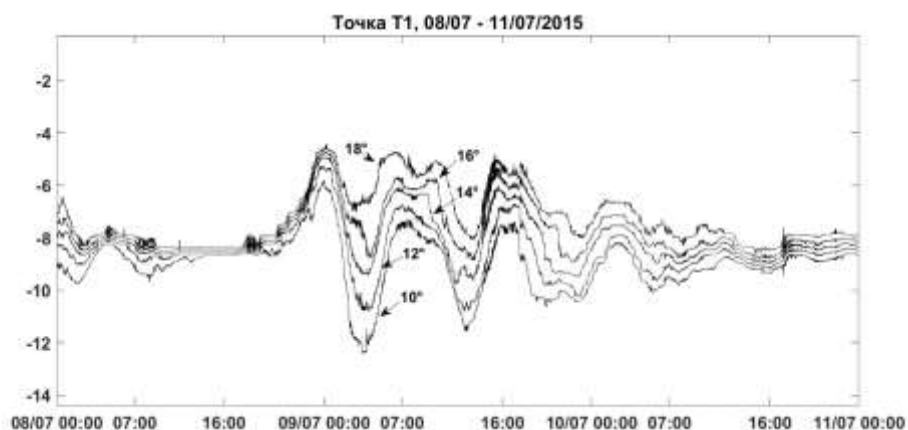


Рисунок 14 – Изотермы, построенные по данным натуральных наблюдений за период с 8 по 11 июля 2015 г.,  $T=10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $14\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $16\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  в географической точке Т1

Результаты спектрального анализа горизонтальных скоростей, полученные на основе численного моделирования, сравнивались со спектрами скоростей натуральных измерений. На рисунке 15 представлены результаты спектрального анализа скорости для долговременных измерений, выполненных в июне–июле 2014–2015 гг. прибором ADCP 1200 кГц. Для нахождения спектральных оценок были выбраны ряды восточной  $u$  и северной  $v$  составляющих трехмерной скорости течения на глубине 2.6 м и 7.6 м, усредненные раз в полчаса. Графики спектральных оценок представлены в логарифмической шкале. Энергонесущие максимумы восточной и северной составляющих течения существенно не изменяются год к году и составляют примерно 21, 11, 7 часов.

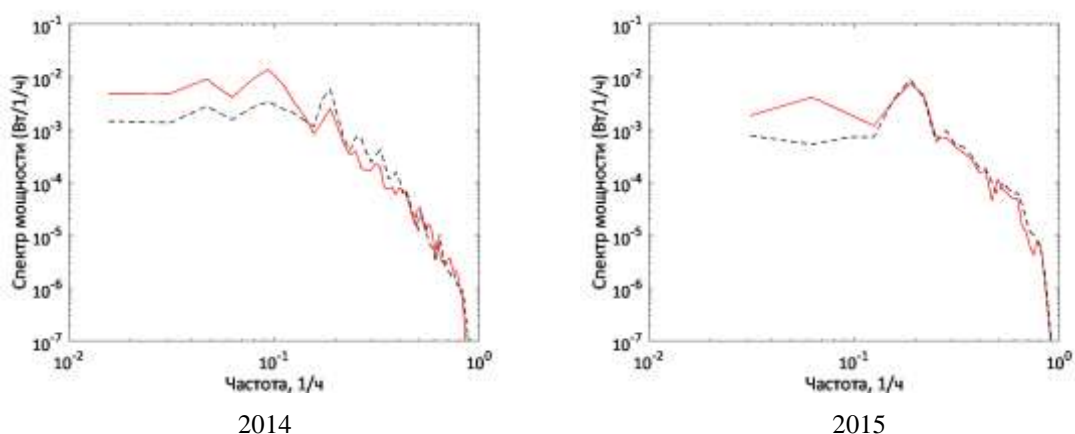


Рисунок 15 – Спектр мощности для восточной (черная штриховая линия) и северной компонент скорости (красная сплошная линия), глубина 7.6 м

Спектральные оценки для горизонтальных скоростей, полученные в результате расчетов с использованием модели ROMS для летнего периода с 13 по 31 июля 2018 г. на основе метода модифицированных периодограмм Уэлча, представлены на рисунке 16.

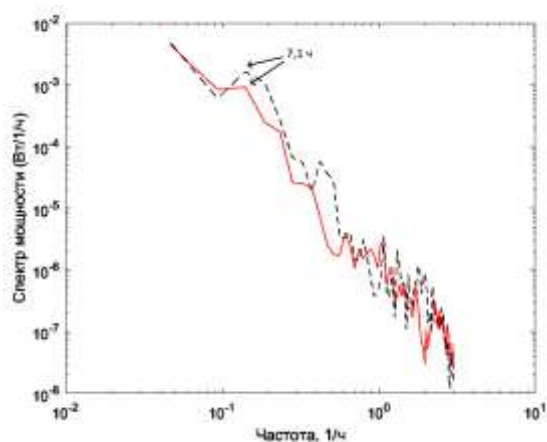


Рисунок 16 – Спектры мощности, полученные путем анализа результатов численных расчетов. Восточная компонента скорости – черная штриховая линия, северная компонента – красная сплошная линия, глубина 7.6 м

Спектральный анализ показал, что формирование внутренней волны с периодом 7 часов, предсказываемое на основе численных расчетов, подтверждается данными натурных измерений.

#### **4. Математическое и численное моделирование в задачах механики деформируемых сред**

##### **4.1. Разработка и алгоритмическая реализация математических моделей зарождения и развития трещин в прослойках блочной среды**

В отчетный период по теме проекта разработан новый эффективный численный метод для анализа волнового характера распространения системы трещин в тонких прослойках блочной среды со сложными реологическими свойствами. Метод основан на вариационной формулировке определяющих соотношений деформирования упругопластических и пористых материалов, а также условий контактного взаимодействия блоков через прослойки. Разработан параллельный вычислительный алгоритм, реализующий этот метод для суперкомпьютеров кластерной архитектуры. Исследования направлены на анализ волн разрушения, экспериментально обнаруженных в стекле при импульсном нагружении. Термин «волна разрушения» появился в 1960-х годах, когда была выдвинута гипотеза о принципиальной возможности протекания процесса фрагментирования материала в относительно тонком слое, распространяющемся

с определенной скоростью. К числу первых публикаций по математическому моделированию волн разрушения относятся работы Дж. Эшелби, Г. И. Баренблатта, Р. Л. Салганика, Г. П. Черепанова, Б. В. Кострова. Считалось, что такие волны реализуются только при наличии растягивающих напряжений на некоторых площадках в неразрушенном материале и соответствующих этим напряжениям растягивающих деформаций. Но в конце 1980-х годов Г. И. Канелем совместно с коллегами были экспериментально обнаружены волны разрушения в батавском стекле в условиях сжатия. Впоследствии этот факт был многократно подтвержден другими экспериментаторами. По результатам экспериментов скорость волны разрушения оказалась значительно меньше продольной и поперечной скоростей упругих волн, и зависимой от уровня напряжений за фронтом волны нагружения.

Для описания волн разрушения в деформируемых материалах многими авторами разработаны специальные математические модели, основанные на общих принципах механики сплошной среды с учетом повреждаемости материала. Однако эти модели сложны, содержат феноменологические параметры и функции состояния, требующие определения по результатам экспериментов. Исполнителями проекта исследуется механизм возникновения волн разрушения в блочных средах в рамках упрощающего предположения о том, что трещины за фронтом волны способны образовываться только в тонких податливых межблочных прослойках материала.

**4.1.1. Моделирование деформации блоков и прослоек.** Рассматривается состояние плоской деформации блочного массива (рисунок 17), образованного прямоугольными упругими блоками со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат, и межблочными прослойками постоянной толщины.

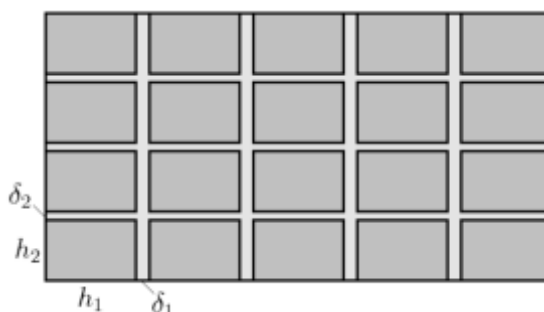


Рисунок 17 – Схема блочной среды

Деформация каждого блока подчиняется системе уравнений движения в скоростях и напряжениях и определяющим уравнениям однородной изотропной упругой среды,

численная реализация которых осуществляется на автономных сетках с перевязкой решений на поверхностях контакта через внутренние граничные условия. При интенсивных механических воздействиях материал блоков переходит в пластическое состояние. Для его описания применяется вариационное неравенство термодинамического принципа Мизеса максимальной мощности пластической диссипации, которое описывает также процесс перехода в упругое состояние при разгрузке, обусловленной падением уровня напряжений после необратимой деформации.

При моделировании прослоек между соседними блоками применяются приближенные уравнения движения, учитывающие массу прослойки, и определяющие уравнения теории упругопластического течения с изотропным упрочнением в форме принципа максимума мощности пластической диссипации Мизеса.

Развиваемый подход позволяет моделировать прослойки, обладающие сложным сочетанием вязкоупругих свойств, пористости и флюидонасыщенности. Соответствующие модели также разработаны в рамках темы проекта. Важное их отличие от существующих упрощенных моделей состоит в том, что в предлагаемых моделях выполняются основные принципы термодинамики необратимых процессов. В частности, справедливо уравнение баланса полной энергии, в которое входит кинетическая и потенциальная энергии блоков и прослоек, диссипативные составляющие энергии в блоках и прослойках, а также работа внешних сил на границе блочного массива. Невыполнение термодинамических принципов приводит к некорректным результатам моделирования.

**4.1.2. Моделирование трещинообразования.** Разработаны математические модели для описания динамики системы трещин в прослойках. Начальное поле трещин определяется с помощью равномерного случайного распределения. В качестве входного параметра в расчетах задается процент разрушенных прослоек, на которых в процессе деформации реализуются внутренние граничные условия контактного взаимодействия блоков. Примеры трещиноватых массивов из  $100 \times 100$  блоков с процентным содержанием трещин 10 % и 30 % от площади прослоек приведены на рисунке 18.

При моделировании трещинообразования используется силовой критерий в напряжениях:  $\sqrt{[\sigma_n]_+^2 + k\sigma_r^2} = \sigma_c$ , где  $k$  – феноменологический параметр,  $\sigma_n$  и  $\sigma_r$  – нормальное и касательное напряжения в прослойке,  $\sigma_c$  – критическое напряжение разрушения,  $[z]_+ = (z + |z|) / 2$  – положительная часть выражения. Применяется также интегральный критерий разрушения Морозова – Петрова, учитывающий время накопления повреждений.

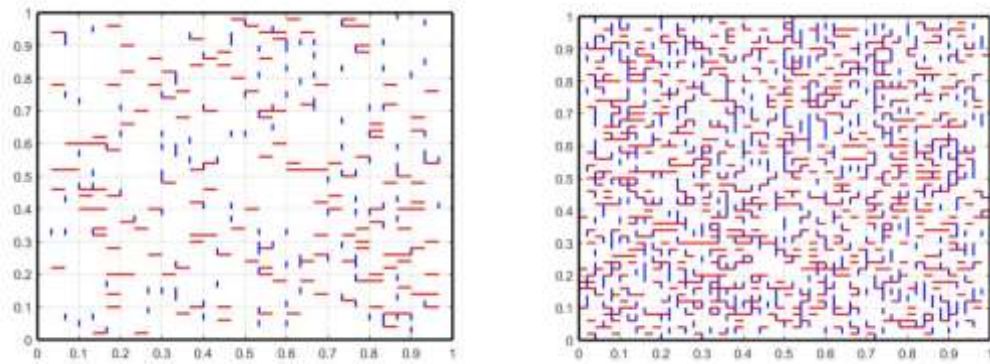


Рисунок 18 – Случайное распределение трещин: 10 % (слева) и 30 % (справа)  
в массиве 50 x 50 блоков

**4.1.3. Контактное взаимодействие берегов трещин.** По аналогии с теорией трещин нормального отрыва начальные трещины в прослойках, а также разрушенные части межблочных прослоек рассматриваются как поверхности идеального контакта. Условие непроникания берегов образовавшейся трещины формулируется в виде ограничения на нормальное напряжение:  $\sigma_n \leq 0$ . Касательное напряжение считается равным нулю, трение не учитывается. На поверхности контакта выполняется вариационное неравенство:

$$(\sigma_n^0 - \sigma_n)((\lambda + 2\mu)\varepsilon_n - \sigma_n) \leq 0,$$

в котором  $\sigma_n^0 \leq 0$  – варьируемое напряжение,  $\varepsilon_n$  – поперечная деформация,  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе материала прослойки. Вариационное неравенство обеспечивает выполнение условия положительности контактного давления в зоне контакта и корректно описывает повторное контактное взаимодействие отслоившихся поверхностей под действием сжимающих напряжений, исключая взаимное проникновение блоков друг в друга. Численно реализуется на основе алгоритма корректировки скорости, вытекающего из него после аппроксимации определяющих уравнений модели.

## 4.2. Построение эффективных параллельных вычислительных алгоритмов, обладающих свойством монотонности, для решения динамических задач

**4.2.1. Алгоритмическая и программная реализация модели блочной среды.** Для численного исследования задач динамики блочных массивов геосреды с податливыми межблочными прослойками сложной реологии разработаны вычислительные алгоритмы, в которых на каждом шаге по времени применяется двухэтапная процедура. Сначала решается соответствующая задача теории упругости, а затем полученные скорости и

напряжения корректируются на основе алгоритмов решения дискретных аналогов вариационных неравенств, описывающих упругопластическое состояние блоков и прослоек, а также вариационного неравенства контактного взаимодействия блоков через разрушенные прослойки. К решению уравнений динамической теории упругости применяется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным в сочетании с монотонной схемой распада разрыва С. К. Годунова для решения одномерных задач. Уточнение результатов счета на каждом шаге по времени производится путем ENO-реконструкции скоростей и напряжений. При решении уравнений, описывающих деформацию упругих прослоек, используется метод Г. В. Иванова построения безусловно устойчивых разностных схем с заранее заданной искусственной диссипацией энергии. Конструкция вычислительного алгоритма в целом автоматически обеспечивает термодинамическую согласованность определяющих соотношений деформирования блоков и внутренних граничных условий в прослойках на разностном уровне. Это в свою очередь гарантирует устойчивость счета по отношению к ошибкам округления при выполнении условия Куранта – Фридрихса – Леви устойчивости разностной схемы для решения одномерных уравнений динамической теории упругости.

На рисунках 19 и 20 для последовательных моментов времени представлены результаты расчета процесса трещинообразования в блочном массиве под действием равномерно распределенного импульсного воздействия на левой границе массива. На рисунках прослеживаются фронты продольной упругой волны и диссипативной пластической волны. Трещины в основном развиваются в окрестности угловых точек, в которых меняется тип граничных условий. Расчеты показали, что волны разрушения при данном способе нагружения не обнаруживаются как в изначально бездефектном блочном массиве (рисунок 19), так и в трещиноватом массиве со случайной системой трещин, и при случайном распределении предварительных напряжений (рисунок 20).

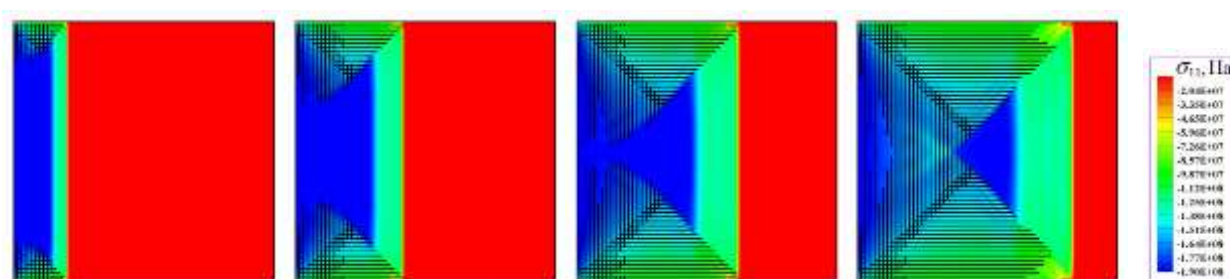


Рисунок 19 – Трещинообразование в прослойках блочного массива

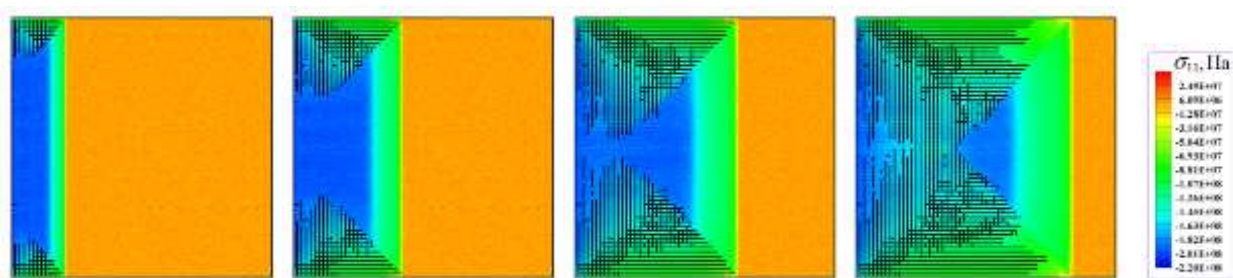


Рисунок 20 – Трещинообразование при наличии предварительных напряжений

Основная гипотеза при выборе дальнейшего направления исследований состоит в том, что волны разрушения в блочном массиве реализуются только при наличии начальной системы трещин и начальных самоуравновешенных напряжений специального вида, которые обусловлены природными или технологическими процессами и способствуют выделению запасенной упругой энергии для поддержания волны.

**4.2.2. Разработка вычислительных алгоритмов для анализа волновых процессов в вязкоупругих средах.** В 2023 г. были продолжены исследования 2022 и 2021 гг. по разработке численных методов решения осесимметричных задач для плоскостной геосреды с однородными изотропными вязкоупругими слоями, описываемыми в рамках обобщенной модели стандартного линейного тела (Generalized Standard Linear Solid или GSLS). Численный алгоритм основан на методе расщепления по пространственным переменным и по физическим процессам.

В расчетах по определению энергетических характеристик сейсмических источников учитывались диссипативные свойства разностных схем. Искусственная или схемная диссипация приводит к определенным неточностям, поэтому было предложено применить разностную схему с контролируемым параметром диссипации, построенную по методу Г. В. Иванова. Данная схема является безусловно устойчивой. В предельном случае схема является бездиссипативной и обладает вторым порядком сходимости, но теряет свойство монотонности. Однако в силу присутствия физической вязкости осцилляции решения сглаживаются и необходимость вводить искусственную диссипацию в схему практически отпадает. Комплекс параллельных программ, предназначенных для распределенных вычислительных систем кластерной архитектуры, был доработан с учетом схем с контролируемой диссипацией. На рисунке 21 изображены профили напряжений для цилиндрической поперечной волны.



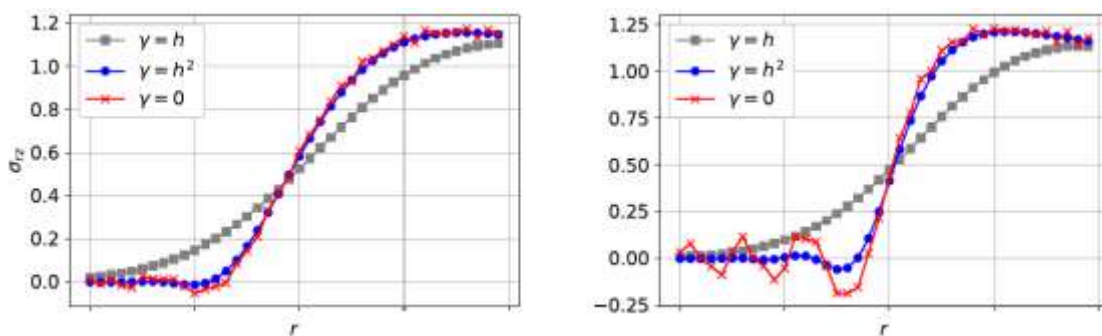


Рисунок 21 – Профили напряжений за фронтом разрыва для поперечных цилиндрических волн в вязкоупругой среде с добротностью  $Q = 20$  (слева) и добротностью  $Q = 80$  (справа) при различных значениях параметра схемной диссипации

Немонотонность бездиссипативной схемы проявляется в средах с высокой добротностью, однако введение параметра диссипации  $\gamma \approx h^2$  позволяет существенно снизить осцилляции решения при сохранении второго порядка аппроксимации схемы даже в упругих средах.

### 4.3. Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов при квазистатическом нагружении

**4.3.1. Методы расчета разномодульных многослойных пластин из волокнистых композитов.** В отчетный период 2021–2023 гг. решены задачи изгиба многослойной композитной пластины в случае идеальной склейки слоев без локальных расслоений на поверхностях раздела. Рассматривалась пластина, состоящая из слоев однонаправленных волокнистых композитов. Каждый слой моделировался как трансверсально-изотропный материал, а упругие постоянные для всей пластины в целом были получены путем осреднения модулей упругости и модулей сдвига по слоям. Особенностью волокнистых материалов является их разномодульность, т. е. разное сопротивление растяжению и сжатию, которое описывалось с помощью введения дополнительных модулей упругости, возникающих при растяжении материала вследствие сопротивления армирующих элементов, которое отсутствует при сжатии композита. При построении определяющих уравнений с учетом этих особенностей использовался обобщенный реологический метод, основное преимущество которого состоит в том, что получаемые на его основе уравнения состояния обладают потенциальными представлениями, что гарантирует выполнение принципов термодинамики обратимых процессов. Задачи решались в рамках технической теории пластин Кирхгофа – Лява.

Рассматривалось напряженно-деформированное состояние композитной пластины под действием произвольной системы сил, при котором деформация представляет собой совокупность деформации срединной поверхности и деформаций, возникающих вследствие изгиба пластины. В рассматриваемой постановке отсутствует предположение о существовании нейтральной поверхности, что позволяет описывать пластины под действием произвольных самоуравновешенных систем нагружения и не ограничивает таким образом класс задач. При построении уравнений изгиба пластины получен нелинейный функционал упругой энергии с использованием проектора, учитывающего различное сопротивление композита растяжению и сжатию. На рисунке 22 приведен пример расчета изгиба однослойной пластины под действием двух сил, направленных противоположно друг другу.

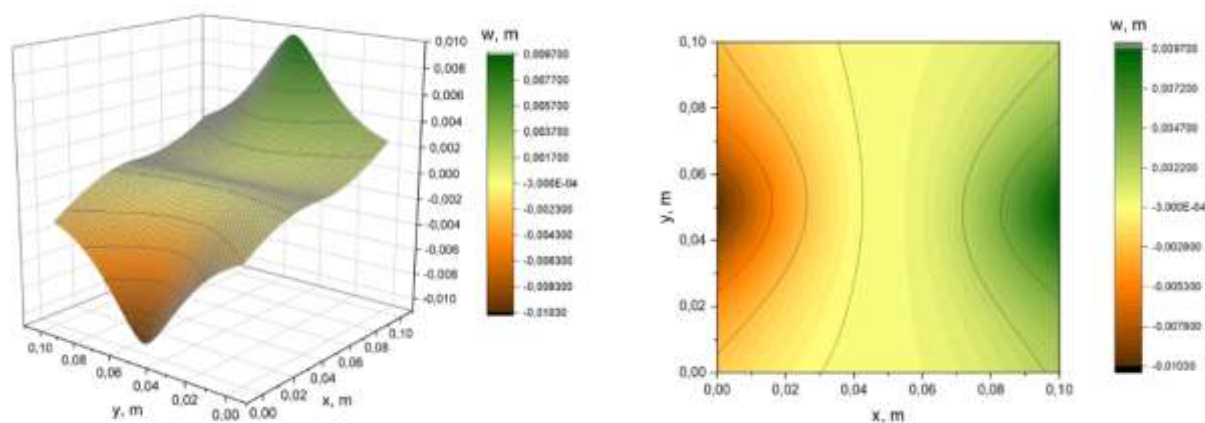


Рисунок 22 – Изгиб пластины под действием разнонаправленных сил

Параметры упругости, используемые в вычислительных экспериментах, соответствуют углепластику с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50 %:

$$E_1^+ = 114, E_1^- = 57, E_2 = 6, G = 3.5 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.19, \nu_2 = 0.02,$$

где  $E_1^+$  и  $E_1^-$  – модули Юнга вдоль волокон при растяжении и сжатии,  $E_2$  – модуль Юнга поперек волокон,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – коэффициенты Пуассона при растяжении вдоль и поперек волокон.

В рамках полученной таким образом новой математической модели решена контактная задача с заранее неизвестной зоной контакта для упругой многослойной пластины из разномодульного материала и жесткого штампа произвольной формы. Контактное взаимодействие описано с помощью ограничения в виде неравенства. Постановка задачи основана на вариационном принципе Лагранжа минимума

потенциальной энергии пластины. Для численного решения применялся метод конечных элементов с использованием треугольных элементов Белла. Предложенная модель позволила рассчитывать воздействие штампами сложной формы при отсутствии нейтральной поверхности в пластине. На рисунке 23 представлен пример расчета для двухслойной композитной пластины толщиной 5 мм с армированием слоев, расположенных перпендикулярно друг другу.

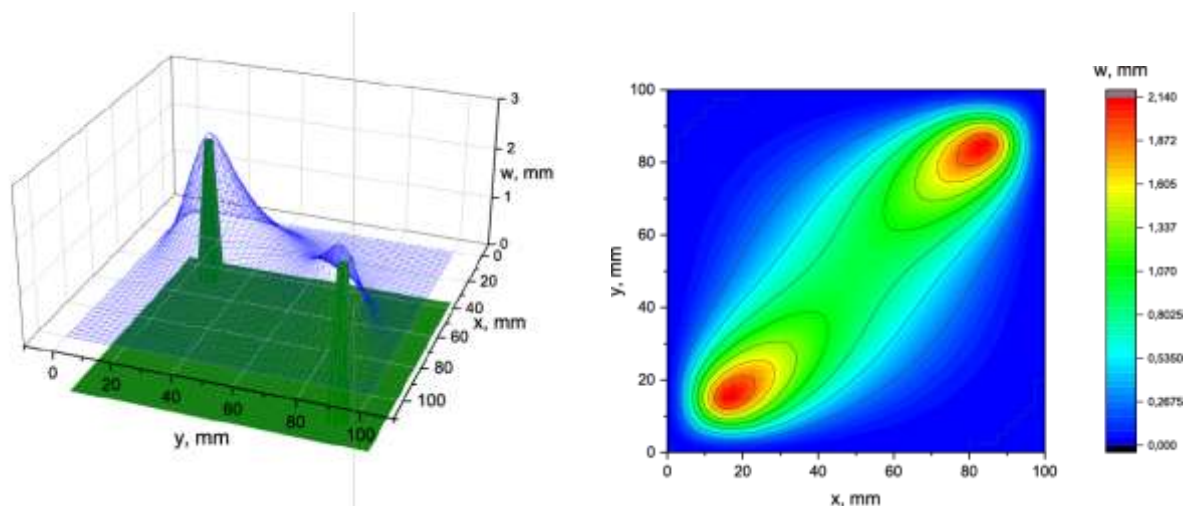


Рисунок 23 – Прогиб композитной пластины при контакте с жестким штампом сложной формы

Разработанная компьютерная программа для расчета квазистатического напряженно-деформированного состояния композитной пластины из разномодульного материала зарегистрирована в государственном реестре программ для ЭВМ.

**4.3.2. Оценка эффективных упругих характеристик композита регулярной структуры на основе эрмитовой конечно-элементной аппроксимации уравнений теории упругости неоднородной среды.** Оценке упругих характеристик композита регулярной структуры посвящена обширная литература. В плоском случае периодическая структура позволяет построить аналитические приближения к упругим характеристикам композиционного материала. Применение же метода конечных элементов для 3D моделирования конструкции связано с большими вычислительными затратами, что затрудняет исследование реальных композитов. При выполнении темы проекта реализована вычислительная технология на основе формата данных TTF (Tensor Train Format), которая позволила объединить перечисленные подходы для оценки параметров конструкционных материалов. Решая серию краевых задач (растяжение – сжатие, кручение, изгиб) в рамках уравнений TTF-метода и сравнивая полученные решения

с эталонными решениями для ортотропно-упругого однородного образца, можно оценить упругие характеристики композита. Такой алгоритм реализован на языке C++. Более полное описание метода и алгоритма приведено в промежуточном отчете за 2022 год.

Результаты следующего раздела также относятся к 2021–2022 гг. выполнения темы проекта, поэтому они представлены ниже в сокращенной форме.

**4.3.3. Математическое моделирование деформационных процессов в многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластинах и оболочках.** Микрополярные пластины и оболочки, представляющие собой композиты со слоистой или волокнистой структурой, метаматериалы с заданными специфическими свойствами или функционально-градиентные материалы, имеют широкую область приложений в точной механике, электронике и медицине. Примерами являются биологические клеточные мембраны и их искусственные аналоги. Искусственные мембраны используются в фармакологии для изготовления липосом – сферических капсул для точной адресной доставки лекарственных препаратов к больному органу, минуя остальные части человеческого организма. Современные исследования показали также, что теория микрополярных пластин и оболочек применима к изучению деформационных характеристик наноструктур, в частности, плоских листов и нанотрубок графена.

При описании многослойной структуры микрополярной оболочки каждый слой рассматривается как независимая оболочка. Уравнения отдельного слоя строятся с помощью аппроксимации полей перемещений и вращений. Далее применяется процедура усреднения по толщине оболочки. При этом локальные проскальзывания слоев относительно друг друга вдоль поверхностей раздела не учитываются. Определяющие уравнения записываются в термодинамически непротиворечивой форме законов сохранения. Это обеспечивает корректность постановки начально-краевых задач.

Для численного решения получаемых при моделировании гиперболических систем уравнений применяются эффективные параллельные алгоритмы, основанные на методе распада разрыва Годунова и его модификаций типа ENO-схем. Результаты численных расчетов распространения волн в микрополярных цилиндрических оболочках демонстрируют качественное отличие волновой картины в зависимости от типов частиц. Сравнительные расчеты проводились для материалов со сферическими частицами и с цилиндрическими частицами, вытянутыми вдоль различных осей в разных слоях. Анализ полученных результатов показал, что в случае цилиндрических частиц за эллиптическими фронтами поперечных волн наблюдается дополнительная система

высокочастотных волн, обусловленная вращательным движением частиц и зависящая от их ориентации.

#### 4.4. Численное моделирование жидких кристаллов под действием слабых термомеханических и электрических возмущений

**4.4.1. Математическая модель холестерического жидкого кристалла.** В 2023 году в рамках предположения об упругом сопротивлении жидкого кристалла слабым механическим воздействиям или возмущениям электрическим полем построена новая математическая модель для описания пространственного статического состояния. Наряду с вращательными степенями свободы учтены смещения центров масс молекул жидкого кристалла относительно начального положения. С помощью численных расчетов в задаче для тонкого слоя проанализированы эффекты деформации холестерических спиралей под действием электрического поля конденсатора.

Природные и искусственные жидкие кристаллы принято разделять на три класса – нематики, в которых центры масс молекул распределены хаотично по пространству, но направляющие векторы молекул лежат в одной плоскости, смектики, отличающиеся от нематиков слоистой структурой с резкими границами смены ориентации молекул при переходе от слоя к слою, и холестерики, имеющие спиралевидную структуру (рисунок 24).

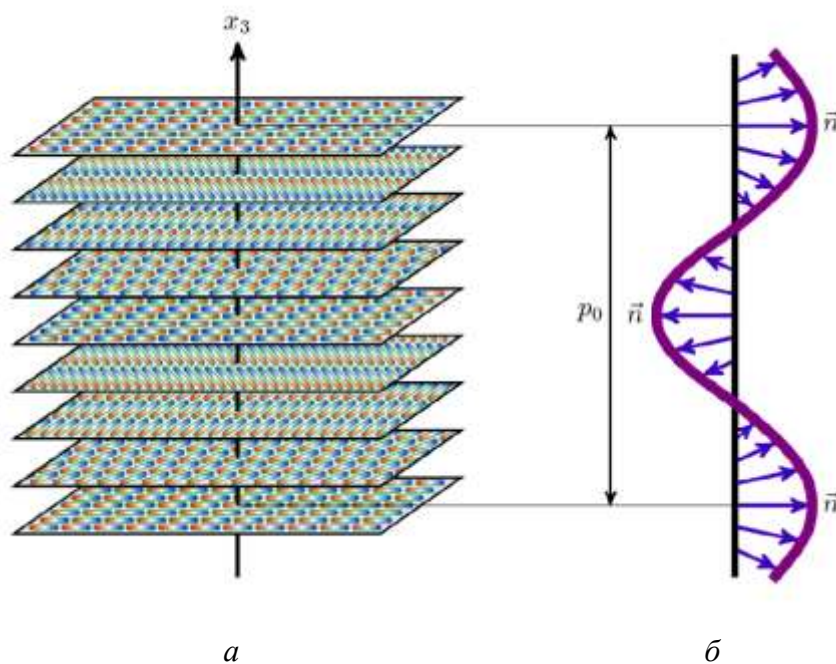


Рисунок 24 – Упаковка стержнеобразных молекул в холестерических жидких кристаллах (а) и спиральное расположение вектора–директора (б)

Существенное отличие этих классов с точки зрения математического моделирования состоит в том, что к анализу нематиков и смектиков при определенных предположениях относительно внешних воздействий можно применять плоские (двумерные) модели, в то время как к холестерикам двумерные модели неприменимы. Для моделирования деформации жидких кристаллов в холестерической фазе под действием неоднородно распределенных систем объемных и поверхностных сил и моментов сил необходимо использовать пространственные уравнения.

Взаимодействие холестерического жидкого кристалла с ограничивающими поверхностями приводит к формированию разнообразных структур в зависимости от граничных условий и соотношения шага спирали и толщины капли или слоя. Различная ориентация приграничных молекул обеспечивается на стадии предварительной подготовки жидкого кристалла с помощью специальных технологических процессов. Определяющие уравнения модели получены с помощью вариационного принципа Кастильяно, в соответствии с которым состояние равновесия среды минимизирует интеграл потенциальной энергии упругой деформации на множестве допустимых состояний, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях.

Таким способом получена следующая система уравнений статического (равновесного) состояния жидкого кристалла в векторной форме, записанная относительно давления  $p$ , вектора касательных напряжений  $\vec{\tau}^\times$ , вектора перемещений  $\vec{u}$ , вектора поворота  $\vec{w}$  и тензора моментных напряжений  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \nabla p - \nabla \times \vec{\tau}^\times &= \vec{f}, & p &= -\kappa \nabla \cdot \vec{u}, & \vec{\tau}^\times &= \alpha \left( \vec{w} - \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} \right), \\ -\nabla \cdot \mu + 2\vec{\tau}^\times &= \vec{m}, & \mu &= \gamma \nabla \vec{w}. \end{aligned}$$

В рамках этой системы решена одномерная задача о деформации холестерических спиралей жидкокристаллического слоя под действием равномерного электрического поля конденсатора. Получена аналитическая формула для порогового значения разности потенциалов конденсатора, при котором происходит потеря устойчивости молекул, начальная ориентация которых перпендикулярна вектору напряженности поля:

$$\Delta \varphi_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \gamma + 2h^2 \alpha}{\varepsilon_0 \Delta \varepsilon}}.$$

По сравнению с классической формулой для порогового значения Фредерикса, в которой принимаются во внимание только моментные взаимодействия, она содержит поправку,

учитывающую сопротивление вращению частиц за счет касательных напряжений, и показывает, что такое сопротивление препятствует потере устойчивости.

Результаты расчетов для слоя толщиной  $h = 4$  мкм при разности потенциалов  $\Delta\varphi = 1.28$ В, близкой к пороговому значению, приведены на рисунках 25, 26. Кривыми красного, зеленого, синего и фиолетового цветов на рисунке 25 изображены эпюры распределения ориентационного угла по толщине для начальных значений угла  $\psi_0 \approx 0$ ,  $\psi_0 = 5^\circ$ ,  $10^\circ$  и  $15^\circ$ . Соответствующие этим значениям графики отклонений потенциала от линейного распределения  $\delta\varphi(x_3) = \varphi(x_3) - (x_3/h - 0.5)\Delta\varphi$  представлены на рисунке 26. Судя по расчетам, распределение потенциала при малых значениях начального угла  $\psi_0$  близко к линейному, но оно существенно меняется при незначительном изменении этого параметра.

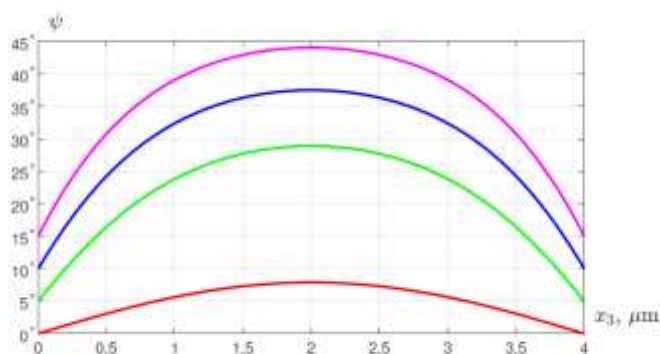


Рисунок 25 – Распределение угла ориентации молекул по толщине слоя

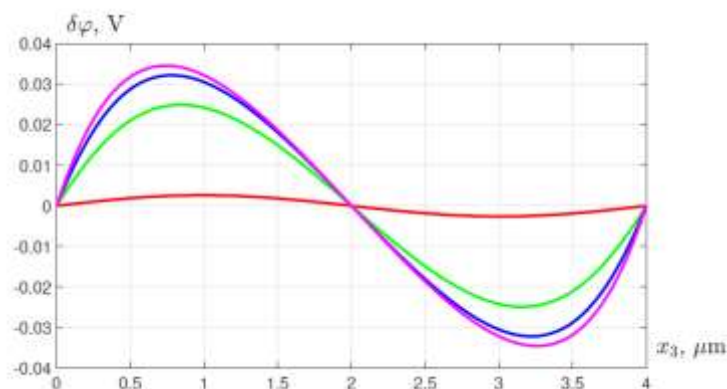


Рисунок 26 – Отклонение электрического потенциала от линейного распределения

Анализ результатов расчетов показал, что преимущественное сжатие холестерических спиралей под действием электрического поля, неоднородность которого по толщине определяется изменением диэлектрической проницаемости за счет поворота молекул, происходит в средней части слоя.

**4.4.2. Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных системах с графическими ускорителями.** В предыдущем 2022 году в рамках проекта были выполнены исследования по математическому моделированию нематических жидких кристаллов. Результаты этого периода относятся к решению статической задачи – задачи о равновесии жидкокристаллического слоя в неоднородном электрическом поле.

В процессе воздействия электрическим полем на жидкий кристалл происходит своеобразная конкуренция между электромагнитными силами, которые пытаются сориентировать молекулы вдоль электрического поля, и силами упругости, стремящимися сохранить первоначальное положение молекул. Поэтому в соответствии с теорией Озеена – Франка распределение углов ориентации молекул в равновесном состоянии жидкого кристалла удовлетворяет условию стационарности функционала потенциальной энергии, представляющего собой разность между энергией упругого взаимодействия и энергией электрического поля. Минимизируемый интеграл упругой потенциальной энергии Франка имеет вид:

$$J = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \gamma \left( (\theta - \theta_0)_x^2 + (\theta - \theta_0)_y^2 \right) - \varepsilon^0 \varepsilon^\perp (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \varepsilon^0 (\varepsilon^\parallel - \varepsilon^\perp) (\varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta)^2 \right) dx dy.$$

Здесь  $\theta$  – распределение угла поворота доменов относительно горизонтальной оси в состоянии равновесия,  $\theta_0$  – начальное распределение угла,  $\varphi$  – электрический потенциал,  $\varepsilon^\parallel$  и  $\varepsilon^\perp$  – диэлектрические проницаемости в направлении ориентации молекул и в ортогональном направлении,  $\varepsilon^0$  – электрическая постоянная. Путем варьирования интеграла энергии получены уравнения Эйлера:

$$-\frac{2\gamma}{\varepsilon^0 (\varepsilon^\parallel - \varepsilon^\perp)} \Delta (\theta - \theta_0) = 2\varphi_x \varphi_y \cos 2\theta - (\varphi_x^2 - \varphi_y^2) \sin 2\theta,$$

$$-\frac{2\varepsilon^\perp}{\varepsilon^\parallel - \varepsilon^\perp} \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi_x \cos^2 \theta + \varphi_y \sin 2\theta) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_x \sin 2\theta + 2\varphi_y \sin^2 \theta).$$

Была решена следующая задача. Плоский слой жидкого кристалла помещен между симметрично расположенными короткими пластинами – обкладками конденсатора. Слой считается бесконечным в горизонтальном направлении, а система пластин периодической с заданным периодом. Внутри слоя известно начальное распределение углов ориентации молекул относительно горизонтальной оси, которое создается на стадии предварительной подготовки жидкого кристалла с помощью специального технологического процесса. Требуется найти распределения электрического потенциала и углов ориентации молекул



в слое (доменов сорентированных молекул) после появления зарядов на пластинах конденсатора.

Для численной реализации модели разработан параллельный вычислительный алгоритм и компьютерная программа по технологии CUDA для компьютерных систем с графическими ускорителями. Во внешности слоя (в полуплоскостях выше и ниже слоя) электрическое поле рассчитывалось по методу прямых. Внутри слоя нелинейные уравнения в частных производных для потенциала электрического поля и угла ориентации молекул жидкого кристалла решались итерационным методом на основе вариационно-разностной схемы на сетке, согласованной с сеткой метода прямых, с применением быстрого преобразования Фурье.

Верификация алгоритма выполнялась путем сравнения расчетного порогового значения разности потенциалов в жидком кристалле с горизонтальной ориентацией волокон в случае непрерывных пластин конденсатора. Было показано, что оно согласуется с пороговым значением, характеризующим эффект Фредерикса потери устойчивости равновесия молекул жидкокристаллического слоя под действием равномерного электрического поля.

В CUDA – программе, реализующей вычислительный алгоритм, используется центральный процессор CPU (Central Processing Unit), на котором выполняются последовательные части программного кода, и графический сопроцессор GPU (Graphics Processing Unit), где реализуются параллельные вычисления. В начале выполнения программы центральным процессором подключаются используемые библиотеки, задаются размерности конечно-разностной сетки, а также все необходимые константы. Затем описываются динамические массивы для искомых и вспомогательных величин, с применением функции malloc выделяется под них память и задаются входные данные задачи – начальное распределение углов ориентации и т.п. Далее все эти данные копируются на графическое устройство посредством функций cudaMemcpy и cudaMemcpyToSymbol. После того как на GPU выполнены все вычисления, данные в узлах сетки копируются обратно на CPU. Центральный процессор записывает полученные результаты счета в файлы и строит графики по этим данным.

На графическом сопроцессоре GPU тоже производится описание массивов и выделение под них памяти функцией cudaMalloc. С помощью команд dim3 blocks и dim3 threads задаются количество блоков и количество нитей в каждом блоке. В двумерном случае получается сетка, включающая заданное количество блоков, состоящих из определенного числа нитей. После того как все динамические массивы величин скопированы на GPU начинается основной расчетный цикл по итерациям алгоритма.

Происходит последовательный вызов процедур, которые реализуют этапы алгоритма решения задачи. Внутри каждого этапа расчеты производятся в параллельном режиме. После выполнения каждого ядра производится барьерная синхронизация перед началом выполнения следующего ядра. По мере окончания расчетов все полученные массивы данных передаются обратно на CPU для дальнейшей обработки.

С помощью разработанной вычислительной методики была выполнена серия расчетов переориентации молекул в плоском ЖК слое. На рисунках 27 и 28 приведены результаты расчетов слоя с горизонтальной начальной ориентацией молекул жидкого кристалла 5ЦБ ( $\theta_0 = 0$ ).

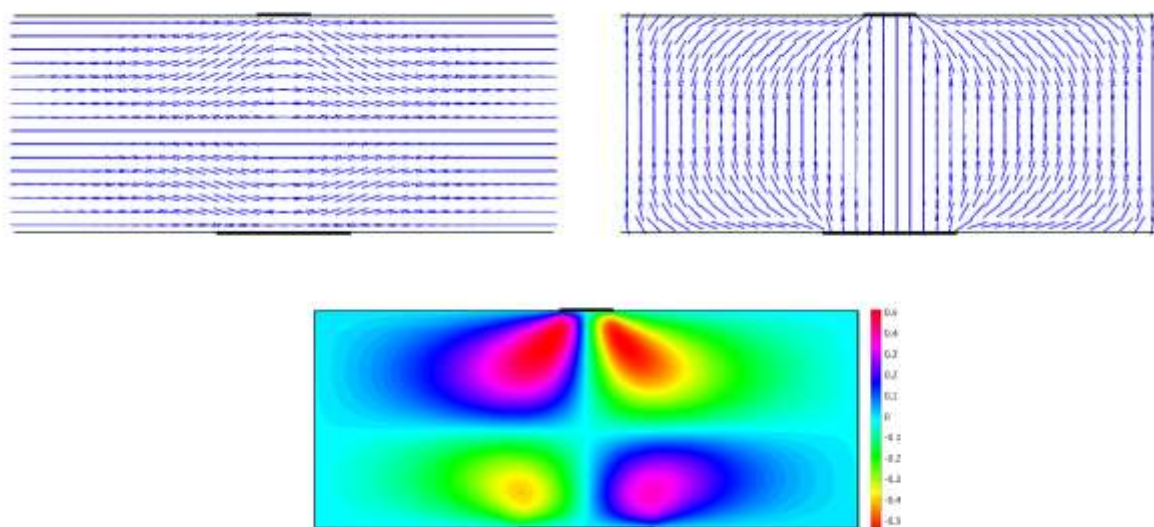


Рисунок 27 – Численное решение с четырьмя рядами молекул

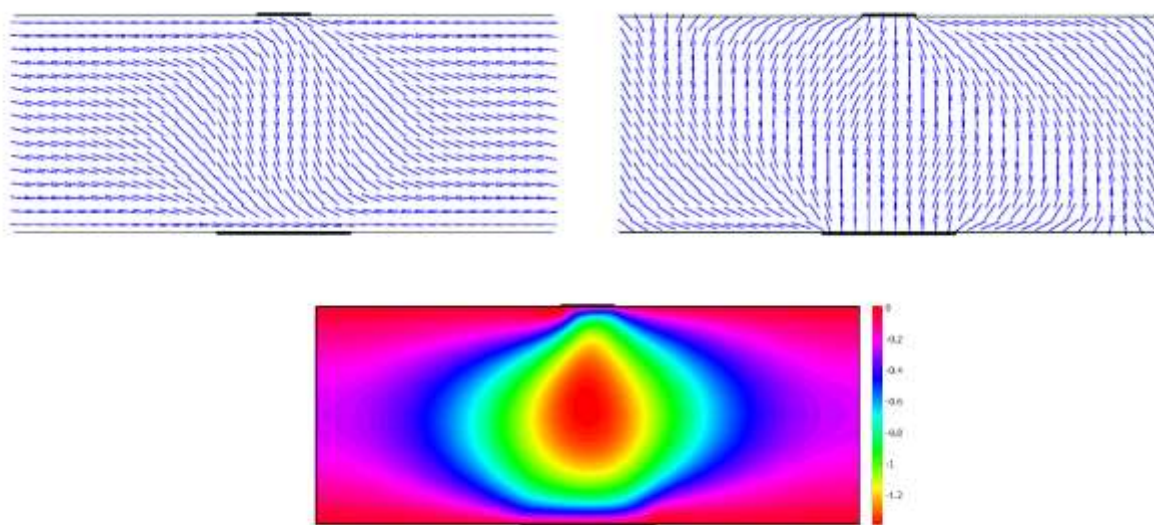


Рисунок 28 – Альтернативное решение с одним рядом

На верхних рисунках слева короткими отрезками изображено распределение углов ориентации после приложения электрического поля. На рисунках справа отрезками показано направление электрического поля с учетом неравномерного распределения диэлектрической проницаемости, обусловленного переориентацией молекул. На нижних рисунках для большей наглядности показаны линии уровня углов ориентации.

В случае расположения обкладок конденсатора одна над другой в расчетах были получены три различных варианта решения задачи. В первом из них (рисунок 27) образуется четыре роя молекул симметрично относительно вертикальной и горизонтальной средних линий прямоугольника. При этом молекулы в центральной части не перестраиваются вдоль электрического поля, сохраняя первоначальную ориентацию. Во втором решении (рисунок 28) вместо четырех образуется один рой, причем молекулы в центральной части поворачиваются из начального положения по часовой стрелке и выстраиваются в направлении электрического поля. Третье решение аналогично, но в нем молекулы поворачиваются против часовой стрелки.

Анализ результатов показал, что центрами больших доменов сориентированных молекул (роев) в жидком кристалле служат локализованные группы молекул, начальная ориентация которых перпендикулярна направлению поля, и что в зависимости от числа таких центров может образовываться один или несколько роев. Это означает, что формирование роев происходит за счет потери устойчивости равновесия локализованных групп, которые по мере срыва из неустойчивого состояния вовлекают в процесс переориентации соседние молекулы.

Ранее исполнителями проекта были разработаны параллельные вычислительные алгоритмы для расчета динамики жидкокристаллического слоя в конденсаторе, реализующие полную модель с учетом воздействия электрического поля, а также механических и температурных факторов. В Роспатенте был зарегистрирован программный комплекс для компьютеров с графическими ускорителями, созданный по технологии параллельного программирования CUDA. Однако использование этого комплекса для численного решения задач динамики жидкокристаллических структур на протяженных для такого рода процессов интервалах времени (порядка десятков и сотен миллисекунд), как оказалось, даже с учетом полученного за счет распараллеливания 30–50-кратного ускорения счета требует процессорного времени порядка нескольких суток.

На основе полной модели с применением численных расчетов было показано, что в нематических жидких кристаллах невозможно наблюдать эффект ориентационной термоупругости, который состоит в изменении ориентации доменов молекул

исключительно за счет температурного (немеханического) воздействия на границе. Было также показано, что жидкий кристалл, как микронеоднородная среда с вращательными степенями свободы, обладает специфической резонансной частотой вращательного движения, которая по существу является феноменологическим параметром среды, не зависящим от размеров занимаемой области и условий на ее границе.

Исследования 2021 года были направлены на разработку алгоритмов и программ для численного решения задачи о воздействии электрического поля на протяженный жидкокристаллический слой в упрощенной постановке. Динамические (переходные) процессы в слое моделировались на основе системы двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для касательного напряжения  $q$  и угловой скорости  $\omega$ , вытекающих из полной модели. Применяя такой подход, удалось многократно сократить временные затраты на решение задачи. Система двух уравнений механики описывает вращательное движение доменов с учетом упругого взаимодействия и вязких напряжений:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{\eta} \frac{\partial q}{\partial t} + 2\alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \left( \Delta q + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{2}{j} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\gamma}{j} \Delta \omega + \frac{1}{j} \frac{\partial m}{\partial t}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $j$  – объемная плотность момента инерции молекул (доменов молекул),  $\alpha$  и  $\gamma$  – феноменологические параметры упругости,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $f_1$ ,  $f_2$  и  $m$  – объемные силы и момент сил, действующие на жидкий кристалл со стороны электрического поля. Для этой системы построена явная условно устойчивая разностная схема. Распараллеливание вычислительного алгоритма по технологии CUDA для такой схемы не представляет особой сложности, так как отдельные нити графического устройства выполняют однотипные операции по явным формулам.

На рисунке 29 приведены результаты расчетов, демонстрирующие образование больших доменов молекул (так называемых роев) под действием поля, наведенного поверхностными электрическими зарядами на пластинах – обкладках конденсатора (утолщенных линиях на верхней и нижней сторонах слоя), и смену конфигурации роев со временем. Ориентация молекул показана короткими тонкими отрезками без стрелок.

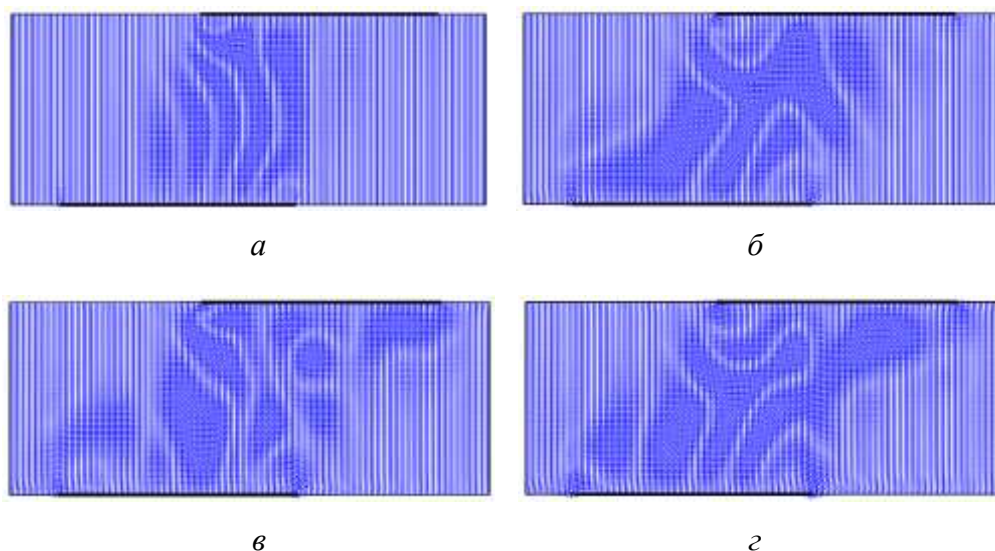


Рисунок 29 – Распределение углов поворота молекул жидкокристаллического слоя  $10 \times 4$  мкм в моменты времени: 1.8 мкс (а), 7.2 мкс (б), 10.8 мкс (в), 14.4 мкс (г)

В целом, проведенные расчеты показали, что предлагаемая математическая модель и вычислительная методика качественно описывают некоторые особенности поведения жидкокристаллических материалов и могут применяться при исследовании переходных динамических процессов и равновесного состояния жидких кристаллов под действием слабых механических, температурных и электрических возмущений.

## 5. Оценка сейсмической опасности и методы сейсмического районирования

### 5.1. Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности: разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия

Расчет оценок сейсмической опасности базируется на двух взаимосвязанных моделях: модели зон возникновения очагов землетрясений (зон ВОЗ) и модели затухания сейсмического эффекта с расстоянием на основе уравнения прогнозирования движения грунта (УПДГ), которое описывает зависимость характеристик колебания грунта на исследуемой площадке от параметров очага землетрясения, расстояния до источника, локальных условий площадки и др.

**5.1.1. Разработка алгоритмов для построения графиков повторяемости землетрясений.** В рамках исследований в 2023 году выполнялась разработка алгоритмов построения статистически обоснованных графиков повторяемости землетрясений, необходимых для параметризации моделей возникновения очагов землетрясений при вероятностном анализе сейсмической опасности. В основе алгоритмов заложено

моделирование набора каталогов землетрясений на основании исходного со случайной поправкой к магнитуде. Итоговый график повторяемости землетрясений строится на основе совокупного анализа графиков накопления по всем модельным каталогам с фиксированным шагом по магнитуде.

Процесс построения региональных графиков повторяемости складывается из следующих этапов: получение единого каталога сейсмических событий посредством регистрации землетрясений разными сетями сейсмостанций в течении длительного периода времени; проведение декластеризации единого каталога, использование различных методов для удаления форшоков и афтершоков основных сейсмических событий; анализ чувствительности и анализ состава единого каталога землетрясений после процесса декластеризации, оценка влияния и применимости используемых методов; построение регионального графика повторяемости и определение в нем минимальной представительной магнитуды посредством комплекса методов для дальнего расчета ВАСО.

Для тех случаев, когда в едином каталоге землетрясений имеется хорошее представление, как по количеству землетрясений, так и по всему интервалу времени наблюдения, задача построения региональных графиков повторяемости носит относительно тривиальный характер. В таком случае графики накопления землетрясений для отдельных рассматриваемых интервалов магнитуд – графики зависимости общего (накопленного) числа землетрясений этих магнитуд от времени регистрации будут иметь относительно линейную зависимость. Однако когда представление числа землетрясений в регионе недостаточное или графики накопления носят нелинейный характер для всего интервала времени регистрации, возникает задача статистически обосновать частоту повторяемости для каждого рассматриваемого интервала магнитуд.

Представлено решение данной задачи путем моделирования набора каталогов сейсмических событий на основании исходного каталога. При синтезе каждого нового каталога, для каждого землетрясения по нормальному распределению разыгрывается случайная поправка к магнитуде, где в качестве  $\sigma$  принимается погрешность в определении данной магнитуды, согласно исходному каталогу. Изменчивость представительности каталога во времени определяется на основе построения графиков накопления по каждому модельному каталогу. Итоговый график повторяемости землетрясений строится на основе совокупного анализа графиков накопления по всем модельным каталогам, с фиксированным шагом по магнитуде. Разработанные алгоритмы реализованы в среде MATLAB.

В ходе выполнения проекта разработаны и апробированы алгоритмы построения графиков повторяемости землетрясений с учетом неопределенностей в оценке магнитуд и изменением представительности регионального каталога землетрясений во времени. Закон повторяемости землетрясений для исследуемой территории, а также его некоторые вариации (с целью учета эпистемической неопределенности сейсмического режима) приведены в публикациях и представлены в докладах на тематических конференциях. Полученные зависимости можно использовать для вероятностного анализа сейсмической опасности (ВАСО).

В целом, эксперименты по изменению задаваемых параметров показали устойчивость полученных результатов. В данном исследовании при разумных вариациях задаваемых параметров по числу модельных каталогов и минимальному расстоянию между  $i$ -ой и  $j$ -ой точками изменения составляли в худшем случае порядка 0.02 повторяемости в год. Для увеличения точности необходимо уменьшить шаг по перебираемым значениям  $\text{tg } \alpha$ . Выбором оптимальной комбинации из набора получаемых повторяемостей в год по каждой магнитуде служит величина достоверности аппроксимации графиков повторяемости. Используемые алгоритмы разрабатывались для минимизации экспертного мнения и статистического обоснования относительно вопроса построения региональных графиков повторяемости землетрясений при малопредставительном и неоднозначном исходном каталоге сейсмических событий.

**5.1.2. Применение космоснимков в задаче сейсмического районирования.** В рамках исследований в 2023 году предложена методика обработки и анализа космоснимков территории с повышенной сейсмической активностью для выделения геологических неоднородностей (геологических разломов, блоков) на поверхности Земли.

Основу методики обработки и анализа пространственных данных составляют адаптированные алгоритмы дискретного шпурлет-преобразования (Shearlet toolbox и FFST). Решаются задачи фильтрации шума и выделения контура с контрастированием и цветовым кодированием для исследуемых визуальных данных наблюдений. В качестве примера выполнена обработка (контрастирование) космоснимка территории Республики Тыва. Предложенный способ применения алгоритма FFST позволил повысить точность выделения контуров и визуальное качество изображений изучаемых объектов.

Для выделения неоднородностей (геологических разломов, блоков) на земной поверхности применялась методика, состоящая из следующих этапов: подготовительный этап, исходное изображение форматируется под расчетный шаблон и намечается последовательность расчетных процедур; запуск и настройка алгоритмического

обеспечения шпирлет-преобразования, выбор конкретного алгоритма от яркости и контрастности изображения; загрузка и обработка исходных визуальных данных для различных расчетных условий; анализ получаемых изображений после применения шпирлет-преобразования; контрастирование изображения с помощью алгоритмов, которые задаются следующим образом: А – алгоритм FFST; Б – алгоритм Shearlet toolbox.

Для определения качественных возможностей используемых моделей контрастирования изображения сопоставлены полученные результаты с фрагментами линеаментов, лежащих в основе линеаментно-доменно-фокальной (ЛДФ) модели построения карт ОСР-2016. На рисунке 30 показан космоснимок с наложением сетки сейсмоактивных разломов. По выполненному анализу выявленных неоднородностей (геологических разломов, блоков) можно сделать следующий вывод: на контрастированных космоснимках большая часть разломов выделяется более четко, по сравнению с исходным снимком (рисунок 31).

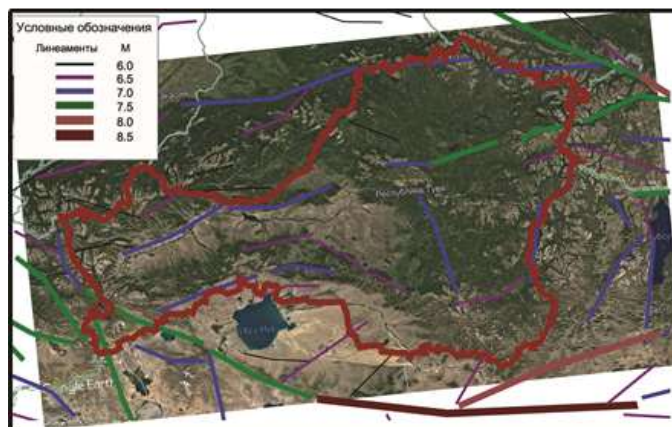


Рисунок 30 – Космоснимок для исследуемой территории (Республика Тыва) с наложением сетки сейсмоактивных разломов

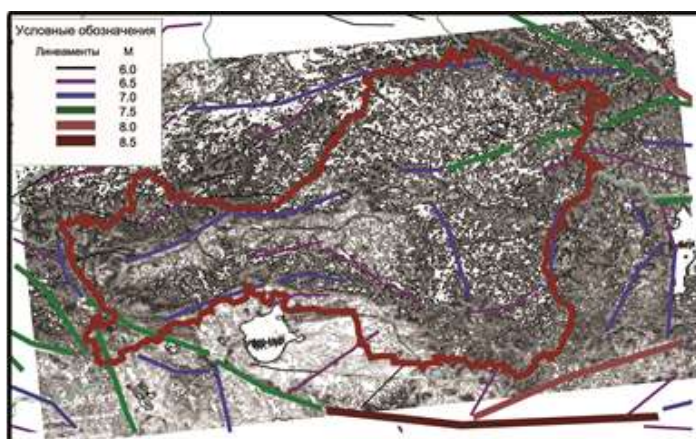


Рисунок 31 – Космоснимок с наложением сетки сейсмоактивных разломов (обработан алгоритмом Б)



Используемые алгоритмы обработки визуальных данных в виде контрастирования изображения на основе шпатель-преобразования можно использовать для выделения неоднородностей на космоснимках. Однако качество космических изображений для детального и точного выделения небольших или сложных элементов должно быть значительно выше, чем в используемом примере.

**5.1.3. Анализ физических характеристик (амплитуды колебаний и спектры реакции грунта) от землетрясений для Байкальской рифтовой зоны.** Определение достоверных параметров возможных землетрясений при инженерно-геологических изысканиях необходимы для обеспечения сейсмостойкости объектов с целью уменьшения ущерба от разрушений и человеческих жертв. Модель затухания описывает зависимость характеристик колебания грунта от параметров землетрясения, расстояния до источника, локальных условий площадки. Данная модель строится на основе региональных каталогов землетрясений. В 2022 году исследования были посвящены анализу физических характеристик (амплитуды колебаний и спектры реакции грунта) от землетрясений для Байкальской рифтовой зоны. Исходными данными являются 252 записи от 53 землетрясений. Критерием отбора являлись энергетический класс землетрясения ( $K \geq 11$ ) и максимальное эпицентральное расстояние ( $R \leq 300$  км). Для получения физических характеристик и обработки записей реализованы вычислительные алгоритмы в среде MATLAB. Применяемые алгоритмы основаны на методологии Тихоокеанского центра инженерных исследований землетрясений и адаптированы к особенностям сейсмического мониторинга Байкальского региона.

Суть обработки заключалась в следующем: выполнялось определение частот среза и применение 5-полюсного акаузального фильтра Баттерворта; путем интегрирования и дифференцирования в частотной области получены временные ряды ускорений, скоростей, смещений; на последнем этапе рассчитываются среднее геометрическое спектров реакции PGA и PGV от двух горизонтальных компонент (RotD50). Амплитуды RotD50 не зависят от азимута эпицентра землетрясения относительно регистрирующей станции и используются для построения современных моделей затухания.

В ходе обработки для каждого землетрясения вычислены пиковые ускорения грунта, пиковые скорости грунта и амплитуды спектра реакции ускорений для 22 периодов в диапазоне 0.05 – 10 с. Сравнение полученных данных с четырьмя современными зарубежными моделями затухания показало, что для энергетических классов 12 и 13 полученные значения несколько ниже. Результаты исследований

позволяют сформировать базу данных сильных движений для Байкальского региона и на этой основе разработать региональную модель затухания.

**5.1.4. Разработка алгоритмов и программных модулей для обработки записей землетрясений сильных региональных землетрясений.** В отчетном 2021 году разрабатывались алгоритмы и программные модули для обработки записей сильных региональных землетрясений. В основе алгоритмов лежит методология, использованная Тихоокеанским центром инженерных исследований землетрясений для реализации научного проекта NGA-West2. Цель обработки данных состояла в определении достоверных значений ускорений грунта и других параметров землетрясений от имеющихся записей временных рядов скоростей. Для анализа работы алгоритмов использовались записи землетрясений (одновременно записанные временные ряды ускорения и скорости), взятые из Европейской базы данных Rapid Raw Strong-Motion. Разработанные алгоритмы и реализованное программное обеспечение позволят в дальнейшем сформировать базу данных сильных движений для построения региональных моделей затухания.

## **5.2. Методы выделения предвестников землетрясений**

**5.2.1. Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учетом влияния внешних геодинамических факторов.** В исследованиях 2023 года выполнялось изучение предвестников сильных землетрясений по предшествующей сейсмоактивности. Проведен сравнительный анализ алгоритмов для построения модели «энергетический клин». В основе разрабатываемых алгоритмов лежит базовая гипотеза о существовании во временном ряде сейсмических событий специальной последовательности данных, которая трактуется как индикатор прогнозируемой сейсмической активности. Такая последовательность строится как затухающие колебания, имеющие выраженный фокус затухания, который определяет момент предполагаемого сброса сейсмического напряжения, т.е. как экстремальное землетрясение. С использованием временных рядов накопленных ретроспективных данных проводится выявление структур типа «энергетический клин» и сравнение расчетных фокусов клина с моментом реальных крупных землетрясений. Последующий статистический анализ позволяет оценить достоверность прогнозирования землетрясений с помощью выбранного метода.

Для статистического анализа сейсмических событий введено понятие критического сейсмического события. Критическим считалось сейсмическое событие с магнитудой,

превышающей некоторое выбранное значение  $M_0$ . Исходя из практических соображений, для последующего анализа было выбрано значение  $M_0 = 4.5$ . Далее для анализа выделены группы сейсмических событий, происходивших между двумя смежными критическими сейсмическими событиями. При этом предполагается, что группы сейсмических событий между смежными критическими сейсмическими событиями статистически независимы, и их характеристики можно изучать отдельно. Такое разбиение сейсмических событий на набор независимых групп позволило рассматривать не единый долговременный ряд сейсмических событий, а ансамбль независимых достаточно коротких сейсмических событий, начинающихся после сильного сброса упругого напряжения и заканчивающихся следующими сильным сбросом упругого напряжения.

Предлагаемый подход построения алгоритмов позволяет, с одной стороны, рассмотреть закономерности «накачки» упругих напряжений, заканчивающиеся их сбросом, а с другой стороны, дает возможность вычислить средние характеристики по ансамблю и ошибки средних значений, а также функции распределения характеристик ансамбля. Для каждой группы событий вычислены ряды первых разностей событий. Особенностью процедуры вычисления рядов первых разностей является нулевое среднее значение с точностью, определяемой ошибкой округления данных. Кроме того, появляется возможность независимо рассматривать положительные и отрицательные компоненты ряда для выявления верхней и нижней кромки «прогностического клина».

На каждом поднаборе данных выявляется набор точек, формирующих выпуклую ломаную линию, огибающую ряд сверху (для отрицательных значений – снизу). Для этого отфильтровываются те точки, которые лежат ниже (для отрицательных – выше) соседних точек и не могут участвовать в формировании огибающей. Результатом итеративного повтора такой процедуры является 3 исхода: монотонно растущая линия, спадающая или выпуклая ломаные линии. Применяется к полученным наборам точек метод наименьших квадратов, который позволяет получить уравнения верхней и нижней кромок клина, оценить точность аппроксимации и рассчитать момент наступления прогнозируемого события.

Для оценки эффективности полученных алгоритмов проведен сравнительный анализ временных рядов последовательных сейсмических событий Алтае-Саянской сейсмической области с целью выявления последовательностей «энергетический прогностический клин». В качестве рабочего материала для проверки всех алгоритмов использовался каталог, содержащий данные о 8682 событиях с магнитудами от 0.1 до 7.5 баллов. В ходе применения каждого алгоритма задавалось пороговое значение магнитуды, выделяющее критические события. Вычисления проводились для  $M_{\text{крит}} = 4.5$  и 5 баллов.

Оценивался процент корректно распознанных эпизодов, среднее значение и медиана ошибки определения момента критического события. По результатам проведенного анализа можно сформулировать следующие выводы. По мере совершенствования алгоритмов, достигнут высокий процент выявления структуры «энергетического клина» – 72–85 %. При этом достоверность распознавания увеличивается в зависимости от магнитуды предстоящего критического события. Как показали исследования, при повышении магнитуды доля корректных случаев распознавания увеличивается почти линейно.

**5.2.2. Выявление и анализ триггерных механизмов возникновения сильных землетрясений в системе Земля – Луна.** Исследования в 2022 году были посвящены выявлению и анализу триггерных механизмов возникновения сильных землетрясений в системе Земля – Луна. В рамках исследования проводилось сопоставление последовательности сильнейших землетрясений с магнитудой  $\geq 7$ , начиная с 1911 года, и приливные компоненты. Использовались каталог данных и приливные компоненты, которые анализировались с помощью сингулярного спектрального анализа (SSA – Singular Spectrum Analysis).

Сильные землетрясения являются экстремальным проявлением жизни сложной тектонофизической системы, которая долгое время «созревает» под действием многочисленных факторов, приходя на конечном этапе к катастрофе. Внешними триггерами землетрясений могут быть как детерминированные процессы, например движения небесных тел, так и другие физические факторы, имеющие стохастическую природу.

Для анализа землетрясений и сопоставления их с внешними факторами рассмотрен каталог землетрясений с магнитудой  $\geq 7$ , начиная с 1911 года. Данные получены с помощью портала The Significant Earthquake Database. Полученный каталог данных анализировался с помощью сингулярного спектрального анализа. При использовании данного метода ставилась задача выделить отдельные аддитивные составляющие исходного ряда, такие как тренд (гладкая и медленно меняющаяся часть ряда), различные колебательные и периодические компоненты, а также шумовую компоненту.

При работе применен метод сингулярного спектрального анализа (ССА «Гусеница»), который основан на анализе главных компонент и позволяет исследовать стационарные и нестационарные временные ряды. Используя инструмент «Прогноз» программы «Гусеница» можно визуализировать обнаруженные низкочастотные процессы во временном ряду. Исследуемый ряд составляют магнитуды последовательных

землетрясений (порядковая нумерация). Поскольку шкала времени представлена неявно, то фактически анализируется форма огибающей ряда магнитуд, что позволяет получать своеобразную «геометрическую» характеристику ряда. На такого рода информации основывается известная методика «энергетический прогностический клин», которая предложена и развивается В. Г. Сибгатулиным. Выделение закономерностей в данных о предвестниках землетрясений является актуальной задачей, поскольку до сих пор ни один предложенный метод не может с высокой точностью определить время, место и силу землетрясений.

### **5.3. Космическая система GRACE и геодинамические процессы**

**5.3.1. Моделирование данных наблюдений природных геодинамических катастроф на основе анализа спутниковых измерений космической системы GRACE над сейсмоактивными районами сильнейших землетрясений.** За последние десятилетия исследования гравитационного поля и его аномалий с применением космических технологий существенно активизировались. Спутниковые данные КС GRACE позволяют на глобальном и локальном уровне с достаточной точностью исследовать геодинамику очаговых зон сильных землетрясений. В 2023 г., на основе обобщения ранее полученных результатов (2021–2022 гг.), предложена методика гистограммно-энтропийного анализа гравитационных аномалий по данным КС GRACE для решения актуальных задач геомониторинга сильнейших подводных землетрясений, которая состоит в следующем:

- вычисляются гистограммы экспериментальной величины параметра EWH для ежемесячных данных;
- вычисляется средняя гистограмма за все время наблюдения, которая считается приближенной оценкой функции распределения измеряемой величины параметра EWH, принимая тем самым нулевую гипотезу, что изменения гравитационного поля по всей Земле имеют единую природу;
- проверяются статистические различия локальных географических точек и выделяются географические области с близкими характеристиками;
- путем вычисления коэффициентов выявляются корреляционные зависимости между выделенными крупными географическими областями;
- определяются существующие временные зависимости суммарной величины параметра EWH для каждой из выделенных географических областей;
- сопоставление выявленных временных зависимостей гравитационных аномалий в выделенных географических областях показывает наличие годовой цикличности, что

указывает на преобладающее влияние климатических процессов в изменчивости гравитационного поля Земли, измеряемой величиной EWH;

– на базе полученной оценки функции распределения величины EWH определяется величина средней информационной энтропии для выбранной совокупности данных (по всей Земле за выбранный месяц или для выбранной географической области за тот же период времени);

– определяется зависимость информационной энтропии от размера географической области для оценки размеров локальной аномалии функции средней энтропии;

– обобщаются полученные для различных случаев варианты поведения функции средней энтропии, обращая внимание на колебания и тренд для выделенной области, и среднее значение энтропии по всей Земле в текущий месяц;

– на основе месячных гистограмм определяется новая характеристика – величина совокупной перемещенной эквивалентной массы на Земле («Масса»);

– определяется временная зависимость «Массы» за все время наблюдений;

– определяется временной тренд полученной зависимости и ее колебательные составляющие, освобождая от шума, связанного с естественной изменчивостью процессов массопереноса на Земле и с точностью измерений исходной величины параметра EWH.

**5.3.2. Анализ сейсмоактивных районов Курило-Камчатской дуги и происходящих здесь геодинамических процессов на основе измерений, выполненных космической системой GRACE.** В исследованиях 2022 года для анализа сейсмоактивных районов Курило-Камчатской дуги и происходящих здесь геодинамических процессов применяются измерения, выполненные КС GRACE. Дополнительно для анализа сейсмической активности в исследуемых районах использовалась геофизическая информация, содержащаяся в каталоге USGS, за период 2006–2013 гг. Построены цифровые карты распределения параметра EWH относительно очаговых областей сильных землетрясений с магнитудой  $M_w > 8$  для фоновых и возмущенных условий. Рассчитан модифицированный индекс аномальности и на его основе построены цифровые карты наблюдаемых гравитационных аномалий.

В ходе исследований и расчетов получены следующие результаты. Создан архив по сейсмической активности в пиковых областях сильнейших Симуширских (2006 г., 2007 г.) и глубинного Охотоморского землетрясений (2013 г.) за период с 2006 по 2011 гг. и с 2012 по 2013 гг., соответственно. Выявлено, что сейсмическая активность по данным USGS относительно очага Симуширского землетрясения продолжалась с июля 2006 г. по март 2009 г. Обнаружено, что в пиковой области Охотоморского землетрясения с  $M_w = 8.3$

геодинамическая активность происходила с апреля 2013 г. по июль 2013 г. При проведении анализа сейсмической активности выявлено, что относительно спокойными в сейсмическом плане месяцами, то есть фоновыми, в районе Симуширского землетрясения был январь 2006 г., а в районе Охотоморского землетрясения – январь 2009 г.

Построены цифровые карты распределения EWH для фоновой и «возмущенной» геосреды относительно очаговых зон сильнейших Симуширских и Охотоморского землетрясений на основе спутниковых данных КС GRACE. Рассчитан модифицированный индекс аномальности и построены цифровые карты аномальных областей, наблюдаемых относительно областей катастрофических землетрясений с  $M_w > 8$ . Дальнейшее изучение выявленных аномалий, возникающих при сильных подводных землетрясениях, должно быть направлено на уточнение их параметров и оценку геометрических характеристик относительно очаговых областей изучаемых землетрясений.

**5.3.3. Разработка и тестирование методики сравнительного анализа и интерпретации измерений, полученных космической системой GRACE.** Исследование 2021 года было посвящено разработке и тестированию методики сравнительного анализа и интерпретации измерений, полученных космической системой (КС) GRACE. При этом использовались данные глобальной базы сейсмического мониторинга (USGS) для уточнения геодинамических параметров процесса подготовки катастрофических подводных землетрясений, произошедших в Мировом океане за последние 20 лет. В качестве амплитуды изменения силы тяжести используется параметр EWH (Equivalent Water Height или эквивалентная высота воды над контуром геоида, см). Значения этого параметра определяются на основе спутниковых измерений и расчетов гармонических коэффициентов геопотенциала относительно среднего поля (модели). Ретроспективный анализ данных КС GRACE (распределения параметра EWH) позволяет выявить качественные и количественные изменения в исследуемой очаговой области сильнейших землетрясений за определенные временные интервалы в период их интенсивной геодинамической активности. Цель исследования – поиск закономерностей в распределении параметра EWH, который определяется по данным измерений КС GRACE, относительно области очаговых зон сильнейших подводных землетрясений в период их подготовки (активизации форшокового процесса).

Работа состояла из следующих этапов: обзор применения технологии GRACE для решения задач геодинамики; разработка вычислительной методики и представление моделей цифрового картирования вариаций параметра EWH; описание

экспериментальных исследований гравитационных аномалий для области сильнейших землетрясений: серии чилийских землетрясений (2010, 2014, 2015 гг.), катастрофического Японского (2011 г.) и глубоководного Охотоморского (2013 г.); обсуждение результатов сравнительного анализа вариаций EWN в период геодинамической активности и фоновой сейсмичности. В итоге показано, что выделение особенностей и сравнительный анализ вариаций основных параметров двух систем наблюдений, относительно изучаемых очаговых областей, позволяет решать прогностические задачи геодинамического мониторинга сильных землетрясений.

В современных геодинамических исследованиях активно используются данные космических систем GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment, NASA (США) – DLR (Германия) – ESA (Европейское космическое агентство)) и GRACE-FO (GRACE-follow on, в той же спутниковой конфигурации), изучающие пространственно-временные вариации гравитационного поля Земли с периодом 30 суток. На сегодняшний день накоплен большой массив данных за периоды работы GRACE (2002–2017 гг.) и GRACE-FO (с 2018 г. по настоящее время). В этих проектах реализован метод межспутникового слежения (Satellite-to-Satellite Tracking, SST). Два спутника-близнеца Grace 1 и Grace 2 движутся на расстоянии 220–250 км друг от друга по околополярной орбите. Их высокоточное позиционирование осуществляется привязкой к навигационной системе GPS. Расхождение привязки с наземными данными лазерной локации составляет 2–3 см. Дальность и скорости изменения расстояния между спутниками Grace 1 и Grace 2 определяются на высотах 300 – 500 км. Измерения проводятся дальномером KBR на частотах К (24.5 ГГц) и Ка (32.7 ГГц). Погрешность измерений на GRACE не превышает 10 мкм, а на GRACE-FO – не более 1 мкм.

Для решения поставленных задач анализа и интерпретации данных наблюдений космической системы GRACE была предложена вычислительная методика, которая включает: построение цифровых карт изменения параметра EWN относительно исследуемой сейсмоактивной области; обнаружение и описание вариаций этого параметра относительно очаговой зоны (относительно гипоцентра изучаемого землетрясения); выделение фонового геодинамического (сейсмического) режима и построение поля разности EWN, характеризующего отклонение сейсмически активного состояния изучаемой области от фонового; выполняется также анализ и визуализация поля различных вариантов относительных отклонений (индекс аномальности).

С помощью разработанной вычислительной методики и выполненного детального анализа цифровых карт распределения параметра EWN осуществлен анализ процессов подготовки сильнейших землетрясений в сейсмоактивных районах Тихого океана,



произошедших за последние 20 лет. При этом актуальными являются вопросы: пригоден ли параметр EWN для уточнения геодинамических особенностей во время подготовки сильнейших землетрясений, а также можно ли использовать этот параметр в качестве характеристики для выявления связи напряженно-деформированного состояния геосреды и форшоковых процессов.

Отметим, что ранее в работах исполнителей проекта по данному направлению исследований проводился ретроспективный анализ геофизической информации о серии из трех сильнейших землетрясений с магнитудой  $M_w$  более 8.0, которые произошли в единой зоне субдукции вдоль тихоокеанского побережья Чили в 2010, 2014 и 2015 гг. На основе разработанной вычислительной методики анализа данных измерений GRACE и данных глобального сейсмического мониторинга изучалась очаговая область катастрофического Чилийского землетрясения 2010 г. с магнитудой  $M_w = 8.8$  в сравнении с последующими сильнейшими землетрясениями этого региона, произошедших в 2014 и 2015 гг.

Были построены цифровые карты изменения параметра EWN над контуром геоида относительно исследуемой сейсмоактивной области Чилийских землетрясений, а также для «фоновых состояний» сейсмического режима в этой области. Выделена отрицательная аномалия вариаций параметра EWN, которая наблюдалась в феврале 2010 г. к западу от эпицентра катастрофического землетрясения и ориентирована в направлении NE-SW. В 2014 и 2015 гг. также наблюдались аномальные области в сейсмоактивных районах этих сильных землетрясений. Полагаем, что образование соответствующей аномальной области связано с активизацией глубинных геодинамических процессов в этот период наблюдения.

В отчетный период выполнено моделирование и детальный анализ особенностей изменчивости параметра EWN, а также связь этого параметра с глобальными геодинамическими и геофизическими процессами относительно очаговых зон катастрофических землетрясений: Японское (2011 г.) и Охотоморское (2013 г.).

Исследованы особенности очаговой области Японского землетрясения с  $M_w = 9.1$  по данным каталога USGS за период с 2010 по 2012 гг. Сформирован архив данных, полученных на основе измерений космической системы GRACE. На основе разработанной вычислительной методики уточнены размеры гравитационных аномалий, обусловленных процессами в очаговой зоне подводного землетрясения с  $M > 8$ . По спутниковым данным построены пространственные модели вариаций параметра EWN относительно очаговой зоны Японского землетрясения 2011 г. для возмущенных и фоновых условий геосреды. Изучены вариации параметра EWN с периодом 30 суток относительно гипоцентральной области Японского землетрясения за исследуемый период.

Обнаружено, что во время подготовки катастрофического землетрясения в течение трех месяцев в этой области существенно возрастают значения параметра EWH, при афтершоковой активности значения EWH понижаются. Вариации этого параметра относительно очаговой зоны могут быть обусловлены различными геофизическими причинами.

На основе предлагаемой методики было рассчитано распределение индекса аномальности в виде  $\delta EWH(\varphi, \lambda, t)$  (относительное отклонение в период активизации от фонового сейсмического режима) и построены уточненные цифровые карты гравитационных аномалий относительно исследуемой очаговой зоны (рисунок 32). Полагаем, что образование аномальной области связано с геодинамическими процессами в регионе. Полученные результаты свидетельствуют о том, что измерения гравиметрических систем GRACE и GRACE-FO применимы для анализа очаговых зон сильнейших землетрясений.

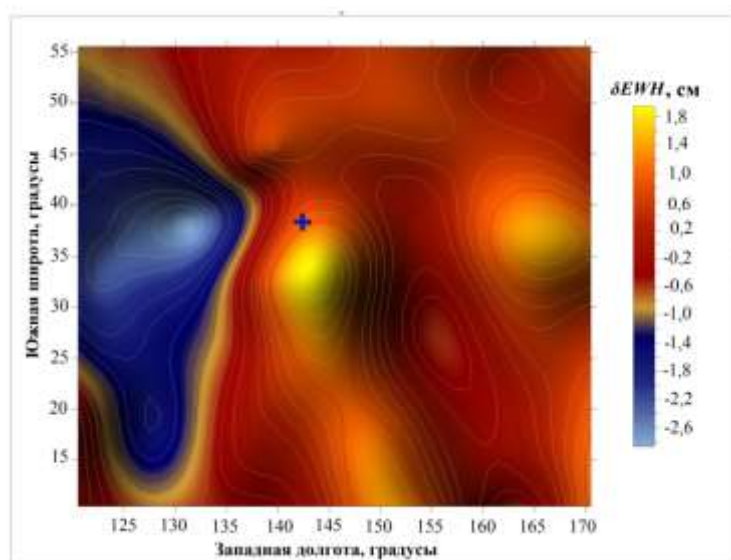


Рисунок 32 – Визуализация области, выделенной по индексу аномальности в виде  $\delta EWH(\varphi, \lambda, t)$ , относительно очаговой области Японского землетрясения 2011 г. (крестиком отмечено местоположение эпицентра)

Также на основе каталога USGS выполнен анализ наиболее существенных характеристик очаговой зоны землетрясения с магнитудой  $M_w = 8.3$ , которое произошло 24 мая 2013 г. в Охотском море к западу от п-ва Камчатка. Согласно имеющейся классификации Охотоморское землетрясение относится к глубокофокусным, т.к. возникло на глубине 598.1 км. Оно сопровождалось активными афтерфоршоковыми процессами, что не характерно для этого класса землетрясений. По данным Камчатского филиала

Геофизической службы РАН (ГС РАН) глубина афтершоков варьировалась в пределах от 425 до 720 км. Предварительная оценка размеров очага составила 400×200 км.

Выполнен анализ геодинамических особенностей сильного глубоководного Охотоморского землетрясения с  $M_w = 8.3$  по данным USGS за период с 2008 по 2014 гг. Для выявления особенностей аномалии вариаций параметра EWN относительно очаговой зоны землетрясения построены карты отклонений EWN, а также карты распределения модифицированных индексов аномальности  $\delta EWN$  и  $\omega EWN$  для периода времени – май 2013 г. Выполнен статистический анализ результатов расчетов. По картам распределения индексов аномальности  $\delta EWN$  и  $\omega EWN$  выполнена оценка местоположения положительной аномалии относительно эпицентра. Область этой аномалии ориентирована в направлении SW-NE (рисунок 33). Полагаем, что образование выделенной аномалии связано с активными геодинамическими процессами в исследуемом регионе в апреле – июле 2013 г.

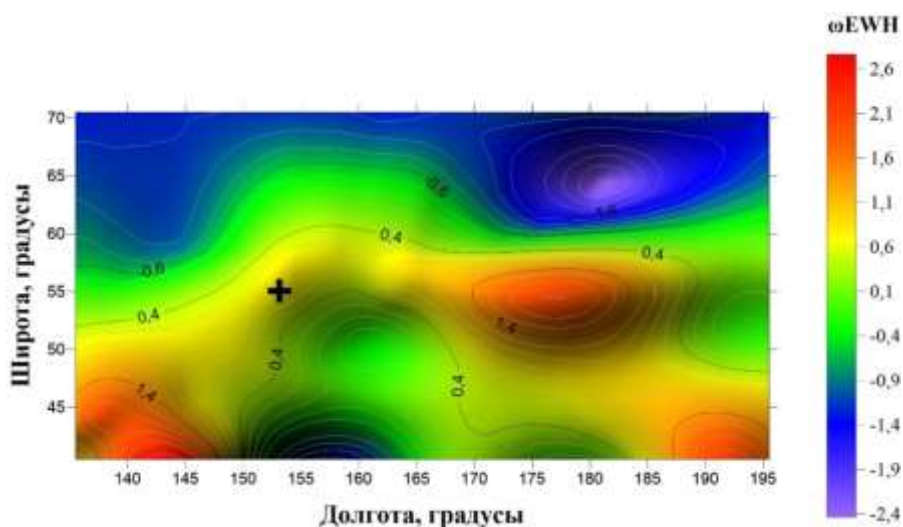


Рисунок 33 – Визуализация пространственного распределения индекса аномальности в виде  $\omega EWN$  (усредненное относительное отклонение в период активизации от фонового сейсмического режима) относительно очаговой зоны Охотоморского землетрясения (крестиком отмечено местоположение эпицентра)

Выполнен сравнительный анализ особенностей изменения параметра EWN над геоидом на основе спутниковых измерений космических систем GRACE и GRACE-FO. Оценка производилась для Земли в целом, включая районы Суши и Мирового океана. Интерпретация состояния геосреды выполнялась с использованием цифровых карт пространственного распределения параметра EWN на основе гистограммного подхода и корреляционного анализа. Анализ, проведенный за отчетный период, ограничивается относительными изменениями параметра EWN в географическом пространстве (регионы

Суши и Океана) во времени с интервалами примерно в один месяц. В итоге, изучена временная зависимость значения «Массы» для Океана и Суши по данным GRACE и GRACE-FO. Полиномиальные тренды для Суши и Океана представлены на рисунке 34. Синий график соответствует Океану, красный – Суше, а точки представляют соответствующие тренды (полиномы 3-й степени). По осям время указано в годах, а величина «Масса» – в тоннах. Как видно из рисунка, тренды для Суши и Океана похожи друг на друга. Годовые и полугодовые колебательные моды величин «Массы» для Океана и Суши показаны на рисунке 35. Представлены (колебательные) тренды Суши (красный) и Океана (синий), свободные от «шума».

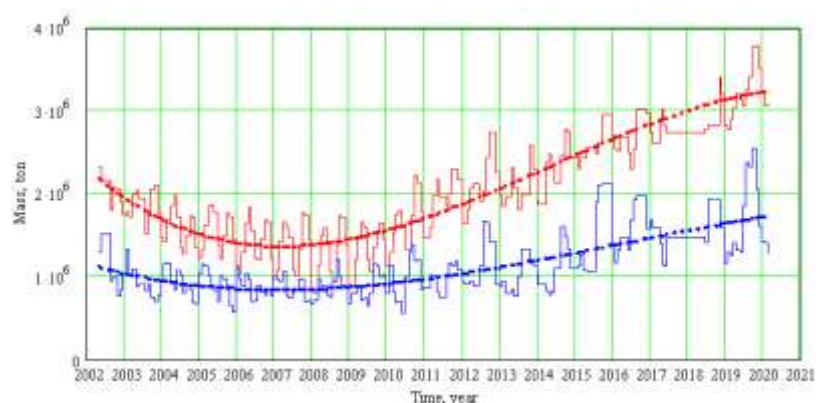


Рисунок 34 – Полиномиальные тренды значения «Массы» для Океана и Суши по данным спутниковых систем GRACE и GRACE-FO

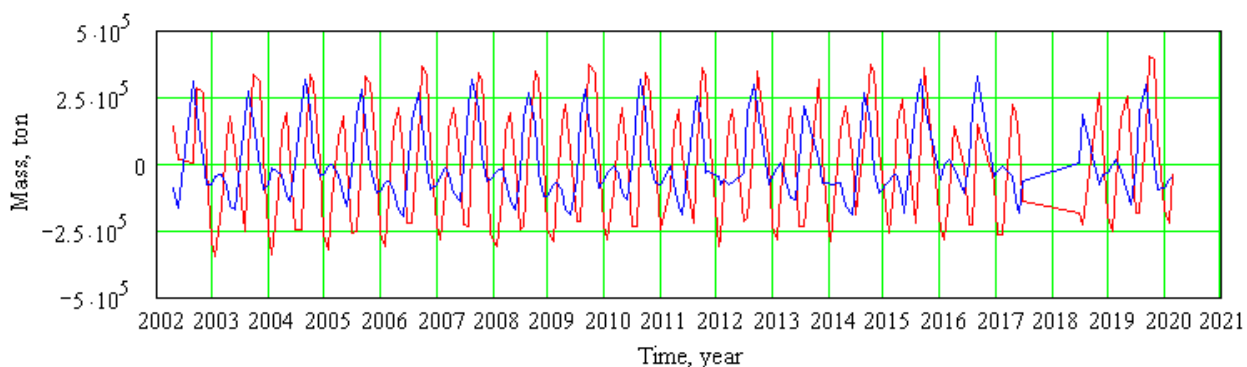


Рисунок 35 – Годовые и полугодовые колебательные моды величин «Массы» для Океана и Суши

На основе статистического анализа изменений параметра EWN для Суши и Мирового океана показано, что временные закономерности, полученные по наблюдениям миссии GRACE, сохраняются в данных новой миссии GRACE-FO для основных обнаруженных аномалий. Следовательно, данные GRACE и GRACE-FO хорошо согласуются друг с другом. В данных для Земли в целом, а также для Суши и Океана выявляются долгосрочные и краткосрочные тренды, т.е. колебательные составляющие.

## 5.4. Эффекты в атмосфере и сейсмичность

**5.4.1. Анализ дополнительных факторов и эффектов взаимодействия литосферно-атмосферных процессов.** В исследованиях 2023 года изучались вариации слоя стратосферного озона для регистрации медленных колебаний атмосферы. Вариации озона отслеживаются наземными и спутниковыми средствами измерений. Источником колебаний является акустическое излучение в атмосферу при деформационных событиях в тектонических плитах. Предлагается методика обработки, анализа и интерпретации вариации слоя озона в период сейсмической активности. Исследованы вариации слоя озона в возмущенной атмосфере при сильных землетрясениях в различных климатических зонах (экваториальные, умеренные и полярные широты). Для решения поставленной задачи предлагается следующая структура (этапы) методики изучения вариаций озона в атмосфере над очаговыми зонами сильных землетрясений: формирование архива спутниковых данных для исследуемого района; выборка данных (дата, время, координаты, магнитуда, озон); обработка полученных временных рядов пакетом «Гусеница SSA»; получение новых (расчетных) временных рядов (озона, температуры); анализ расчетных временных рядов (периодограммы, цифровые карты, графики, гистограммы); интерпретация результатов исследования, в рамках обоснования применимости гипотезы об использовании вариации слоя озона для выявления колебаний в атмосфере в период сильных землетрясений.

Выполнялись построения временных рядов озона по исходным данным наблюдений (этап 1). С учетом данных об исследуемом землетрясении (этап 2) ряды обрабатывались с помощью пакета прикладных программ «Гусеница SSA» (этап 3). Производилось разложение рядов на главные компоненты, которые представляют собой новые ряды, образованные из исходных рядов. «Гусеница» ранжирует новые ряды по убыванию энергии (этап 4). Количество новых (расчетных) рядов зависит от размеров «окна» при разложении ряда. Применялись окна размером менее половины длины исходного ряда озона. Далее производилось прореживание компонентов (новых рядов) – удалялся ряд, отвечающий тренду, и ряды компонентов с малой энергией (этап 5).

Экспериментальные данные о количестве озона претерпевают сезонные изменения, на количество озона также влияют вариаций солнечной активности. Удаление тренда позволяет, в основном, избавиться от влияния сезонного хода озона и вариаций солнечной активности на оценку основного информационного параметра – периода колебаний слоя стратосферного озона. После прореживания суммировались оставшиеся компоненты и строились преобразованные ряды озона, как для времени интенсивной сейсмической активности, так и для фоновых условий (относительно пониженная сейсмическая

активность). Производились дискретные преобразования Фурье этих рядов. При этом для выделения характерных особенностей Фурье-образов добавлялось 40000 нулей, в соответствии с процедурой. Далее строились периодограммы, которые описывали зависимость квадрата модуля амплитуды спектрального компонента от периода (квадрат модуля амплитуды пропорционален мощности колебаний слоя озона). Затем выполнялась интерпретация результатов расчетов с целью обоснования применимости гипотезы об использовании вариации слоя озона для выявления колебаний в атмосфере в период изучаемого сильного землетрясения с учетом климатической зоны (этап б).

Показано, что стратосферный озон позволяет обнаруживать колебания в атмосфере с частотой 7–10 Гц. Рассмотрены границы применимости гипотезы об использовании вариации слоя озона для выявления медленных колебаний в атмосфере в период сильных сейсмических событий. Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что предлагаемая методика работает при определенных условиях наблюдений в средних и высоких широтах, но не позволяет обнаруживать указанные колебания в тропических широтах.

**5.4.2. Атмосферные колебания температуры во время подготовки Байкальских землетрясений 2020–2021 гг. по спутниковым данным.** Исследование в 2022 году было посвящено изучению аномальных вариаций температуры в тропосфере во время подготовки землетрясений ( $M > 4.0$ ), зарегистрированных с сентября 2020 г. по май 2021 г. в пределах Байкальской рифтовой зоны на основе измерений радиометра ATMS/SNPP. В результате возбуждения инфразвуковых волн в атмосфере наблюдались колебания температуры на изобарическом уровне 300 гПа. Увеличение мощности колебания температуры в тропосфере сейсмоактивного региона является следствием движения земных блоков во время сейсмических процессов. Причем это движение было неравномерным и характеризовалось толчками с периодом 96 часов или около 3–4 суток.

Известно, что в сейсмоактивных регионах с крупными блоковыми структурами во время подготовки землетрясения происходят медленные, но интенсивные колебания земной коры. Подобные колебания возникают, как правило, в месте пересечения разломов и имеют период от 2 до 10 (и более) дней, т.е. частота составляет 10–6 Гц и менее. Воздействуя на атмосферу подобно поршню большой площади, данные колебания способны генерировать инфразвуковые волны, возбуждающие сейсмогравитационные колебания температуры и давления в тропосфере. Исследование временных вариаций этих физических характеристик позволит получить информацию об изменениях в земной коре, связанных с геодинамическим процессом и подготовкой землетрясений.

В настоящее время в системе «атмосфера – подстилающая поверхность» для оценки профилей температуры, влажности и давления используют данные дистанционного зондирования, полученных со спутников Метеор-М2 № 2 (Россия), SNPP (Suomi NPP, США), FY-3 (Fengyun-3, Китай) и NOAA/POES (National Oceanic and Atmospheric Administration/Polar Orbiting Environmental Satellites, США). Цель исследования состояла в выявлении аномальных вариаций температуры в тропосфере во время подготовки землетрясений ( $M > 4.0$ ), зарегистрированных с сентября 2020 г. по май 2021 г. в пределах Байкальской рифтовой зоны на основе измерений радиометра ATMS/SNPP.

Для изучения атмосферных возмущений над сейсмоактивным южным районом Прибайкалья использовались геофизические данные о сейсмособытиях, произошедших в исследуемый период. Согласно информации Единой Геофизической службы РАН очаги Байкальских землетрясений располагались в пределах Байкальской рифтовой зоны, представляющей собой систему кайнозойских рифтовых впадин и окружающих их хребтов. Сведения о вертикальных профилях атмосферы получены из измерений сканера ATMS (космический аппарат SNPP), который был выведен на солнечно-синхронную приполярную орбиту 28 октября 2011 г. При движении спутника S-NPP по орбите выполняется перекрестное сканирование. Ширина полосы сканирования составляет 2300 км. Пространственное разрешение радиометра около 30–50 км.

Для усвоения данных разработан специализированный пакет прикладных программ, позволяющий получать значения температуры  $T$  над исследуемым районом на различных изобарических уровнях за определенный временной интервал. В дальнейшей обработке рядов  $T$  использовалась программа «Гусеница» (Caterpillar SSA), в которой реализован метод главных компонент. Выполнялось разложение рядов температуры на главные компоненты, далее из ряда  $T$  исключался тренд, после чего строились периодограмма ряда.

Выполнен анализ результатов обработки температурных рядов на уровне 300 гПа в районе Байкальских землетрясений (21.09.2020, 11.01.2021, 03.05.2021). Выделен специфический пик колебаний с периодом 92–96 часов, который обнаружен в моменты основных толчков Байкальских землетрясений, произошедших с сентября 2020 г. по май 2021 г. Можно предположить, что увеличение мощности колебания температуры в тропосфере сейсмоактивного региона является следствием движения земных блоков во время сейсмических процессов. Причем это движение было не равномерным и характеризовалось толчками с периодом 96 часов или около 3–4 суток.

**5.4.3. Исследования средствами ДЗЗ очаговых зон сильных региональных (Байкальских) землетрясений.** В 2021 г. были изучены сильные землетрясения ( $M > 5.0$ ), зарегистрированные с 2008 по 2020 гг. в пределах Байкальской рифтовой зоны. Выделены «фоновые» временные интервалы, когда землетрясения не наблюдались. Влияние сейсмической активности на озоновый слой исследовалось на основе анализа трендов общего содержания озона (ОСО), полученных по спутниковым данным Aura/OMI, с помощью сингулярного спектрального анализа. Показано, что во время подготовки сейсмических событий тренды ОСО, по сравнению с «фоновыми» трендами озона, обладают более высокой вариабельностью. Обнаружено, что при подготовке землетрясений период колебаний первой гармоники ОСО уменьшается в 1.5–2 раза по сравнению с периодом «фоновой» первой гармоники озона. Предполагается, что изменение состояния озонового слоя может служить индикатором подготовки сильных сейсмических событий наряду с другими известными предвестниками для района Байкальской рифтовой зоны.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 2023 году завершен полный цикл исследований, запланированных по теме проекта. Получены результаты, приоритет которых подтверждается рейтинговыми публикациями коллектива исполнителей проекта в ведущих Российских и зарубежных научных журналах.

1. Изучен ряд задач конвекции с целью выделения корректных постановок, позволяющих построить точные решения для описания тепломассообмена в областях с границами раздела, в том числе в условиях фазовых переходов жидкость – пар. Построены новые точные решения, на основе которых изучены особенности конвективных режимов в жидкостных системах, подверженных внешним тепловым воздействиям. Предложен новый метод построения решений дифференциальных уравнений с частными производными, основанный на использовании контактных отображений и позволяющий получить новые симметрии уравнений механики. Построены точные решения двумерного уравнения неоднородной акустики, получены условия на плотность среды и скорость звука, обеспечивающие существование класса точных решений с функциональным произволом. Предложен новый метод построения приближенных решений, описывающих динамику течения в дальних областях безимпульсных турбулентных следов, в рамках модели свободной осесимметричной турбулентной струи.

2. Сформулированы условия на входные данные, обеспечивающие устойчивость нестационарных точных решений уравнений движения вязкой теплопроводной жидкости в приближении Обербека – Буссинеска, описывающих динамику двухслойных систем при воздействии внешних тепловых напоров. Разработаны и реализованы вычислительные алгоритмы для построения точных в групповом смысле трехмерных решений и расчета конвективных режимов. На основе двумерного точного решения, принадлежащего классу решений Бириха, получены критические характеристики устойчивости течений испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным газовым потоком. Построены карты режимов течений и режимов неустойчивости в жидкостных системах с внутренними границами раздела.

Проведен сравнительный анализ результатов прямого численного моделирования динамики локально нагреваемой двухфазной системы в замкнутой области на основе уравнений Навье – Стокса и Обербека – Буссинеска. Доказана корректность применения приближения Буссинеска для описания термогравитационной конвекции в областях с деформируемой границей раздела.

3. Разработана математическая модель для описания годового термического режима вечной мерзлоты, основанная на стратификации мерзлотного слоя по вертикальной координате по составу несущей фазы и использовании входных параметров, полученных на основе данных натуральных измерений. Изучен годовой ход температуры и динамика вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с учетом подвижных границ фазовых переходов.

В системе ROMS (Regional Oceanic Modeling System) проведено численное моделирование динамики течений в глубоководном водоеме, индуцированных ветровым воздействием. Изучено влияние различных сценариев ветровой нагрузки на структуру течений и параметры возбуждаемых внутренних волн.

4. Разработаны математические модели для описания процессов зарождения и продвижения трещин в межблочных прослойках на основе силового критерия и интегрального критерия трещинообразования. Предложены вычислительные алгоритмы и программы, реализующие эти модели на многопроцессорных системах кластерной архитектуры. Получены результаты расчетов распространения системы трещин по мере прохождения волн в блочном массиве горных пород. Проведено сравнение с расчетами по деформационному критерию трещинообразования.

Созданы расчетные методики для решения задач статики анизотропных слоистых пластин и оболочек из композитных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Построены определяющие уравнения многослойных упругих и вязкоупругих микрополярных пластин и оболочек, учитывающие микроструктуру материала. Созданы параллельные вычислительные алгоритмы для решения динамических задач на основе метода двуциклического расщепления по пространственным переменным. Разработаны компьютерные программы с распараллеливанием вычислений для суперкомпьютеров графической архитектуры для анализа поведения жидких кристаллов в неоднородном электрическом поле.

5. Усовершенствована вычислительная технология вероятностного анализа сейсмической опасности, а также алгоритмическое и программное обеспечение для расчета параметров модели сейсмического воздействия. Получены результаты исследования моделей в задачах сейсмического мониторинга природных и технических объектов (структурно неоднородных грунтовых массивов, зданий и сооружений), которые могут служить индикаторами подготовки сильных сейсмических событий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Comparative study of convection characteristics for a system with deformable interface based on the Navier – Stokes and Oberbeck – Boussinesq equations // *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* – 2023. – V. 381. – Art. 20220078.  
DOI: 10.1098/rsta.2022.0078. (WoS Q1; Scopus Q1)
2. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Application of a partially invariant exact solution of the thermosolutal convection equations for studying the instability of an evaporative flow in a channel heated from above // *Symmetry.* – 2023. – V. 15, Iss. 7. – Art. 1447.  
DOI: 10.3390/sym15071447. (WoS Q2; Scopus Q1)
3. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Овчарова А. С. Моделирование конвекции в двухфазной системе в условиях диффузионного испарения в замкнутой области // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2023. – Т. 64, № 4. – С. 14–26.  
DOI: 10.15372/PMTF202215141. EDN: DRVQWT. (ядро РИНЦ)
4. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Ovcharova A. S. Simulation of convection in a two-phase system under conditions of diffusive evaporation in a closed region // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2023. – V. 64, Iss. 4. – P. 564–574.  
DOI: 10.1134/S0021894423040028. (WoS Q4; Scopus Q3)
5. Андреев В. К., Лемешкова Е. Н. Тепловая конвекция двух несмешивающихся жидкостей в трехмерном канале с полем скоростей специального вида // *Прикладная математика и механика.* – 2023. – Т. 87, № 2. – С. 200–210.  
DOI: 10.31857/S0032823523020029. EDN: TYSYHA. (ядро РИНЦ)
6. Andreev V. K., Uporova A. I. Initial boundary value problem on the motion of a viscous heat-conducting liquid in a vertical pipe // *Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics.* – 2023. – V. 16, Iss. 1. – P. 5–16. EDN: EOQJOO.  
(WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
7. Andreev V. K., Pinykh A. A. Comparative analysis of the analytical and numerical solution of the problem of thermocapillary convection in a rectangular channel // *Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics.* – 2023. – V. 16, Iss. 1. – P. 48–55. EDN: LGHIKV. (WoS без квартиля, Scopus Q3, ядро РИНЦ)

8. Андреев В. К., Латонова Л. И. Решение обратной задачи, описывающей медленную тепловую конвекцию во вращающемся слое // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2023. – Т. 44. – С. 3–18.  
DOI: 10.26516/1997-7670.2023.44.3. EDN: XYIUSM. (WoS без квартиля; Scopus Q2))
9. Efimova M. V. Construction of an exact solution of special type for the 3D problem of thermosolutal convection in two layered system // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2023. – V. 16, Iss. 1. – P. 26–34. EDN: GZTDQG.  
(WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
10. Степанова И. В., Зализняк В. Е. Численное решение задачи нестационарной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2023. – Т. 33, вып. 3. – С. 365–381. DOI: 10.35634/vm 230212. EDN: ZSVLGA.  
(WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
11. Vakhrameev I. V., Magdenko E. P. Solution of convection problem in a rotating tube by the Fourier method // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2023. – V. 16, Iss. 1. – P. 17–25. EDN: ALTQUO. (WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
12. Капцов О. В., Капцов Д. О. Решения некоторых волновых моделей механики // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 2. – С. 176–185.  
DOI: 10.31857/S003282352302008X. EDN: TZNDZR. (ядро РИНЦ)
13. Капцов О. В. Решения системы двумерных уравнений Эйлера и стационарные структуры в идеальной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 2. – С. 64–74. DOI: 10.15372/PMTF202215143. EDN: KYJXFZ.  
(ядро РИНЦ)
14. Kartsov O. V. Solutions of a system of two-dimensional Euler equations and stationary structures in an ideal fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – V. 64, Iss. 2. – P. 230–239. DOI: 10.1134/S0021894423020074. (WoS Q4; Scopus Q3)
15. Pelinovsky E. N., Kartsov O. V. Traveling waves in nondispersive strongly inhomogeneous media // Doklady Physics. – 2022. – V. 67, Iss. 10. – P. 415–419.  
DOI: 10.1134/S1028335822100081. Published: 24 March 2023. (WoS Q4; Scopus Q3)
16. Kartsov O. V. Contact mappings of jet spaces // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2023. – V. 16, Iss. 5. – P. 583–590. EDN: DCHWJH.  
(WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
17. Шмидт А. В. Приближенное решение задачи о течении в дальнем плоском безымпурсном турбулентном следе // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 6. – С. 53–59. DOI: 10.15372/PMTF202215204. EDN: RZXUNG.

- (ядро РИНЦ)
18. Садовский В. М. К теории ударных волн в изотропно упрочняющихся пластических средах // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, вып. 2. – С. 254–264. DOI: 10.31857/S0032823523020133. EDN: UAWXSW. (ядро РИНЦ)
  19. Sadovskii V. M. On the theory of shock waves in isotropically hardening plastic media // Mechanics of Solids. – 2023. – V. 58, Iss. 7. – P. 163–171. (в печати)  
DOI: 10.3103/S002565442307021X. (WoS Q4; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
  20. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Smolekho I. V. Modeling of electric field impact on a cholesteric liquid crystal layer // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2023. – V. 16, Iss. 4. – P. 475–487. EDN: QJPIWS.  
(WoS без квартиля; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
  21. Кочнев В. А. Детальная модель источников магнитного поля ядра Земли, полученная в результате решения обратной задачи магнитометрии // Геология и геофизика. – 2023. – Т. 64, № 4. – С. 559–579. DOI: 10.15372/GiG2022127. EDN: VSJEMY.  
(ядро РИНЦ)
  22. Kochnev V. A. A detailed model of magnetic field sources of the Earth's core obtained by solving the inverse problem of magnetometry // Russian Geology and Geophysics. – 2023. – V. 64, Iss. 4. – P. 462–478. DOI: 10.2113/RGG20224493.  
(WoS Q4; Scopus Q3; ядро РИНЦ)
  23. Kireev I. V., Novikov A. E., Novikov E. A. Stability domains of explicit multistep methods // Numerical Analysis and Applications. – 2022. – V. 15, Iss. 4. – P. 343–352.  
DOI: 10.1134/S1995423922040073. (WoS без квартиля; Scopus Q4)
  24. Кабанов А. А., Симонов К. В., Мацулев А. Н., Кругляков А. С. Методика выявления предвестников сейсмических событий в данных геомониторинга // Информатизация и связь. – 2023. – № 1. – С. 51–63. DOI: 10.34219/2078-8320-2023-14-1-51-63.  
EDN: DJNDOS. (РИНЦ; перечень ВАК)
  25. Кашкин В. Б., Одинцов Р. В., Рублева Т. В., Симонов К. В. Анализ вариаций озона в атмосфере над сейсмоактивными регионами // Информатизация и связь. – 2023. – № 3. – С. 48–55. DOI: 10.34219/2078-8320-2023-14-3-48-55. EDN: TMFZVC.  
(РИНЦ; перечень ВАК)
  26. Andreev V. K., Latonova L. I. Solution of the Inverse Problem Describing Slow Thermal Convection in a Rotating Layer // Bulletin of Irkutsk state university-Series mathematics – 2023. – № 44. – С. 3-18. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.44.3. (WoS без квартиля)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом

1. Автор: Садовский Владимир Михайлович  
Докладчик: Садовский Владимир Михайлович  
Название доклада: Обобщенные решения с ударными волнами в механике упругопластических сред  
Название конференции: «Математические методы механики», приуроченная к юбилею академика А. Г. Куликовского  
Место проведения конференции: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва, 20–24 марта 2023 г.
2. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Садовская Оксана Викторовна  
Докладчик: Садовский Владимир Михайлович  
Название доклада: Численное моделирование разрушений в тонких прослойках упругопластической блочной среды  
Название конференции: 28-я Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности  
Место проведения конференции: Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, 10–15 июля 2023 г.
3. Автор: Капцов Олег Викторович  
Докладчик: Капцов Олег Викторович  
Название доклада: Стационарные решения уравнений идеальной жидкости и плазмы  
Название конференции: IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» (ЛАПЛАЗ – 2023)  
Место проведения конференции: Институт лазерных и плазменных технологий НИЯУ МИФИ, г. Москва, 28–31 марта 2023 г.
4. Авторы: Садовская Оксана Викторовна, Садовский Владимир Михайлович  
Докладчик: Садовская Оксана Викторовна  
Название доклада: Численное моделирование волн разрушения в трещиноватом блочном массиве  
Название конференции: Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах  
Место проведения конференции: Университет «Сириус», г. Сочи, 9–13 октября 2023 г.

5. Автор: Садовский Владимир Михайлович  
Докладчик: Садовский Владимир Михайлович  
Название доклада: Математическое моделирование деформации материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию  
Название конференции: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике  
Место проведения конференции: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.
  
6. Авторы: Андреев Виктор Константинович, Лемешкова Елена Николаевна  
Докладчик: Андреев Виктор Константинович  
Название доклада: Конвекция двух жидкостей в трехмерном слое с полем скоростей специального вида  
Название конференции: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике  
Место проведения конференции: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.
  
7. Авторы: Андреев Виктор Константинович, Ефимова Марина Викторовна  
Докладчик: Ефимова Марина Викторовна  
Название доклада: Конвекция в системе жидкость – бинарная смесь при радиальном нагреве подложки и малых числах Марангони  
Название конференции: VIII Всероссийская конференция с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения»  
Место проведения конференции: Томский государственный университет, г. Томск, 3–7 июля 2023 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### **Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности, зарегистрированных в 2023 году**

1. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2023619078 «Программа для численного моделирования переориентации молекул жидкого кристалла под действием электрического поля на основе системы уравнений вращательного движения (2Dyn\_LC-layer\_CUDA)». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Авторы: Смолехо И.В., Садовская О.В. Дата гос. регистрации: 04.05.2023.
2. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ «Степенной метод Бернулли вычисления корня многочлена». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Авторы: Киреев И.В., Новиков А.Е. Дата подачи заявки 20.12.2023. Номер заявки 2023688591.



ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2023 год,  
утвержденная государственным заданием

Описание задач, предлагаемых к решению	Предполагаемые (ожидаемые) результаты
<p>1. Выбор интегрируемых подмоделей трехмерной системы конвекции. Разработка теории новых линейных определяющих уравнений и ее применение к задачам механики жидкости. Построение классов точных обобщенных функционально-инвариантных решений двумерного неоднородного волнового уравнения, для которого определяющая функция имеет произвол в три константы. Построение приближенного решения, описывающего течение в дальней области свободной осесимметричной турбулентной струи.</p> <p>2. Анализ устойчивости двухслойных 2D и 3D течений, описывающих теплообмен в различных системах. Классификация режимов неустойчивости, определение критических характеристик устойчивости.</p> <p>3. Анализ динамики годового термического режима вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя в рамках одномерной в вертикальном направлении математической модели. Изучение динамики течений глубоководных водоемов.</p> <p>4. Разработка и алгоритмическая реализация математических моделей зарождения и развития трещин в прослойках блочной среды с применением интегрального критерия трещинообразования, с учетом возможного контакта берегов трещин под действием сжимающих напряжений, с учетом вязкой деформации, пластической диссипации энергии и эффекта схлопывания пор в пористых прослойках. Программная реализация моделей блочной среды с реологически сложными прослойками. Адаптация имеющихся у коллектива программных кодов к решению задач трещинообразования.</p> <p>5. Развитие вычислительной технологии вероятностного анализа сейсмической опасности, разработка алгоритмического и программного обеспечения для расчета параметров модели сейсмического воздействия. Исследование модели в задачах сейсмического мониторинга природных и технических объектов (структурно неоднородных грунтовых массивов, зданий и сооружений).</p>	<p>1. Точные решения, описывающие движения с границей раздела. Теория новых линейных определяющих уравнений применительно к задачам механики жидкости. Классы точных обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения. Приближенное решение в задаче о свободной осесимметричной турбулентной струе.</p> <p>2. Программы расчета, карты режимов устойчивости 2D и 3D конвективных режимов.</p> <p>3. Годовой ход температуры вечной мерзлоты в зимний и летний периоды в болотно-озерных ландшафтах. Гидродинамические режимы глубоководных водоемов.</p> <p>4. Математические модели для описания зарождения и продвижения трещин в межблочных прослойках на основе интегрального критерия трещинообразования. Вычислительные алгоритмы и программы, реализующие эти модели на многопроцессорных системах кластерной архитектуры. Результаты расчетов распространения системы трещин по мере прохождения волны в блочном массиве горных пород. Сравнение с расчетами по деформационному критерию трещинообразования.</p> <p>5. Усовершенствованная вычислительная технология вероятностного анализа сейсмической опасности, алгоритмическое и программное обеспечение для расчета параметров модели сейсмического воздействия. Результаты исследования моделей в задачах сейсмического мониторинга природных и технических объектов (структурно неоднородных грунтовых массивов, зданий и сооружений).</p>

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

**Количественные показатели проекта, утвержденные государственным заданием,  
за весь период выполнения проекта по годам**

Наименование показателя	Ед. измерения	2021 г.	2022 г.	2023 г.
Публикации (типа article и review) в научных журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science Core Collection и (или) Scopus)	единиц	9 (из них 3 в научных журналах первого и второго квартилей)	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)
Прочие публикации в научных журналах, входящих в ядро РИНЦ	единиц	17	17	17
Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом	единиц	8	7	7
Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности	единиц	2	2	2