Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958
Рег. № НИОКТР 124012900546-4
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН
чл.-корр. РАН

_______________ А. А. Шпедт

«_____» января 2025 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕД С ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА В ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(промежуточный, этап 1)

Направление фундаментальных исследований
1.1.2. Прикладная математика
(№ FWES-2024-0025)

Руководитель НИР
главный научный сотрудник ________________ В. М. Садовский
член-корреспондент РАН

Красноярск 2025

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы гл. науч. сотр., член-корреспондент РАН	____________________ (*подпись, дата*)	В. М. Садовский (Раздел 4)

Исполнители:

зав. отд., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	В. Б. Бекежанова (Раздел 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	В. К. Андреев (Раздел 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	В. М. Белолипецкий (Раздел 3)
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	О. В. Капцов (Раздел 1)
вед. науч. сотр., д-р техн. наук	____________________ (*подпись, дата*)	В. А. Кочнев (Раздел 5)
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	В. И. Сенашов (Раздел 1)
вед. науч. сотр., д-р техн. наук	____________________ (*подпись, дата*)	К. В. Симонов (Раздел 5)
ст. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	И. В. Степанова (Разделы 1, 2)
ст. науч. сотр., канд. техн. наук	____________________ (*подпись, дата*)	С. Н. Генова (Раздел 3)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	И. В. Киреев (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	____________________ (*подпись, дата*)	А. Н. Рогалев (Раздел 5)

ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	О. В. Садовская (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	А. В. Шмидт (Раздел 1)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	М. В. Ефимова (Раздел 2)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	Е. Н. Лемешкова (Раздел 2)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	Е. П. Магденко (Раздел 2)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	Ю. В. Шанько (Раздел 1)
мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	И. В. Смолехо (Раздел 4)
ст. инж.	______________________ (*подпись, дата*)	Н. Ф. Ильина (Раздел 2)
ст. инж.	______________________ (*подпись, дата*)	Е. И. Калмыкова (Раздел 5)
инж.	______________________ (*подпись, дата*)	Е. А. Ефимов (Раздел 4)
инж., канд. физ.-мат. наук	______________________ (*подпись, дата*)	И. Е. Петраков (Раздел 4)
нормоконтроль	______________________ (*подпись, дата*)	А. А. Кадочников

РЕФЕРАТ

Отчёт 61 с., 24 рис., 1 табл., 5 прил.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГИДРОДИНАМИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

Объектом исследования по теме проекта являются процессы, происходящие в сложных природных и технических системах с границами раздела при различных условиях.

Цель исследований состоит в развитии методов математического и численного моделирования задач с поверхностями раздела на основе неклассических моделей механики сплошных сред: разработка и анализ новых нелинейных математических моделей, построение и исследование свойств точных решений, включая свойства устойчивости; разработка и реализация вычислительных алгоритмов и комплексов программ для решения фундаментальных и прикладных задач; выработка рекомендаций по аспектам функционирования технических объектов и природных систем.

Промежуточный отчёт по первому этапу проекта научной темы содержит описание результатов выполнения темы проекта в 2024 г.

В 2024 году получены следующие новые результаты. Решена задача групповой классификации трёхмерных нелинейных уравнений тепломассообмена относительно двух коэффициентов переноса и двух параметров, соответствующих действию взаимообратных эффектов Соре и Дюфура. Предложена замена переменных, позволяющая получить новые решения уравнений модели изотропного ферромагнетика Гейзенберга, обладающие функциональным произволом. Предложен метод построения приближённых решений краевых задач для математических моделей, описывающих динамику течения в дальних областях безымпульсных турбулентных следов, который позволяет выделять значения показателя автомодельности задачи, а также других неизвестных параметров. Получены новые примеры нелинейных уравнений второго порядка, допускающие явные общие решения. Предложен новый метод интегрирования уравнений с частными производными, основанный на введении промежуточных систем, строить решение которых проще по сравнению с исходным уравнением. В рамках приближения Обербека – Буссинеска построены точные стационарные и численные нестационарные решения задач конвекции, описывающие движение двухслойных несмешивающихся жидких сред с общей недеформируемой поверхностью раздела в плоской и цилиндрической геометрии, в том числе в условиях массопереноса через границу раздела за счёт испарения. Для решений, полученных при малых числах Марангони, исследовано влияние силы тяжести и толщин слоёв на качественные изменения картины течения. Показана возможность управления движением жидких сред за счёт граничных тепловых режимов на подложке и дополнительного интегрального условия на расход через сечение одного из слоёв. Выполнен анализ постановок сопряжённых задач испарительной конвекций, учитывающих изменение скорости испарения вдоль межфазной поверхности. Определены условия применимости точных решений, полученных в рамках соответствующих постановок, для моделирования установившихся конвективных режимов в реальных двухфазных системах, в которых испарение с поверхности жидкости индуцировано прокачкой газа. Исследована линейная устойчивость одного из решений, описывающего течение жидкости, испаряющейся с постоянной скоростью под действием спутного газового потока, получены критические характеристики устойчивости, проведена селекция двумерных мод. Доказано, что система параболических уравнений для описания движений жидкости в плоском слое под действием неравномерно распределённой температуры на стенках канала имеет классическое решение при выполнении ограничений на входные данные задачи, которая в общей постановке является обратной и служит для определения скорости, температуры, концентрации и градиента давления при движении под действием термодиффузионного эффекта. Получены достаточные условия стабилизации построенного классического решения. На основе прямого численного моделирования проведён сравнительный анализ характеристик режимов термокапиллярной конвекции в ограниченной плоской кювете, возникающих при различных режимах нагрева.

Для анализа процессов динамического деформирования и разрушения структурно неоднородных упругопластических сред типа горных пород под действием импульсных нагрузок разработана вычислительная технология, в рамках которой учитывается блочная структура материала, наличие предварительных технологических напряжений в блоках, начальная система дефектов и трещинообразование в податливых межблочных прослойках.

На основе метода конечных элементов разработаны оригинальные алгоритмы для расчёта статического деформирования трёхслойных сэндвич-панелей из двух слоёв волокнистого композитного материала и изотропной упругой прослойки, учитывающие разное сопротивление композита сжатию и растяжению. Показано, что неучёт разного сопротивления в расчётах приводит к значительной погрешности.

Были продолжены исследования по поиску закономерностей геодинамических процессов, происходящих в очаговых зонах сильнейших субдукционных землетрясений, на основе данных измерений спутниковой системы GRACE в виде распределений гравитационного параметра EWH (эквивалентный уровень воды над контуром геоида

Земли), а также по выявлению связей между тектонической активностью и вероятным откликом на эти процессы в атмосфере. Разработан численно-символьный метод построения оценок множеств решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих функционирование природных и технических систем. На этой основе развита методика комплексного анализа возмущений движения систем на конечном интервале времени.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий отчёт является промежуточным по первому этапу научной темы «Математическое моделирование неидеальных сред с поверхностями раздела в природных и технических системах» за 2024 год.

Проведённые исследования соответствуют приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: «а» переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объёмов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта; «б» переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии.

Тематика отчёта соответствует научному направлению Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021–2030 годы) по разделу «1.1.3.7. Моделирование в задачах создания промышленных производств, аэрокосмической техники, машиностроения, разведки, добычи и транспортировки углеводородного сырья, атомной энергетики, робототехники и вычислительной техники. Разработка моделей и методов решения соответствующих математических задач в механике, учитывающих нелинейные свойства сред, большие деформации, реологические и теплофизические свойства, оценку отклика после снятия нагрузки и др. Математическое моделирование новых материалов (композитных, наноматериалов, полупроводниковых гетероструктур и др.)». В рамках этого направления задачи механики с границами раздела являются предметом интенсивного изучения в России и за рубежом. Подобного рода задачи возникают в химической и пищевой промышленности, металлургии, материаловедении, гидрофизике, экологии, геофизике. Достаточно упомянуть процессы термостабилизации энергетических установок, получения покрытий с заданными функциональными характеристиками, электрофореза, динамики вечной мерзлоты, поведения геологических разломов и жидких кристаллов, сохранения качества водных и воздушных масс. Более точное описание вклада различных факторов приводит к усложнению математических моделей и постановок краевых задач, а в ряде случаев требует привлечения новых подходов к описанию изучаемых явлений или разработки новых моделей.

В отчётный период 2024 года исследования проводились по пяти направлениям:

1. Теоретико-групповой анализ уравнений тепломассообмена с непостоянными коэффициентами переноса. Построение решений с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика. Построение решений задачи о течении в закрученном турбулентном следе.
2. Построение новых точных решений неклассических моделей конвекции: анализ прямых и обратных задач, исследование устойчивости точных решений. Изучение динамики двухслойных систем жидких сред, подверженных внешним тепловым воздействиям.
3. Модификация одномерной в вертикальном направлении математической модели годового термического режима вечной мерзлоты для районов суши с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя.
4. Математическое и численное моделирование нестационарных процессов в геологических средах с учётом вязких эффектов, пластической деформации и структурной неоднородности. Разработка параллельных вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных систем, применение их к анализу распространения сейсмических волн.
5. Развитие методов исследования устойчивости природных и технических систем по отношению к постоянно действующим возмущениям. Комплексный анализ возмущения начальных условий и уравнений движения на конечном интервале времени. Анализ зависимости динамики формы границ областей безопасности систем от множеств решений дифференциальных уравнений. Конструирование сходящихся последовательностей в пространстве решений.

Полученные в 2024 году результаты соответствуют поставленным целям и задачам. Качество результатов находится на мировом уровне по оценке новизны, оригинальности, значимости и точности. Это подтверждается публикациями в ведущих научных журналах по направлениям проекта, индексируемых в международных наукометрических базах, в других рейтинговых журналах. При выполнении планов проекта использовались современные методы и технологии исследований. Построенные математические модели процессов и явлений соответствуют принятому в мире уровню полноты и точности описания.

Результаты, изложенные в отчёте, являются фундаментальными и могут служить основой для дальнейших исследований по тематике проекта. Практическое использование проведённых исследований возможно: а) при разработке средств контроля функционирования систем термического контроля и модификации двухфазных систем жидкостного охлаждения, при разработке технологий термического нанесения покрытий с заданными функциональными свойствами; б) при оценке влияния погодных условий на динамику мерзлотных и талых слоёв в условиях Крайнего Севера; г) для инженерных расчётов элементов конструкций из композитных материалов; д) для установления связей глобальных геодинамических и геофизических процессов с катастрофическими сейсмическими событиями.

В тексте отчёта приведены основные результаты (с иллюстрациями), полученные в ходе выполнения проекта в 2024 году.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Теоретико-групповой анализ уравнений тепломассообмена с непостоянными коэффициентами переноса. Построение решений с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика. Построение решений задачи о течении в закрученном турбулентном следе

1.1. Теоретико-групповой анализ уравнений тепломассообмена с непостоянными коэффициентами переноса

Рассматриваются трёхмерные эволюционные уравнения тепломассообмена в бинарной жидкости с учётом перекрёстных эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div}\left(\chi(T,C)\nabla T + D^F(T,C)\nabla C\right), \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \operatorname{div}\left(D(T,C)\nabla C + D^\theta(T,C)\nabla T\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Ставится задача групповой классификации уравнений (1) относительно коэффициентов температуропроводности χ, диффузии D, параметров Соре D^θ и Дюфура D^F, зависящих от температуры T и концентрации одного из компонентов смеси C. Ранее было показано, что основная алгебра Ли, допускаемая уравнениями (1) при произвольных значениях всех коэффициентов переноса, имеет вид

$$L_0 = \left\langle \partial_t,\ \partial_{x^i},\ 2t\partial_t + \sum_{i=1}^{3} x^i \partial_{x^i},\ x^j\partial_{x^i} - x^i\partial_{x^j} \right\rangle,\ i, j = 1,2,3,\ i \neq j.$$

Предварительно вычислена алгебра операторов эквивалентности

$$L_\theta = \left\langle L_0, \partial_T, \partial_C, -t\partial_t + T\partial_T + C\partial_C + \chi\partial_\chi + D\partial_D + D^\theta\partial_{D^\theta} + D^F\partial_{D^F} \right\rangle.$$

Задача групповой классификации решается с точностью до преобразований эквивалентности, порождённых операторами из L_θ, которые не влияют на дифференциальную структуру уравнений (1). Для определения спецификаций коэффициентов переноса и операторов, расширяющих основную алгебру L_0, было получено 18 классифицирующих уравнений и общий вид оператора, расширяющего L_0,

$$G = \left(q_{11}T + q_{12}C + q_{10}\right)\partial_T + \left(q_{21}T + q_{22}C + q_{20}\right)\partial_C - f_0 t\partial_t,$$

где q_{ij}, $i = 1,2,$ $j = 0,1,2,$ f_0 – постоянные, которые находятся в процессе решения задачи классификации и отвечают за структуру алгебр Ли операторов, допускаемых уравнениями (1) для каждой конкретной спецификации произвольных элементов. Полученная система классифицирующих уравнений в общем случае не сводится к последовательно решаемым уравнениям, её анализ проводится для функции $H = \chi + D$ и основан на решении системы уравнений

$$\frac{dT}{ds} = q_{11}T + q_{12}C + q_{10}, \quad \frac{dC}{ds} = q_{21}T + q_{22}C + q_{20}, \quad \frac{dH}{ds} = f_0 H, \tag{2}$$

где s – переменная вдоль характеристики. В зависимости от того, каковы собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, строится решение системы (2). Рассмотрены комплексно-сопряжённые, действительные и одинаковые, действительные и различные собственные числа матрицы A. Этот анализ исчерпывает все возможности для классификации системы (1).

Отмечено, что случай действительных и различных собственных чисел матрицы A эквивалентен тому, что $q_{12}q_{21} = 0$. Тогда классифицирующие уравнения преобразуются к системе последовательно решаемых уравнений, и классификация может быть выполнена полностью для всех четырёх коэффициентов переноса. В этом случае получены восемь наборов спецификаций параметров χ, D, D^F, D^θ и соответствующие этим спецификациям выражения для оператора G. В качестве примера приведём один случай решения задачи групповой классификации при $q_{11} = q_{12} = q_{10} = q_{21} = q_{22} = 0$. Используя найденные преобразования эквивалентности из алгебры L_θ, получим, что все четыре классифицируемые функции имеют вид $e^{mC} f_i(T)$, где индексы $i = 1, 2, 3, 4$ относятся к функциям χ, D, D^F, D^θ, соответственно. Оператор G, расширяющий основную алгебру L_0, есть $\partial_C - mt\partial_t$.

Как упоминалось выше, в случае $q_{12}q_{21} \neq 0$ определить каждый классифицируемый параметр не удаётся, классификация выполнена только для функции $H = \chi + D$. Поэтому в общем случае задача групповой классификации решена в неявной форме.

1.2. Построение решений с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика

Рассмотрена модель изотропного ферромагнетика Гейзенберга, уравнения для стационарных решений которой можно представить в виде

$$\Delta_3 \boldsymbol{n} = \lambda(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \boldsymbol{n}, \tag{3}$$

$$|\boldsymbol{n}| = 1. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_3 = \partial^2/\partial_{\mathrm{x}}^2 + \partial^2/\partial_y^2 + \partial^2/\partial_{\mathrm{z}}^2$ – оператор Лапласа, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – трёхмерный вектор, $\lambda(x, y, z)$ – некоторая вспомогательная функция.

С помощью выбора подходящих функций u и v трёхмерная модель допускает редукцию к двумерной:

$$\Delta_2 \boldsymbol{n} = \lambda(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \boldsymbol{n}, \tag{5}$$

$$|\boldsymbol{n}| = 1, \tag{6}$$

где $\Delta_2 = \partial^2/\partial_{\mathrm{u}}^2 + \partial^2/\partial_{\mathrm{v}}^2$. Эти функции можно найти как вещественную и мнимую часть функционально-инвариантного решения трёхмерного уравнения Лапласа.

С помощью представления нулевой кривизны для уравнения sinh-Gordon построен класс решений системы (5), (6). Полученным решениям соответствуют решения исходной системы (3), (4) с функциональным произволом.

1.3. Операторные симметрии и точные решения линейных уравнений с частными производными

Изучались линейные модельные уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными. Найдены высшие операторные симметрии и общие решения для ряда гиперболических уравнений. Построены примеры преобразований эквивалентности для некоторых уравнений с частными производными второго порядка. Операторы высших симметрий образуют алгебру Ли, а операторные – ассоциативную алгебру. Устанавливается связь между этими симметриями. Найдены новые симметрии двумерных стационарных уравнений газовой динамики.

Предложен новый метод интегрирования уравнений с частными производными. В терминах дифференциальной алгебры введены промежуточные системы уравнений в частных производных. Промежуточные системы обобщают классическое понятие промежуточных интегралов для уравнений Монжа – Ампера. Система уравнений E называется промежуточной для данной системы уравнений в частных производных D, если дифференциальный идеал <E>, порождённый системой E, содержит дифференциальный идеал <D>. Таким образом, решения промежуточной системы являются решениями заданной системы D. Как показывают примеры, находить решения промежуточных систем проще. Найдены эволюционные уравнения, обладающие промежуточными системами. Получены новые примеры нелинейных уравнений второго порядка, допускающие явные общие решения.

1.4. Построение приближённого решения, описывающего течение в дальнем закрученном турбулентном следе

Исследования 2024 года продолжают серию работ, связанных с развитием нового подхода к построению приближённых решений краевых задач для математических моделей, описывающих динамику течения в дальних областях безымпульсных турбулентных следов.

Рассматриваемые краевые задачи относятся к классу задач с автомодельностью второго рода. Развиваемый подход позволяет в процессе построения приближённого решения осуществлять выделение значения показателя автомодельности задачи и других неизвестных параметров. Приближённое решение строится на основе процедуры склеивания асимптотического разложения решения вблизи границы турбулентного следа с разложением искомых функций на оси следа.

Результаты сопоставления построенных аналитических решений с численными расчётами на основе метода стрельбы для модели дальнего закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом представлены на рисунке 1. Имеет место малая относительная погрешность рассматриваемых решений.

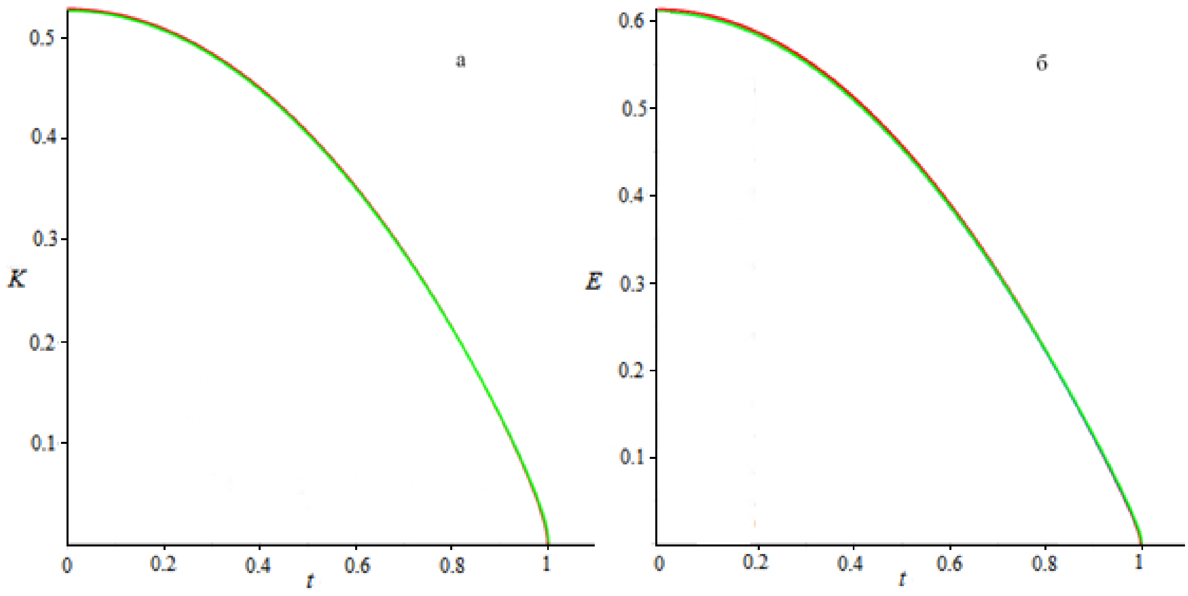

Рисунок 1 – Сопоставление аналитического решения (зеленый цвет) и численного решения (красный цвет); (а) – кинетическая энергия турбулентности, (б) – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности

2. Построение новых точных решений неклассических моделей конвекции: анализ прямых и обратных задач, исследование устойчивости точных решений. Изучение динамики двухслойных систем жидких сред, подверженных внешним тепловым воздействиям

2.1. Построение аналитических и численных решений уравнений конвекции для исследования характеристик течений в двухслойных системах плоской и цилиндрической геометрии

2.1.1. Моделирование термокапиллярной конвекции в плоском слое

Для моделирования термокапиллярной конвекции двух несмешивающихся жидких сред в плоском слое в поле силы тяжести используется точное решение трёхмерных уравнений Обербека – Буссинеска вида

$$\mathbf{u} = \left[\big(f(z,t) + h(z,t)\big)x, \big(f(z,t) + h(z,t)\big)y, -2\int_{x_0}^{x} f_j(z_1,t)\,dz_1 \right], \qquad \bar{p} = \bar{p}(x,y,z,t),$$

$$\theta = a(z,t)x^2 + b(z,t)y^2 + q(z,t), \tag{7}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\bar{p}$ – модифицированное давление, θ – функция температуры. Считается, что жидкости заполняют область $-l_1 < z < l_2$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$; в каждом из двух слоёв характеристики движения заданы формулами (7), тем самым определению подлежат функции $f_j(z,t)$, $h_j(z,t)$, $a_j(z,t)$, $b_j(z,t)$, $q_j(z,t)$, где индекс j соответствует номеру слоя. Давление $\bar{p}$ восстанавливается после нахождения указанных функций. Границы слоя $z = -l_1$, $z = l_2$ суть твёрдые неподвижные стенки, $z = 0$ – неподвижная поверхность раздела, на которой формулируются стандартные для сопряжённых задач граничные условия; при этом считается, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Для сохранения недеформируемости границы раздела требуется, чтобы капиллярное число и число Бонда, определяемые через физические свойства каждой жидкости и толщину нижнего слоя, оставались малыми. Граничные условия для температуры задают нагрев по квадратичному закону нижней стенки и теплоизоляцию верхней стенки:

$$\theta_1(x, y, -l_1, t) = \alpha_1(t)x^2 + \alpha_2(t)y^2 + \alpha_3(t), \qquad \theta_{2z}(x, y, l_2, t) = 0, \tag{8}$$

функции $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, заданы. При $\alpha_1(t) < 0$, $\alpha_2(t) < 0$ $(\alpha_1(t) > 0$, $\alpha_2(t) > 0)$ решение (7), (8) описывает конвекцию вблизи критической точки $x = 0$, $y = 0$, когда температура на стенке в этой точке имеет максимум (минимум).

Построены стационарное и нестационарное решения указанной задачи при малых числах Марангони (аналог числа Рейнольдса для течений вязкой жидкости), когда определяющие нелинейные уравнения сводятся к линейным. В рамках упрощённой постановки с помощью стационарного решения исследовано влияние гравитационного воздействия и толщины нижнего слоя на гидродинамические характеристики течения. Для нестационарной задачи получены априорные оценки поведения решения на больших временах в равномерной метрике. Показано, что если выполнены условия на функции, входящие в определение температуры на границе (см. формулу (8)),

$$|\alpha_i(\tau) - \alpha_i^c| \le a_i^0(\tau)e^{-\gamma\tau}, \qquad |\alpha_i'(\tau)| \le a_i^1(\tau)e^{-\gamma\tau}, \qquad |\alpha_i''(\tau)| \le a_i^2(\tau)e^{-\gamma\tau},$$

где

$$\int_0^\infty \left|a_i^k(\tau)\right| d\tau < \infty, \quad i = 1,2,3, \qquad k = 0,1,2, \qquad \alpha_i^c, \gamma = \mathrm{const}, \qquad \gamma > 0,$$

α_i^c – постоянные, определяющие интенсивность стационарного нагрева, то нестационарное решение сходится к полученному стационарному, что означает стабилизацию эволюционного движения жидкостей в рассматриваемых условиях.

Решение нестационарной задачи получено с помощью её сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями посредством преобразования Лапласа. В образах по Лапласу решение получено в квадратурах. Доказано, что с ростом времени оно выходит на стационарный режим, если температура на нижней стенке стабилизируется, при этом функция температуры может иметь конечное число точек разрыва 1-го рода. С помощью численного обращения преобразования Лапласа изучена эволюция поведения трёх составляющих поля скоростей в системе трансформаторное масло – вода и получены оценки времени установления.

2.1.2. Моделирование осесимметричного конвективного движения

Если в рамках предыдущей задачи считать, что нижний слой $(j = 1)$ занимает теплопроводная жидкость, а верхний $(j = 2)$ – бинарная смесь, то в цилиндрических координатах в случае осесимметрического движения решение (7) может быть записано как

$$u_j = (\bar{U}, 0, \bar{W}), \qquad \bar{U} = f_j(z,t)r, \qquad 2\int_{x_0}^{x} f_j(z_1,t)\,dz_1, \quad \theta_j = a_j(z,t)r^2 + q_j(z,t),$$
$$c = m(z,t)r^2 + n(z,t), \quad \bar{p}_j = \Big(D_j(z,t) + S_j(t)\Big)r^2 + B_j(z,t), \tag{9}$$

где функция концентрации c определяется только для верхнего слоя, остальные характеристики следует восстановить для обеих жидкостей. Функции $S_j(t)$ суть градиенты давления вдоль радиуса. Для их нахождения задаётся дополнительное условие переопределения, и общая задача будет обратной с математической точки зрения. Задача рассматривается в линейной постановке (при малых числах Марангони). Найдено стационарное решение, и при модельных значениях физических параметров жидкостей исследовано влияние интенсивности гравитационного поля и толщины слоёв рабочих сред на гидродинамические и тепловые характеристики возникающих вихревых течений. Определены условия и соотношения для толщин слоёв, при которых изменение баланса массовых, термокапиллярных и термоконцентрационных сил в системе приводит к перестройке топологической структуры течений. Решение нестационарной задачи построено в образах по Лапласу с помощью квадратур. Априорные оценки показывают, что выход нестационарного решения на стационарный режим с ростом времени имеет место только при определённых интегральных условиях на начальные данные для функции концентрации c. Проведённые численные расчёты обращения образов по Лапласу демонстрируют справедливость априорных оценок и полученного критерия сходимости, связанного с функцией c.

2.1.3. Анализ постановок задач конвекции в условиях фазовых превращений

В рамках двусторонней модели испарительной конвекции проведён анализ двумерных постановок краевых задач, возникающих при описании установившихся течений испаряющейся жидкости и газопаровой смеси в горизонтальном канале. В качестве определяющих уравнений используются уравнения Обербека – Буссинеска, дополненные уравнением конвективной диффузии, описывающие перенос пара в несущем газе над слоем рабочей жидкости. В уравнениях, моделирующих конвекцию в газовом слое, и граничных условиях на межфазной поверхности и верхней стенке канала, контактирующей с парогазовой смесью, дополнительно учтены слагаемые, отвечающие эффектам Соре и Дюфура, которые проявляются в газовой фазе в присутствии испаряемого компонента. Граница раздела жидкость – газ является термокапиллярной поверхностью Γ, допускающей диффузионный перенос массы за счёт испарения, который учтён в модели путём задания на Γ обобщённого условия теплового баланса. Анализ постановок выполнен с помощью точного решения определяющих уравнений, принадлежащего классу решений Остроумова – Бириха. Оно позволяет использовать для функции концентрации пара на верхней стенке и температур обеих сред на внешних границах области условия первого и второго рода, обеспечивающие корректность соответствующих постановок, и учесть неоднородный характер массопереноса на межфазной поверхности. На основе сравнения значений ряда характеристик (перепадов температуры и концентрации, средней скорости испарения и её относительных изменений на рабочем участке конечной длины) показано, что за счёт граничного теплового режима можно интенсифицировать/снизить отвод тепла с поверхности жидкости и контролировать изменения массовой скорости испарения. Для конкретной пары рабочих сред HFE7100 – азот указаны диапазоны изменения продольных градиентов температуры, определяющих интенсивность линейного нагрева на стенках в случае постановки условий первого рода, при которых решение даёт адекватное описание конвективных режимов. Сформулировано условие применимости изучаемого точного решения для описания конвекции в областях с внутренней границей раздела жидкость – газ, допускающей массоперенос: оно корректно моделирует процессы конвективного тепломассообмена в условиях диффузионного испарения вблизи состояний локального термодинамического равновесия.

2.2. Анализ прямых и обратных задач, исследование устойчивости точных решений

2.2.1. Априорные оценки решения обратной сопряжённой задачи о тепловой конвекции в трубе

Для описания тепловой конвекции двух несмешивающихся жидкостей в цилиндрической трубе используются уравнения вязкой теплопроводной жидкости в цилиндрических координатах. Движение первой жидкости происходит в области $|z| < \infty$, $0 < r < a$, второй – в слое $|z| < \infty$, $a < r < b$, с заданными $a > 0$, $b > 0$. На твёрдой боковой поверхности трубы задан градиент температуры. Все теплофизические параметры жидкости предполагаются постоянными и положительными. Поскольку движение является однонаправленным, то поле скоростей имеет вид $\boldsymbol{u} = (0,0, w_j(r,t))$, где $w_j(r,t)$ – осевые скорости. Давление и температура распределены линейно относительно z. С математической точки зрения возникающая задача является сопряжённой и обратной относительно градиента давления одной из жидкостей вдоль трубы. В качестве условия переопределения задаётся нестационарный общий расход указанных жидкостей $q(t)$. Для нестационарной задачи получены априорные оценки решения в равномерной метрике. При условиях

$$|q(t) - q^s| \leq Ce^{-\alpha t},\ \ |q'(t)| \leq Ce^{-\alpha t}\ ,\ \ |q''(t)| \leq Ce^{-\alpha t},\ \ \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

доказана устойчивость нестационарного решения задачи. Показано, что при $t \to \infty$ оно стремится к найденному ранее стационарному решению по экспоненциальному закону.

2.2.2. Априорные и апостериорные оценки решения эволюционной обратной задачи, описывающей движение бинарной смеси в канале

Проанализирована начально-краевая задача для системы параболических уравнений, возникающая при изучении термодиффузионного течения бинарной смеси в горизонтальном канале с неоднородно нагреваемыми стенками. Математическая модель представляет собой уравнения однонаправленного конвективного течения теплопроводной бинарной смеси, условия совместности которых приводят к обратной задаче для функции скорости: определение горизонтального градиента давления происходит вместе с остальными неизвестными функциями, входящими в систему. Задача сведена к последовательно решаемым линейным начально-краевым задачам с условиями Дирихле или Неймана, одна из которых является обратной с интегральным условием переопределения. Решение построено с помощью метода разделения переменных, сформулированы критерии, при которых оно является классическим. Необходимо отметить, что соответствующая стационарная задача имеет неединственное решение в общем случае как задача Неймана для эллиптического оператора, для её замыкания ставится дополнительное условие. Сходимость построенного решения нестационарной задачи к соответствующему стационарному по экспоненциальному закону относительно времени установлена только для функций, для которых заданы условия Дирихле. Для функций, задачи определения которых замыкаются условиями второго рода, установлена ограниченность. Ранее эти свойства были замечены только в численных экспериментах при решении общей задачи о нестационарном движении бинарной смеси в неоднородно нагреваемом канале. Благодаря полученным теоретическим результатам, факт установления конкретного стационарного режима подтверждён доказательством соответствующих теорем.

2.2.3. Устойчивость точного решения, описывающего совместное течение испаряющейся жидкости и газового потока

Исследована линейная устойчивость точного решения, описывающего совместные течения испаряющейся жидкости и парогазовой смеси в плоском горизонтальном канале. Рассмотрены инфинитезимальные двумерные возмущения типа нормальных волн. Решение построено в рамках сопряжённой задачи испарительной конвекции при заданном расходе газа R_g в верхнем слое. На примере системы сред этанол – воздух изучено влияние величины расхода, который фактически определяет скорость газового потока, на пороговые характеристики устойчивости и тип главных возмущений. Численно построены нейтральные кривые Gr(α_x), определяющие значения числа Грасгофа, при которых решение теряет устойчивость относительно возмущений с волновыми числами α_x (рисунок 2). Установлено дестабилизирующее влияние скорости течения газа, при этом всегда существуют коротковолновые возмущения, вызывающие кризис течения. С ростом R_g возникает новая волновая мода, которой соответствует свой порог. Во всех рассмотренных случаях реализуется колебательная неустойчивость, которая в областях U_1 и U_2^A проявляется в форме приповерхностных вихревых структур, в областях U_2^B и U_4^A – двухрядной упаковкой конвективных ячеек и тепловых пятен в жидком слое, деформированных основным течением, в области U_4^B – типичных конвективных ячеек, вытянутых в направлении прокачки газа. Возникающие при потере устойчивости структуры сносятся в направлении основного течения вблизи поверхности раздела фаз.

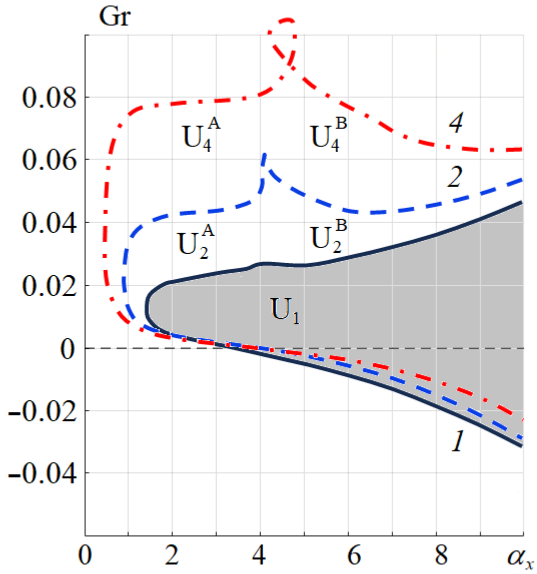

Рисунок 2 – Нейтральные кривые на плоскости (Gr, α_x) и области неустойчивости для системы сред этанол – воздух с толщинами слоёв, равными 3 мм, при различных значениях расхода газа R_g : кривая *1* – $R_g = R_0 = 3.55 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), *2* – $R_g = 2R_0$, *4* – $R_g = 4R_0$ (области неустойчивости U лежат внутри кривых и соответствуют разным типам неустойчивости)

2.3. Термокапиллярная конвекция в ограниченном массиве при различных условиях нагрева

Изучена динамика двухфазной системы испаряющаяся жидкость – парогазовая смесь, заполняющей замкнутую плоскую жидкостную камеру, при различных режимах внешней тепловой нагрузки. Рассматриваются случаи нестационарного локального нагрева со стороны подложки и распределённого нагрева со стороны боковых стенок с постепенным скачкообразным увеличением интенсивности нагрева через заданные промежутки времени до некоторого предельного значения температуры. Прямое численное моделирование выполнено для системы сред бензин – воздух в рамках двусторонней модели испарительной конвекции на основе приближения Буссинеска, учитывающей влияние прямого и обратного термодиффузионных эффектов в газовой фазе. Установлено, что при боковом нагреве имеет место инерционное поведение системы с образованием пограничных слоёв с интенсивным конвективным движением вблизи зон температурной нагрузки (рисунок 3, правый столбец). Локальный нагрев снизу приводит к многоячеистому конвективному движению во всём объёме жидкой и газовой фаз, причём к конечному режиму система приходит через несколько переходных состояний, возникающих при каждом скачкообразном изменении температуры нагревателя.

Указанные переходные режимы сопровождаются колебаниями границы разделы и изменением числа вихревых структур в слоях.

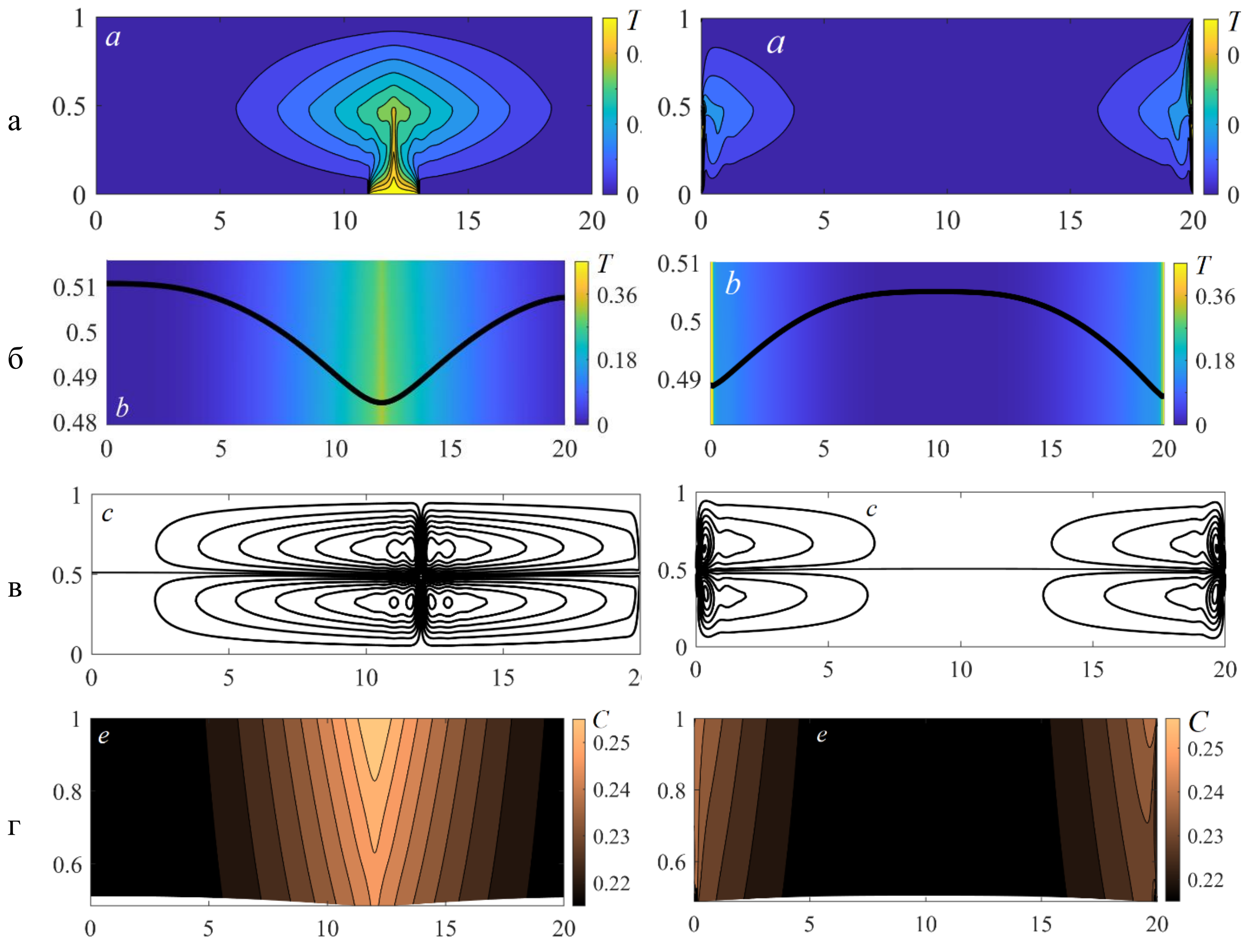

Рисунок 3 – Характеристики установившихся конвективных режимов в системе сред бензин – воздух при локальном нагреве снизу (левый столбец) и распределённом нагреве со стороны боковых стенок (правый столбец): (а) – поле температуры в системе; (б) – форма границы раздела и поле температуры вблизи поверхности жидкость – газ; (в) – поле скорости; (г) – распределение концентрации пара в газовом слое

Изучено поведение динамического контактного угла в результате нагрева. На рисунке 4 представлено поведение динамического контактного угла φ в точке трёхфазного контакта на правой стенке кюветы. Установлено, что увеличение температурного напора со стороны подложки приводит к постепенному уменьшению контактного угла с некоторой временной задержкой, с которой система отвечает на изменение интенсивности нагрева, и формированию термокапиллярного прогиба над нагревателем (рисунок 3б слева). После достижения максимальной интенсивности нагрева поверхность раздела монотонно релаксирует; это сопровождается увеличением контактного угла и установлением его нового равновесного значения, соответствующего вогнутому мениску. При боковом нагреве формируется термокапиллярный горб (рисунок 3б справа) с выпуклым мениском в точке трёхфазного контакта.

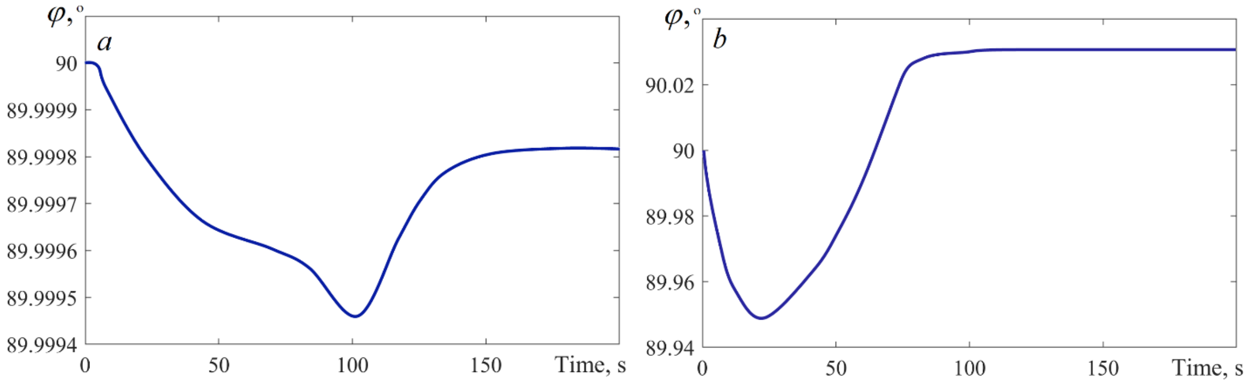

Рисунок 4 – Изменение динамического контактного угла: (а) – локальный нагрев снизу; (б) – распределённый боковой нагрев

3. Модификация одномерной в вертикальном направлении математической модели годового термического режима вечной мерзлоты для районов суши с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя

Известно, что в вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются слои талого и мёрзлого грунта (каждого может быть больше одного), а также слой снега. Для исследования мощности сезонно-талого слоя применяются математические модели различного уровня сложности, которые основываются на уравнениях теплопроводности для мёрзлых и талых слоёв, дополненных условиями Стефана.

Особенностью разрабатываемой модели является относительно небольшое количество входных параметров. Так, в рассмотренном варианте прогноза динамики сезонно-талого слоя достаточно знать сценарии изменений температуры воздуха. Предложенная численная модель позволяет исследовать годовую динамику температурного режима в районах вечной мерзлоты с использованием данных наземных и дистанционных измерений температуры подстилающей поверхности. Модель адаптирована для расчёта теплового поля при различных вариантах расположения мёрзлых и талых слоёв, условия перехода между вариантами (добавление каких-либо слоёв в модель или их исключение) определены как входные данные.

Численный алгоритм состоит из двух этапов. Если на n-м временнóм слое известны все параметры (распределения температуры в рассматриваемых слоях и положение границы фазового перехода), то нахождение неизвестных параметров в момент времени t_{n+1} выполняется в два этапа: на первом определяются распределения температуры в выделенных слоях, на втором уточняется положение границы раздела фаз. Переход от одного этапа к другому осуществляется автоматически в зависимости от входных параметров (температуры воздуха, наличия того или иного слоя и его толщины).

Выделяются интервалы времени, на которых температура воздуха не меняет знак. В зимний период (температура воздуха отрицательная) образуется мёрзлый слой с наличием снега. Снежный покров схематизируется двумя слоями с различными плотностью и теплопроводностью. Влияние снега на промерзание грунта оценивается с помощью квазистационарного приближения. На границе «атмосфера – снег» задаётся температура снега, равная температуре воздуха; на границе слоёв снега и границе «снег – подстилающая поверхность» выполняются условия непрерывности температуры и потоков тепла.

При повышении весной температуры снега до нуля градусов по Цельсию начинается таяние снега. Из уравнения теплового баланса оценивается интервал времени таяния снега.

Летом в почве полярных районов с оттаиванием мёрзлого грунта образуются два слоя: верхний – талый, нижний – мёрзлый. Вертикальные распределения температуры в каждом слое определяются из решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. В качестве граничных условий на поверхности суши задаётся температура по данным дистанционного зондирования земли.

Необходимо отметить, что разработанная одномерная математическая модель термического режима вечной мерзлоты может применяться для качественных исследований районов суши (наличие озёр и болот в модели не учитывается) с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя.

4. Математическое и численное моделирование нестационарных процессов в геологических средах с учётом вязких эффектов, пластической деформации и структурной неоднородности. Разработка параллельных вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных систем, применение их к анализу распространения сейсмических волн

4.1. Моделирование волновых процессов в геологических средах на основе моделей пространственного напряжённо-деформированного состояния блочной среды

Особенности распространения волн в грунтах и горных породах указывают на необходимость учёта структурной неоднородности материалов. Для горных пород характерна блочная иерархическая структура, представление о которой было развито в работах М. А. Садовского в 1980-х годах. В последнее время в рамках концепции блочного строения горных пород ведутся работы как теоретического, так и экспериментального характера преимущественно сотрудниками ИГД СО РАН (Опарин В. Н., Шер Е. Н., Сарайкин В. А., Александрова Н. И. и др.).

В массиве горной породы блоки разделяются тонкими прослойками, которые представляют собой микроразрушенную породу и обладают сложными реологическими свойствами. В наиболее простом случае блоки и прослойки можно считать упругими, при этом прослойки являются более податливыми, чем блоки. Размеры блоков в иерархической структуре могут варьироваться от нескольких сантиметров до десятков километров. При переходе от более крупного к более мелкому иерархическому уровню жёсткость межблочных прослоек возрастает, а толщина уменьшается.

Особую важность учёт блочной структуры пород имеет при математическом моделировании динамических процессов. Представление геологической среды в виде блочного массива позволяет учесть эффекты, не свойственные однородным средам. Так, например, за счёт деформирования преимущественно податливых прослоек возникают маятниковые волны, не наблюдаемые в однородной среде.

В отчётный период по теме проекта были разработаны математические модели и комплекс программ для расчёта динамических процессов в блочной среде с тонкими прослойками в трёхмерной постановке. Схематическое изображение блочной среды показано на рисунке 5. Блоки в форме параллелепипедов одинаковых размеров разделяются прослойками постоянной толщины.

Для описания материалов блоков и прослоек использовались уравнения динамики однородной изотропной упругой и вязкоупругой среды. Вязкоупругость описывается моделью Пойнтинга – Томсона, известной как модель стандартного линейного тела (Standard Linear Solid или SLS), а также моделью обобщённого стандартного линейного тела (Generalized Standard Linear Solid или GSLS).

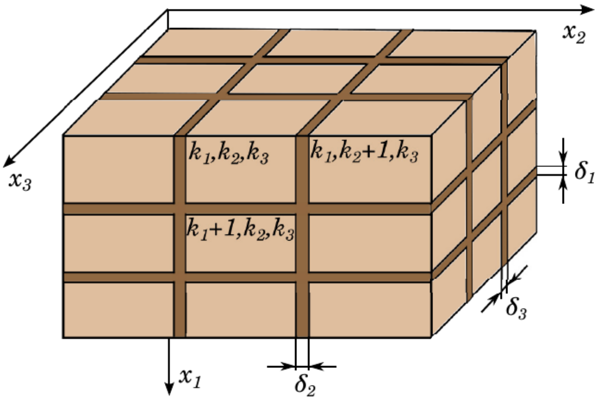

Рисунок 5 – Схема блочно-слоистой среды

При моделировании упругих прослоек были применены два различных подхода. В первом случае прослойки описываются такими же уравнениями, что и блоки, то есть модель блочной среды представляет собой систему уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Во втором подходе модель прослоек описывает внутренние граничные условия между блоками и записывается в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Упрощение модели обусловлено тем, что толщина прослоек в реальных блочных средах много меньше размера блока. Пользуясь упрощённым вариантом модели, удаётся построить относительно простые алгоритмы для прослоек, сочетающие в себе такие реологические свойства, как пористость, вязкоупругость и пластичность. Преимущество данного подхода заключается в справедливости основных термодинамических принципов, в частности баланса полной энергии.

4.2. Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных вычислительных системах кластерной архитектуры

Алгоритм решения уравнений основан на методе двуциклического расщепления по пространственным координатам. Данный метод обеспечивает второй порядок сходимости решения исходной многомерной задачи, если одномерные расщеплённые задачи решаются схемами не ниже второго порядка. При численной реализации модели неоднородной среды с кусочно-постоянными коэффициентами использовалась схема Г. В. Иванова второго порядка точности с контролируемым параметром диссипации, при этом для решения уравнений в тонкой прослойке отводилась одна ячейка разностной сетки по толщине на каждую прослойку. Численное решение в блоках для модели с упрощёнными уравнениями прослоек строилось с использованием схемы С. К. Годунова с процедурой предельной реконструкции инвариантов Римана, обеспечивающей второй порядок аппроксимации на монотонных участках решения. Уравнения прослоек решались при помощи бездиссипативной схемы Г. В. Иванова.

Разработанный комплекс параллельных программ для расчёта волновых полей в трёхмерных блочных средах написан на языке Fortran с использованием библиотеки MPI и предназначен для высокопроизводительных систем кластерной архитектуры. Вычислительная область разбивается на большие блоки, представляющие собой параллелепипеды одинаковых размеров, каждый из которых обрабатывается одним MPI-процессом; на данном этапе задаётся толщина прослоек первого иерархического уровня. Далее внутри каждого блока задаются прослойки следующих иерархических уровней, более мелкого масштаба. Обмен данными между процессами происходит на шаге «предиктор» разностной схемы.

На примере задачи Лэмба в блочном полупространстве в трёхмерной постановке можно показать особенности возникающих в среде возмущений при воздействии короткого импульса. Для блочных сред с податливыми прослойками характерно возникновение периодических колебаний после прихода поверхностной волны Рэлея. Их амплитуда и частота зависят от податливости прослоек: чем более податливы прослойки относительно блоков, тем выше амплитуда и меньше частота. Эти колебания затухают со временем. На рисунке 6 показана вертикальная компонента скорости $v_1(t)$ на поверхности блока с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 23$. В начале координат ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) задавалось импульсное воздействие постоянной амплитуды p_0 длительностью один шаг по времени τ. Решения получены для модели среды с упругими блоками и упругими прослойками, а также для дискретно-периодической модели блочной среды, разработанной Н. И. Александровой (ИГД СО РАН). Сравниваются волны, возникающие в средах с различной податливостью прослоек. Для сравнения приведено решение в однородной упругой среде с осреднёнными параметрами. Соотношения для акустических импедансов $q = (\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s)$ на графиках (a), (b) и (c), соответственно, равны 625, 80 и 11.

На графиках (рисунок 6) видно, что решение в среде с существенно податливыми прослойками качественно воспроизводится дискретно-периодической моделью, описывающей среду с жёсткими недеформируемыми блоками и упругими прослойками. Когда прослойки менее податливы (q = 11), решение для блочной среды в большей степени сходно с решением для однородной упругой среды.

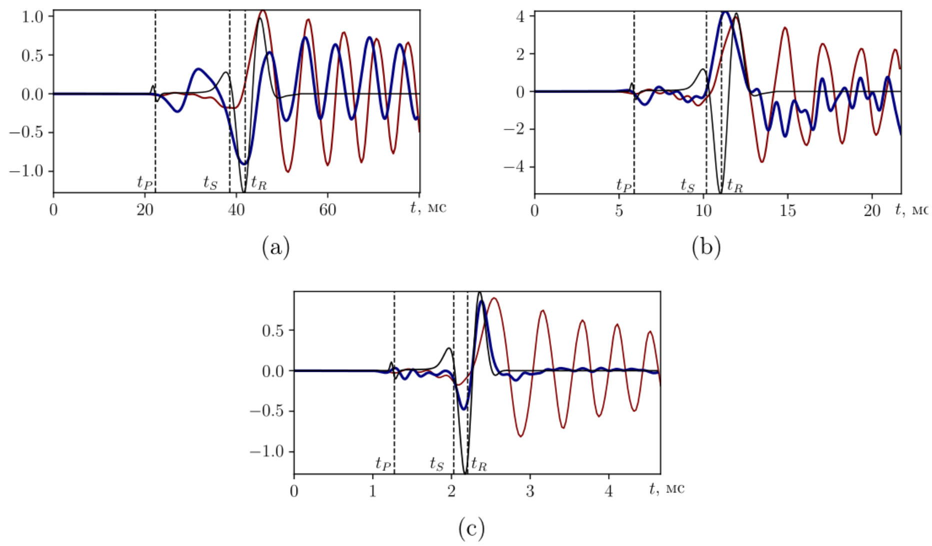

Рисунок 6 – Осциллограммы вертикальной компоненты скорости на поверхности полубесконечного блочного пространства, описываемого дискретно-периодической моделью (красные линии) и моделью с упругими блоками и упругими прослойками (синие линии); чёрные линии показывают решение в однородной среде

На характер распространения волн также влияет толщина прослоек. Для сред с фиксированными материалами блоков и прослоек увеличение толщины прослоек приводит к уменьшению скорости распространения волн и частоты колебаний, возникающих за счёт деформирования прослоек, также изменяется форма волновых фронтов.

В качестве примера рассмотрены блочные среды, состоящие из кубических блоков одинакового размера со стороной H. На рисунке 7 представлены линии уровня вертикальной компоненты скорости v_1 в однородной среде (a), в блочной среде с относительной толщиной прослоек $\delta/H = 0.01$ (b), $\delta/H = 0.05$ (c), в иерархической среде (d), где крупные блоки разделены прослойками с относительной толщиной $\delta/H = 0.05$ и состоят из 9×9×9 малых блоков, разделённых более тонкими прослойками ($\delta/H = 0.01$).

На рисунках 8 и 9 представлены результаты расчётов сейсмических волн, генерируемых импульсным сейсмоисточником в блочно-иерархических средах.

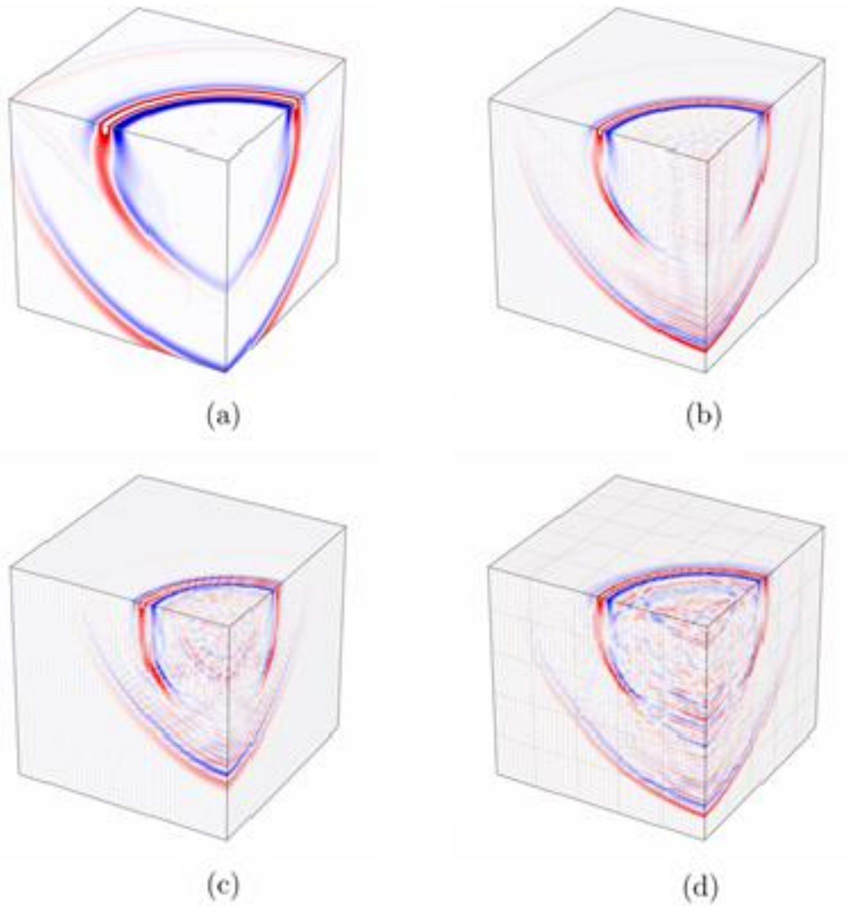

Рисунок 7 – Линии уровня скорости v_1 в однородной и блочных средах

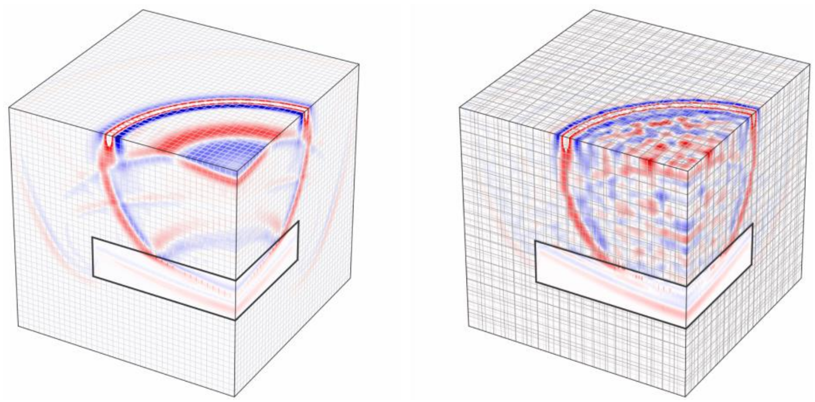

Рисунок 8 – Линии уровня скорости v_1 в блочных средах
с однородным податливым включением

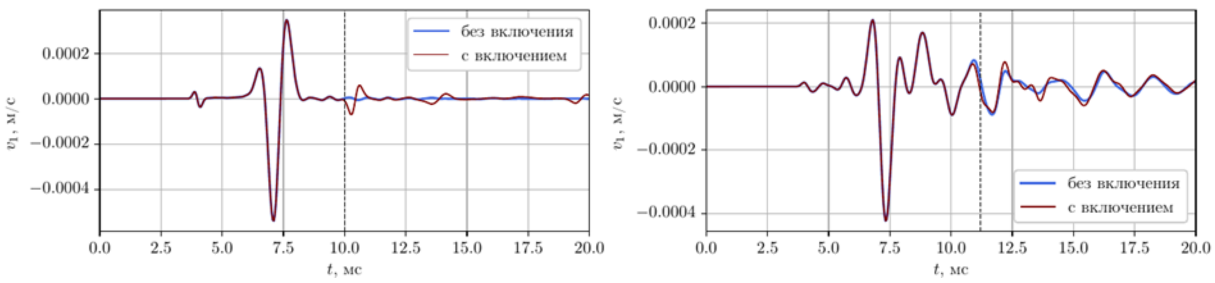

Рисунок 9 – Скорость $v_1(t)$ на поверхности в блочных средах
с однородным податливым включением

Рассматривается задача об отражении импульса от податливого однородного включения, находящегося на определённой глубине в блочной среде. Исследуются среды с различным количеством иерархических уровней. Задаётся соотношение размеров блоков соседних иерархических уровней H_{i+1}/H_i = 1.41, толщина прослоек на соответствующем уровне δ_i = 0.0125 H_i , плотность и скорости распространения продольных и поперечных волн в прослойках ρ_i' = 0.75^i ρ, c_{pi}' = 0.85^i c_p, c_{si}' = 0.85^i c_s. На рисунке 8 показаны линии уровня вертикальной компоненты скорости v_1 в средах с одним и тремя уровнями. В первом случае волны распространяются почти как в однородной среде, во втором случае в среду добавлены более толстые и податливые прослойки, что приводит к качественному изменению волновой картины. Проявляются осцилляции за фронтами волн.

На рисунке 9 изображены графики $v_1(t)$ на поверхности для блочных сред с одним и тремя иерархическими уровнями с податливым включением и без него. Заметно, что параметры блочной среды могут существенно влиять на возможность обнаружения на поверхности отражённого сигнала.

4.3. Моделирование волн разрушения в упругопластической блочной среде с податливыми прослойками

Теоретический интерес представляет вопрос о существовании волн разрушения, который, несмотря на большое число работ, до сих пор до конца не изучен. Термин «волна разрушения» появился в 1960-х годах, когда была выдвинута гипотеза о принципиальной возможности протекания процесса фрагментирования материала в относительно тонком слое, распространяющемся с определённой скоростью. К числу первых публикаций по математическому моделированию волн разрушения относятся работы Дж. Эшелби, Г. И. Баренблатта, Р. Л. Салганика, Г. П. Черепанова, Б. В. Кострова. Считалось, что такие волны реализуются только при наличии растягивающих напряжений на некоторых площадках в неразрушенном материале и соответствующих этим напряжениям растягивающих деформаций.

В конце 1980-х годов Г. И. Канелем и его коллегами были экспериментально обнаружены волны разрушения в стекле в условиях сжатия. Впоследствии этот факт был многократно проверен и подтверждён в экспериментах зарубежными исследователями. Было установлено, что основной причиной появления самоподдерживающихся волн разрушения являются предварительные напряжения в стекле, которые формируются на стадии изготовления, и большое количество поверхностных микротрещин. Выделение упругой энергии предварительных напряжений является тем механизмом, который поддерживает устойчивое распространение волны с постоянной скоростью. По результатам экспериментов скорость волны разрушения оказалась значительно меньше скоростей продольной и поперечной упругих волн, а также скорости пластической волны. Более того, она оказалась зависимой от уровня напряжений за фронтом волны нагружения.

Для описания волн разрушения в деформируемых материалах были разработаны специальные математические модели, основанные на общих принципах механики сплошной среды с учётом повреждаемости материала. Такие модели применялись к анализу динамики кирпичной кладки и горных пород, которые, согласно исследованиям М. А. Садовского, имеют ярко выраженную блочную структуру. Однако в горных породах волны разрушения экспериментально зарегистрированы, по-видимому, не были.

На основе разработанной ранее вычислительной технологии были проведены расчёты волн разрушения в рамках предположения о том, что трещины за фронтом волны способны образовываться только в тонких податливых межблочных прослойках материала. Предварительные напряжения в блоках, которые возникают из-за естественных условий окружающей среды или на стадии изготовления материала, при плоском деформированном состоянии моделировались с помощью специального построения функции Эри. Примеры полей предварительных напряжений приведены на рисунке 10.

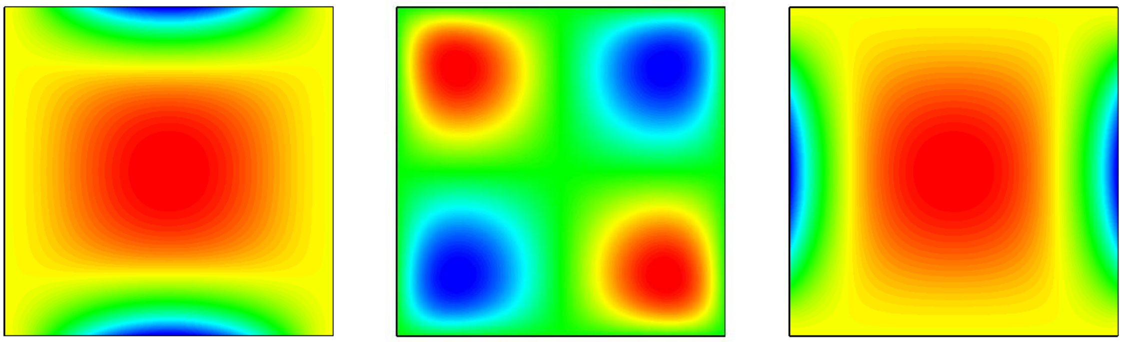

Рисунок 10 – Самоуравновешенные поля напряжений σ_{11}, σ_{22}, и σ_{12} в блоке

Были разработаны алгоритмы, моделирующие начальную систему трещин в прослойках массива блочной среды, распределённых по нормальному закону внутри области блока или в приграничной зоне (см. рисунок 11).

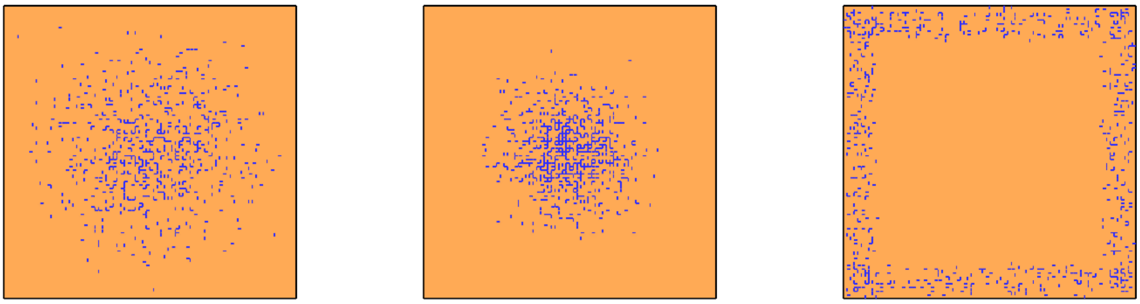

Рисунок 11 – Случайное распределение трещин в окрестности центра блочного массива и в приграничной области

Для моделирования трещинообразования в прослойках использовался критерий разрушения Кулона – Мора со специально выбранной предельной кривой.

Лабораторные эксперименты по осевому сжатию образцов горной породы в условиях гидростатического напряжённого состояния показывают, что независимо от величины гидростатического давления разрушение образцов сопровождается возникновением трещин отрыва, которые ориентируются вдоль оси сжатия (вертикальной оси). Однако длина трещин отрыва существенно зависит от уровня бокового давления и уменьшается с его увеличением. При низких давлениях длинные, почти вертикальные трещины препятствуют развитию трещин сдвига на площадках максимального касательного напряжения, ориентированных под углом 45° к оси. При более высоких боковых давлениях, когда трещины отрыва становятся короткими, макроскопическое разрушение происходит в виде локализованных сдвиговых трещин.

Соответствующие фотографии разрушенных цилиндрических образцов, взятые из статьи Б. Г. Тарасова [Веерный механизм создания динамических разломов с высокими фильтрационно-емкостными свойствами на сейсмогенных глубинах земной коры // Геофизические технологии. 2024. № 1. С. 118–186. DOI: 10.18303/2619-1563-2024-1-118], приведены на рисунке 12.

Рисунок 12 – Разрушение образцов горной породы в условиях гидростатического давления: с ростом давления ориентация трещин сдвига меняется в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = 45°$

На модельном уровне такое поведение можно описать с помощью критерия прочности Кулона – Мора, задав в нём предельную кривую разрушения специальным образом. Наиболее простой вариант предельной кривой в виде двухзвенной ломаной представлен на рисунке 13. При отсутствии бокового напряжения большой круг Мора касается наклонного звена ломаной. По условию Кулона – Мора точке касания соответствует площадка, вдоль которой развивается трещина. Угол на диаграмме между радиусом круга, проведённым в точку касания, и горизонтальной осью равен удвоенному значению угла φ между этой площадкой и осью сжатия образца. Угол φ мал и, как следствие, трещины ориентируются практически вдоль оси, если угловой коэффициент наклона звена достаточно большой.

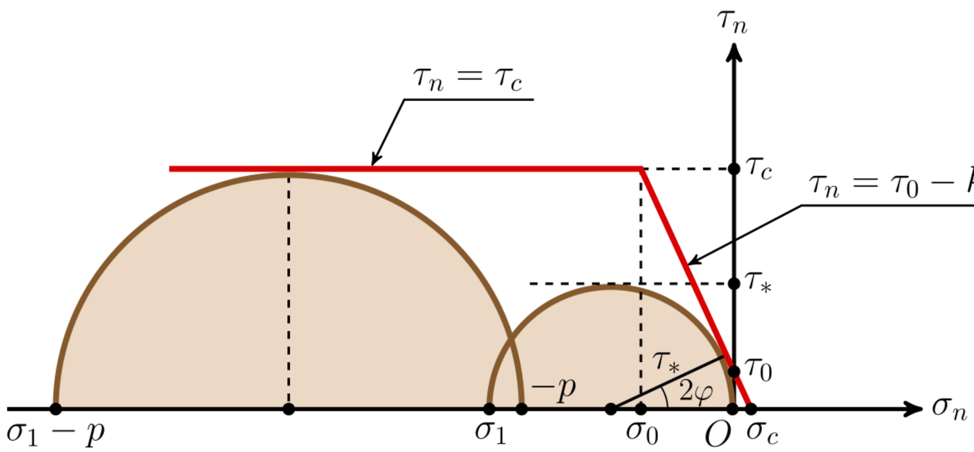

Рисунок 13 – Предельная кривая разрушения на диаграмме Мора

При повышении давления круговая диаграмма Мора сдвигается вдоль отрицательной полуоси σ_n на величину давления p. При этом точка касания большого круга и предельной кривой перемещается вверх по наклонному звену ломаной и переходит к горизонтальному звену $\tau_n = \tau_c$, точкам которого соответствуют площадки максимального касательного напряжения, расположенные под углом $45°$ к оси образца.

Условие прочности для рассматриваемой предельной кривой принимает вид

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_c\,, & \text{если } \sigma_n < \sigma_0\,, \\ k\,(\sigma_c - \sigma_n)\,, & \text{если } \sigma_n \geq \sigma_0\,. \end{cases}$$

Здесь σ_c и τ_c – пределы прочности материала при одноосном растяжении и при чистом сдвиге, $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент наклонного звена, $\sigma_0 = \sigma_c - \tau_c/k$. Угол φ вычисляется через α по формуле $\varphi = \pi/4 - \alpha/2$. Параметры σ_c, τ_c и k должны подчиняться неравенству

$$\tau_c > \tau_* = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}-k}\,\sigma_c\,.$$

Если тензор напряжений в прослойке задан компонентами σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}, то соответствующие главные напряжения равны

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}\,,$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,, \qquad \tau_n = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,.$$

Эти формулы позволяют записать условие прочности в терминах компонент тензора напряжений относительно декартовой системы координат.

Результаты расчётов волн разрушения в предварительно напряжённом блочном массиве под действием импульсной нагрузки, приложенной к левой границе, приведены на рисунке 14.

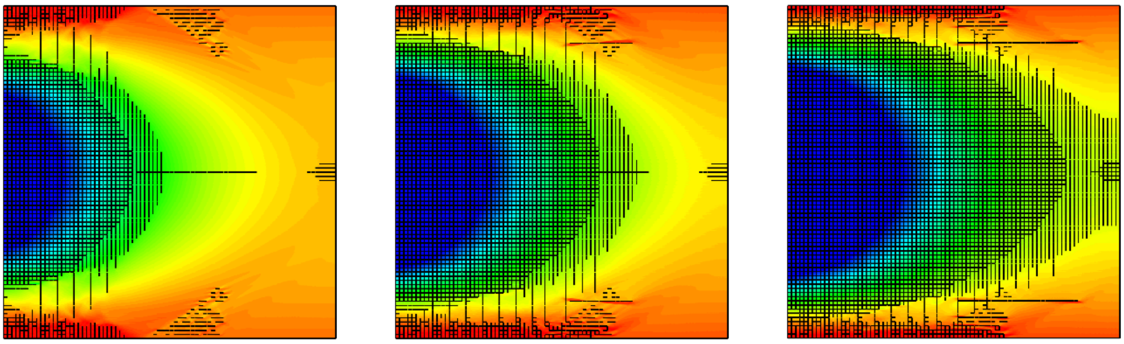

Рисунок 14 – Поведение волны разрушения в стекле (показана система трещин, распространяющаяся от границы вовнутрь образца)

Полученные результаты демонстрируют механизм возникновения самоподдерживающихся волн разрушения в закалённом стекле, обусловленных выделением энергии начальных напряжений по мере прохождения пластических волн нагружения.

4.4. Метод расчёта напряжённо-деформированного состояния сэндвич-структуры, учитывающий эффект разномодульности

В отчётный период был разработан новый численный метод расчёта напряжённо-деформированного состояния в сечениях сэндвич-структуры. Сэндвич-структуры всё чаще используются в инженерных приложениях в промышленности, строительных конструкциях и транспорте из-за своего лёгкого веса, а также прочности при больших нагрузках. Рассматривались сэндвич-структуры, состоящие из наполнителя и оболочки. В качестве материала оболочки использовался волокнистый композит, армированный длинными параллельными волокнами, наполнителем являлся упругий изотропный материал. Поскольку такие структуры обладают свойствами разномодульности и разнопрочности, необходимо учитывать эти свойства при расчётах конструкций, в которых они применяются.

Метод решения основан на обобщённом реологическом методе, позволяющем строить модели, учитывающие разные модули упругости композита при растяжении и сжатии. При построении определяющих уравнений была принята схема трёхслойной сэндвич-структуры, которая изображена на рисунке 15.

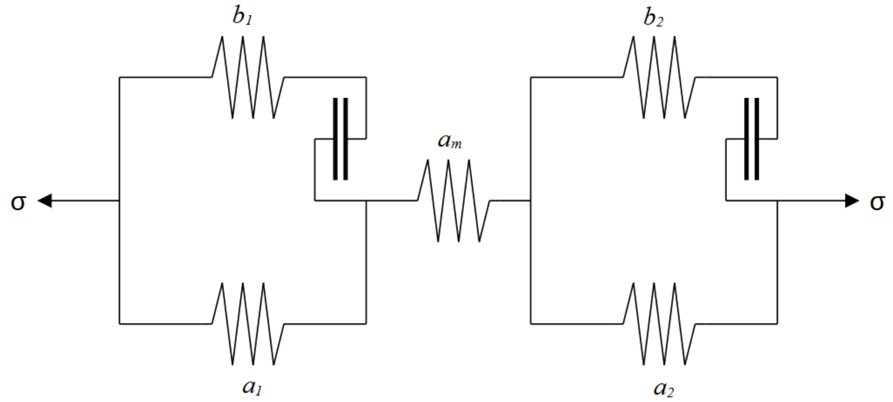

Рисунок 15 – Реологическая схема трёхслойной сэндвич-структуры

Такой схеме соответствуют следующие определяющие уравнения и выпуклые потенциалы для слоёв оболочки:

$$\sigma = a_i : \varepsilon + b_i : (\varepsilon - \Pi_i(\varepsilon)),$$

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : a_i : \varepsilon + \frac{1}{2}[\varepsilon - \Pi_i(\varepsilon)]^2, \qquad \Psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : a_i^{-1} : \sigma - \frac{1}{2}\left\|\pi_i(\bar{\sigma})\right\|^2,$$

и для слоя наполнителя:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : a_m : \varepsilon, \qquad \Psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : a_m^{-1} : \sigma, \quad \sigma = a_m : \varepsilon,$$

где ε – тензор деформаций, σ – тензор напряжений, a_i – тензор модулей упругости при сжатии для i-го слоя, b_i – тензор дополнительных модулей при растяжении для i-го слоя, a_m – тензор модулей упругости для слоя наполнителя, $\Pi(\varepsilon)$ – проекция тензора ε на конус допустимых деформаций по норме $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : b : \varepsilon}$.

Предполагалось, что слои оболочки являются трансверсально-изотропным материалом и армированы под углом R_i к плоскости сечения, для которого заданы параметры: E_1 – модуль упругости при сжатии вдоль волокон, E_2 – модуль упругости при сжатии и растяжении поперек волокон, b_{11} – дополнительный модуль упругости при растяжении вдоль волокон, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона в направлении вдоль и поперёк волокон армирования, соответственно, G – модуль сдвига. Таким образом, уравнения, связывающие напряжения и деформации, имеют следующий вид:

$$\sigma_{11} = \frac{(E_1 \cos R_i + E_2 \sin R_i)(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22})}{1 - \nu_1 \nu_2} + b_{11} \cos R_i (\varepsilon_{11} - \Pi_{11}),$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2 (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11})}{1 - \nu_1 \nu_2}, \qquad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}.$$

С помощью вариационного метода Лагранжа получен функционал упругой энергии, к минимизации которого применялся метод начальных напряжений с итерационным пересчётом перемещений,

$$\sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} \nabla u : (a_i + b_i) : \nabla u - \Pi_i(\varepsilon) : b_i : \nabla u \right) d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \vec{q} \cdot u \, d\Gamma_i \right) +$$
$$+ \int_{\Omega_m} \left(\frac{1}{2} \nabla u : a_m : \nabla u \right) d\Omega_m - \int_{\Gamma_m} \vec{q} \cdot u \, d\Gamma_m.$$

Численное решение проводилось на основе метода конечных элементов. В качестве конечного элемента использовался треугольный элемент Лагранжа с тремя узлами и перемещениями u_x, u_y, заданными в узлах. В области Ω строилась нерегулярная треугольная сетка. Вводился вектор обобщённых координат U размерности $2n$, где n – число узлов сетки. Функционал представлялся в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Omega_l} \left((U_l)^T S^T K(x_1, x_2) S U_l - b\Pi(S U_l^{k-1}) S U_l - q_l U_l \right) dx_1 dx_2,$$

где Ω_l – область l-го конечного элемента, U_l – локальный вектор обобщённых координат, S_l – локальная матрица связи перемещений и деформаций, K – матрица упругих постоянных, q – глобальный вектор обобщённых сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Проведены вычислительные эксперименты, в которых были рассмотрены сэндвич-пластины с различной толщиной слоёв. Параметры оболочки соответствовали углепластику: $E_1^+ = 114,\ E_1^- = 57,\ E_2 = 14,\ G = 3.5\ ГПа,\ \nu_1 = 0.19.$ Наполнителем считалась изотропная эпоксидная смола с параметрами упругости $E = 4, G = 1.54 ГПа,\ \nu = 0.3.$ Рассмотрено продольное и поперечное деформирование при цилиндрическом изгибе пластины по схеме, изображенной на рисунке 16.

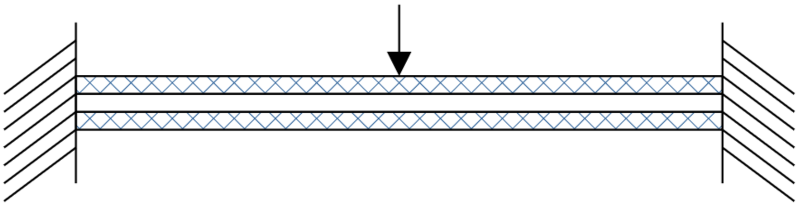

Рисунок 16 – Схема нагружения пластины

В качестве примера на рисунке 17 показаны графики перемещений для трёхслойной пластины с толщиной слоёв оболочки 4 мм и слоя наполнителя толщиной 4 мм.

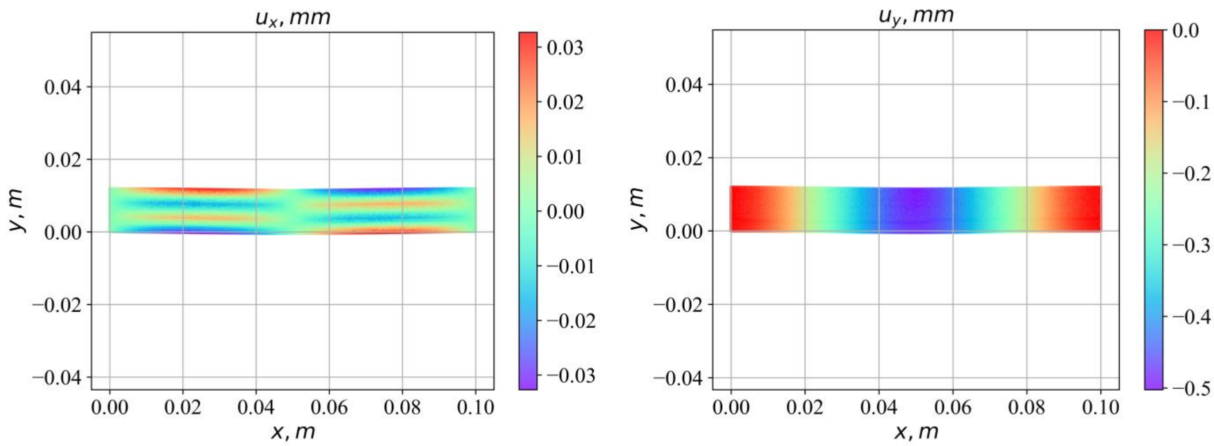

Рисунок 17 – Поля проекций вектора перемещений

На рисунке 18 изображены линии уровня продольной деформаций пластины ε_{11}. Аналогичные расчёты проведены для пластины толщиной 1.2 мм при различных соотношениях толщин оболочки и наполнителя. Результаты расчётов представлены в таблице 1, где T_i – толщина прослойки, T_a – толщина армирования, w_d – прогиб с учётом разномодульности, w – прогиб без учёта разномодульности.

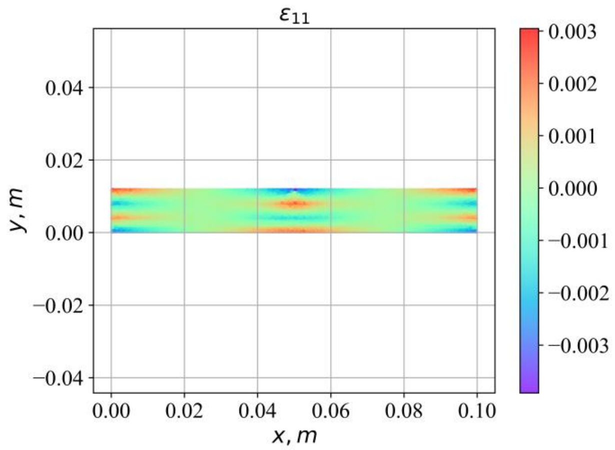

Рисунок 18 – Линии уровня продольной деформаций ε_{11}

Таблица 1 – Прогиб сэндвич-пластины под действием сосредоточенной силы в центре

T_i, мм	T_a, мм	w_d, мм	w, мм	δ_w, %
0.24	0.96	1.88	1.66	11 %
0.48	0.78	1.99	1.78	10 %
0.72	0.48	2.11	1.9	10 %
0.96	0.24	2.24	2.08	7 %

По результатам расчётов можно наблюдать распределение зон сжатия и растяжения в сэндвич-пластине. Они также позволяют оценить влияние разномодульности материалов на величину прогиба. Показано, что ошибка расчёта прогиба при неучёте разномодульности может достигать 10 %.

5. Развитие методов исследования устойчивости природных и технических систем по отношению к постоянно действующим возмущениям. Комплексный анализ возмущения начальных условий и уравнений движения на конечном интервале времени. Анализ зависимости динамики формы границ областей безопасности систем от множеств решений дифференциальных уравнений. Конструирование сходящихся последовательностей в пространстве решений

5.1. Интерпретация цифровых карт распределения гравитационного параметра EWH по данным измерений КС GRACE

За отчётный период был разработан новый способ интерпретации цифровых карт распределения гравитационного параметра EWH (эквивалентный уровень воды над контуром геоида Земли), построенных по данным измерений глобальных и локальных гравитационных аномалий Земли с помощью спутниковой системы GRACE. Предложенный способ предназначен для выявления особенностей и закономерностей исследуемого геодинамического процесса в очаговых зонах сильнейших цунамигенных землетрясений (подготовка, основное событие, релаксация), происходящих в субдукционных областях Мирового океана.

Интерпретация данных измерений GRACE основана на том, что изменения гравитации в области, подготовленной к землетрясению, выступают триггером активизации сейсмического процесса, что аналогично роли гравитационных лунно-солнечных приливов. Изменения гравитации также являются индикатором происходящих в очаговой зоне изменений, связанных с напряжённо-деформированным состоянием горных пород, сопутствующих процессов движения жидкостей в их порах и внутренних полостях, а также вязких течений в более глубоких слоях Земли.

Анализ цифровых карт, построенных по данным измерений GRACE, показывает, что тип готовящегося сейсмического события различным образом влияет на распределение параметра EWH относительно области подготовки сильнейшего землетрясения. Были построены цифровые карты сильнейших землетрясений 2004–2013 гг. (Суматра, 12.2004; Симушир, 11.2006; Чили, 02.2010; Япония, 03.2011; Охотское море, 05.2013) с магнитудой больше 8.5 за несколько месяцев до и после мегасобытий, а также карты распределения EWH, характеризующие особенности проявлений на всех стадиях подготовки и релаксации изучаемого геодинамического процесса.

Показано, что при катастрофических цунамигенных землетрясениях в зонах субдукции наблюдаются две зоны аномалий с повышенным и пониженным значением EWH. Результаты интерпретации карт EWH позволяют, в частности, моделировать вероятные варианты геометрических характеристик протяжённого источника цунами для последующих расчётов распространения волны в открытом океане. На новом уровне решается задача предвычислений степени опасности цунами по начальному источнику цунами, что актуально для региональных систем предупреждения об угрозе воздействия волн цунами.

5.2. Обработка и визуализация данных измерений космической системы GRACE в сейсмоактивном регионе Суматры

Гравитационное поле Земли содержит важную геофизическую информацию о перераспределении масс внутри нашей планеты и на её поверхности. С развитием спутниковых гравиметрических систем, таких как GRACE и GRACE-FO, и совершенствованием методов обработки данных качественно улучшилось исследование гравитационного поля, а также аномалий, возникающих в очаговых зонах сильных землетрясений.

Два десятилетия назад, 26 декабря 2004 г., произошло Суматранское катастрофическое землетрясение с магнитудой М = 9.1. Ретроспективный анализ данных КС GRACE в этот период времени позволяет выявить особенности аномалий в гравитационном поле в районе о. Суматра.

Для выполнения экспериментальной части исследования выделена область с определёнными параметрами: землетрясения с магнитудой М > 6.5 и временнóй промежуток с декабря 2004 г. по декабрь 2006 г. За этот период, по данным USGS, там были зарегистрированы, кроме мегаземлетрясения 26.12.2024, ещё 6 сильных землетрясений с М > 6.5. Из этого набора наиболее сильное землетрясение (с М = 8.6) произошло 28 марта 2005 г.

С помощью поиска в базе данных PODAAC (Physical Oceanography Distributed Active Archive Center, NASA) задавались параметры необходимых измерений и временнóго промежутка. В качестве амплитуды изменения силы тяжести использовался параметр EWH (Equivalent Water Height – эквивалентная высота воды над контуром геоида, в см).

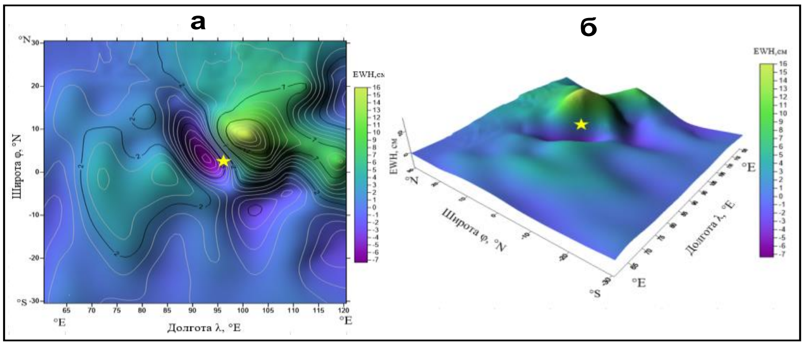

Рисунок 19 – Распределение параметра EWH для исследуемого района за декабрь 2004 г. (а); 3D визуализация изменчивости EWH в районе Суматры в декабре 2004 г. (б)

Модифицирована методика построения карт распределения параметра EWH в исследуемом сейсмоактивном регионе. На основе файла с подготовленными данными построены цифровые карты распределения параметра EWH в изолиниях, а также выполнена визуализация данных в виде 3D карты (рисунки 19, 20); звёздочкой показано местоположение мегаземлетрясения 26 декабря 2024 г.

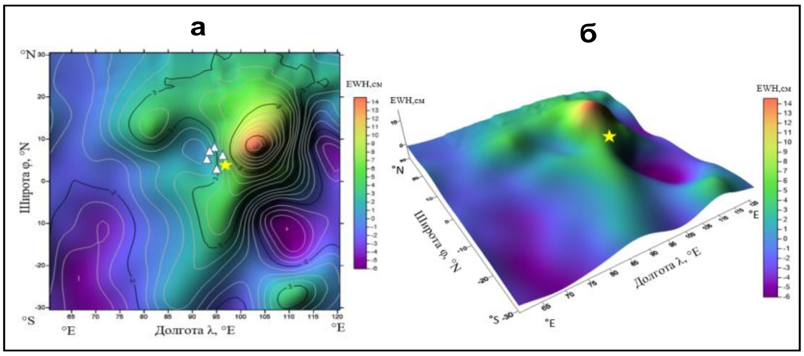

Рисунок 20 – Распределение параметра EWH для исследуемого района за декабрь 2005 г. (а); 3D визуализация изменчивости EWH в районе Суматры в декабре 2005 г. (б)

По результатам статистического анализа данных построен временнóй ряд EWH за период с января 2003 г. по декабрь 2006 г. (рисунок 21). В период с декабря по октябрь 2005 г. ход сезонных изменений EWH нарушен геодинамическими процессами. Сочетание двух сильных землетрясений 2004 г. и 2005 г. привело к существенным изменениям значений параметра EWH.

Рисунок 21 – Вариации параметра EWH с 01.2003 г. по 12.2006 г., звёздочками отмечены исследуемые сильнейшие землетрясения с магнитудами 9.1 и 8.6

5.3. Влияние геодинамических процессов на антарктическую озоновую аномалию в нижней стратосфере по спутниковым данным

Разработана методика обработки и анализа спутниковых озоновых данных, построения цифровых карт поля общего содержания озона (ОСО) в Южном полушарии над геодинамическими районами Антарктиды. В качестве одного из возможных сценариев возникновения озоновой дыры в Южном полушарии рассматривается влияние стромболинской активности стратовулкана Эребуса.

По результатам анализа спутниковых озоновых данных сформированы таблицы, содержащие информацию о минимумах ОСО с географическими координатами, дефиците масс озона и площади Антарктической озоновой дыры (АОД). По спутниковым данным об

ОСО за период с 2000 по 2023 гг. сформирован архив исходной спутниковой информации об озоновом слое в Южном полушарии. Выполнен детальный анализ аномальных вариаций озона над Антарктидой в 2002, 2018 и 2019 гг. На рисунке 22 показаны изменения минимумов ОСО в АОД за период с 2000 по 2023 гг. Значения минимумов озона в полученном ряду варьируются в пределах от 85 ед.Д. до 131 ед.Д.

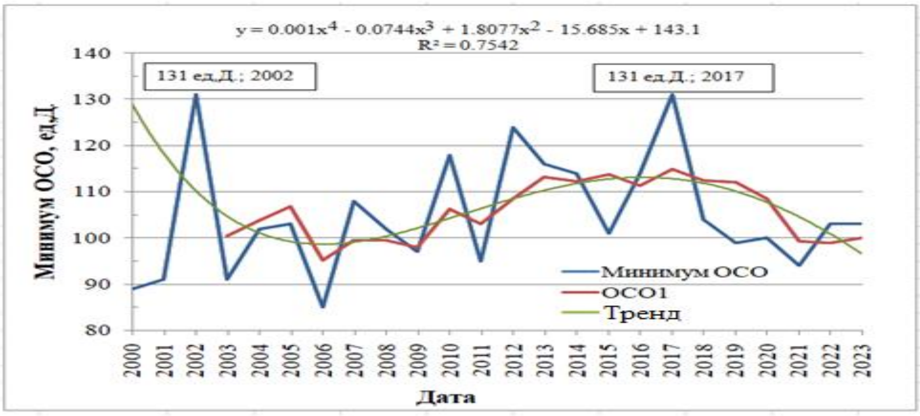

Рисунок 22 – Межгодовой ход минимумов ОСО в АОД в периоде с 2000 по 2023 гг., приведены также аппроксимационный ряд ОСО1 и тренд

Из исходной спутниковой информации дополнительно выбраны значения дефицита масс озона ΔM и площадь S. Под дефицитом массы озона ΔM понимается разность между массой озона, содержащейся в пределах границ АОД, если бы ОСО составляло 220 е.Д., и реальной массой озона в этих границах. Приведены данные изменений дефицита масс озона за период с 2000 по 2023 гг.

Выполнен детальный анализ расположения минимумов ОСО за 2000 – 2023 гг. на цифровых картах Антарктиды, в частности, аномальных вариаций озона над Антарктидой в 2002, 2018 и 2019 гг. Сформирована цифровая модель эволюции АОД с 21 по 26 сентября 2002 г., построенная по спутниковым данным OMI/Aura. Показано, что озоновая дыра отличается по форме аномалии, размерам и её месторасположению. Показано, что разделение АОД произошло географически относительно тектонической границы между Восточной (EANT) и Западной (WANT) частями рифтовой системы Антарктиды.

5.4. Задачи оценки устойчивости на конечном интервале времени множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями

Требуется оценить величину отклонения показателей качества функционирования природной или технической системы, поведение которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, от поставленной цели. Получаемая при этом информация позволяет оценивать способность системы преодолеть неприемлемые отклонения, а также препятствовать появлению таких отклонений.

В основу метода исследования положено математическое понятие устойчивости. В рамках широкого определения устойчивость означает непрерывную зависимость движения или развития системы от внешних возмущений. Различается несколько типов устойчивости – устойчивость по Ляпунову, по Лагранжу, по Пуассону, орбитальная устойчивость, равномерная устойчивость, устойчивость по части переменных, устойчивость при постоянно действующих возмущениях. В каждом из определений реализуется идея устойчивости по Ляпунову, в которой решается вопрос, имеют ли место «малые» отклонения решения дифференциального уравнения на промежутке времени $\left[0,+\infty\right)$ при «небольших» изменениях начальных данных этого решения. Как правило, отклонения оцениваются в выбранной норме пространства решений, без нахождения формулы общего решения.

В практических задачах под устойчивостью часто понимается стабильность, как способность системы функционировать, не изменяя свою структуру, под действием малых возмущений. Одной из разновидностей такого рода устойчивости является понятие технической (практической) устойчивости или устойчивости на конечном интервале времени, предложенное в работах Н. Г. Четаева и Н. Д. Моисеева. Это означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий.

Анализ устойчивости активно применяется к беспилотным системам, которые могут двигаться без управления оператором, благодаря специальному программному обеспечению и сенсорам. Чтобы уменьшить риски, связанные с использованием таких систем, проводится анализ математической модели с учётом возмущающих воздействий.

Методы, описываемые в этом разделе, эффективно применялись для оценки областей решений беспилотных систем, исследования их устойчивости на конечном интервале времени.

Пример. Цель управления – стабилизация угла рыскания надводного судна (стабилизация курса при постоянной скорости хода, нулевом крене и постоянном наклоне судна в продольной плоскости). Управляющее воздействие в математической модели представляет собой разницу между заданным курсом корабля и его истинным курсом с учетом ветровой нагрузки, которая должна стремиться к нулю. Следует также отметить, что конструкция модели и параметры часто известны с некоторой погрешностью.

Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящая от параметра

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, v), \quad y(t_0) = y_0 \in Y_0, \quad v(\cdot) \in V.$$

Для практической устойчивости требуется найти границу множеств решений. Необходимо, чтобы границы были достаточны для того, чтобы решения, которые начинаются во множестве Y_0, оставались в некотором множестве N: $y(t) \in N$.

Известны два основных подхода к оценке границ областей решений, которые на практике сложно реализуются. Для методов многократного решения системы дифференциальных уравнений с перебором всех значений начальных данных из Y_0 эти сложности состоят в чрезмерном увеличении количества операций. Для методов, основанных на операциях с множествами чисел (интервальных операциях), проявляется неустойчивость решения, из-за которой границы множеств решений начинают сильно расходиться.

Для устранения проблем были разработаны численно-символьные методы, строящие гарантированные границы множеств решений систем дифференциальных уравнений с помощью символьных формул, которые аппроксимируют оператор сдвига вдоль траектории. При записи символьных формул допускается включение в них числовых констант с отложенным выполнением арифметических действий над ними.

Предположим, что для рассматриваемой задачи множество начальных данных плотно заполняет область на плоскости

$$y(t_0) \in Y_0 = \{y_1^{low}(t_0) \le y_1(t_0) \le y_1^{up}(t_0), y_2^{low}(t_0) \le y_2(t_0) \le y_2^{up}(t_0)\}.$$

При выборе любого значения из этой области выполнены условия существования и единственности решений, тогда через каждую точку области решений будет проходить единственное решение (единственная интегральная кривая). Множество всех решений задачи будет содержать внутренние точки области (множества) решений и граничные точки.

Если правая часть f является непрерывной функцией, то исходная задача для системы ОДУ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s), y)ds \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T .$$

Оценка множества решений этой системы заключается в построении граничных функций $v(t), w(t)$, таких, что для каждого решения задачи

$$v(t) \le y(t) \le w(t) \quad \text{для} \quad 0 \le t \le T .$$

Доказано следующее утверждение. Если множество Y_0 начальных значений представляет собой многогранник или полиэдр, т. е. замкнутую поверхность, составленную из многоугольников с вершинами $y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_n(t_0)$, то множество решений $y(t)$ образует многогранник (полиэдр) с вершинами в точках $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$.

Известно, что для любого открытого (замкнутого) множества полный прообраз при непрерывном отображении будет также открытым (замкнутым) множеством. Отсюда следует, что границу множества аргументов это отображение переводит в границу множества значений.

5.5. Реализация методов с применением нелинейных формул вариации и устранение роста границ оценок множеств решений на основе регуляризации методов оценивания

Для оценки множеств решений систем ОДУ с возмущениями применима формула вариации произвольных постоянных. Метод оценивания основан на замене произвольных постоянных, входящих в общее решение однородной системы, произвольными функциями с последующей подстановкой в неоднородную систему. Чтобы преодолеть сильный рост границ множеств решений, полезно проводить регуляризацию оценок границ, переходя к линейному приближению исходной системы. Регуляризация производится путём применения преобразований сжатия/растяжения в заданных направлениях, смещения по оси времени и поворота на некоторый угол решений, входящих в множество решений в качестве элементов этого множества.

Для примера применения численно-символьного метода рассмотрим уравнение второго порядка Ван-дер-Поля, записанное в виде системы:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 , \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1 - \mu\,(1 - y_1^2)\, y_2$$

с параметром $\mu = 2$. Известно, что тривиальное решение этой системы асимптотически устойчиво при $\mu > 0$, и область притяжения ограничена неустойчивым предельным циклом.

На рисунке 23 изображена проекция на оси гарантированной оценки множества решений возмущённого уравнения Ван-дер-Поля.

Рисунок 23 – Гарантированные оценки множества решений
в полярной координатной системе

Каждая компонента вектора начальных данных принадлежит интервалу $[-1,1]$. Показаны верхняя и нижняя границы. График имеет вид области в полярной системе координат, ось времени совпадает с угловой осью. На рисунке 24 представлена проекция на плоскость y_1, y_2 гарантированной оценки множества решений. Показаны верхняя и нижняя границы. График имеет вид области в декартовой системе координат.

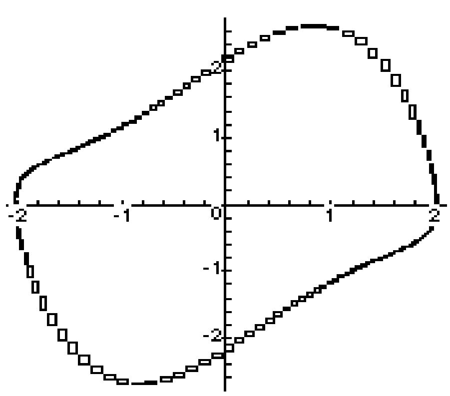

Рисунок 24 – Гарантированные оценки множества решений на плоскости y_1, y_2

Рассмотрены также другие примеры дифференциальных уравнений в математических моделях технических систем, содержащих изменяющиеся параметры. К этим параметрам относятся частоты и амплитуды внешних сил, а также величины, которые характеризуют либо возмущающие, либо управляющие воздействия. Во многих задачах для параметров воздействия известны только границы значений. При определении топологических и метрических характеристик множества решений рассматриваются как функциональные параметры правых частей системы. Это позволяет эффективно оценивать топологические свойства границ множеств решений и их метрические свойства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 2024 году выполнен полный цикл исследований, запланированных по теме проекта. Получены результаты, приоритет которых подтверждается рейтинговыми публикациями коллектива исполнителей проекта в ведущих российских и зарубежных научных журналах.

1. Вычислены алгебры Ли нелинейных уравнений тепломассопереноса с четырьмя коэффициентами переноса, зависящими от параметров состояния.

2. Построены точные решения с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика в обменном приближении.

3. Найдено приближённое решение, описывающее течение в дальнем закрученном турбулентном следе, хорошо согласующееся с имеющимися аналитическими решениями.

4. Построены карты режимов течений жидкостных систем в пространстве физических параметров состояния в плоской и цилиндрической геометрии. Выведены критерии стабилизации нестационарных течений при больших временах. Определены зависимости пороговых характеристик устойчивости течения испаряющейся жидкости, обдуваемой газовым потоком, от скорости прокачки газа в горизонтальном канале с нагреваемыми по линейному закону стенками, проведена селекция мод.

5. Изучена динамика двухфазной системы с деформируемой границей раздела жидкость – газ при различных условиях внешней тепловой нагрузки, приложенной на стенках замкнутой плоской кюветы. Исследованы сценарии поведения межфазной поверхности и динамического контактного угла при нестационарном локальном нагреве со стороны подложки и распределённом нагреве со стороны боковых стенок массива.

6. Найдены высшие операторные симметрии и общие решения для ряда гиперболических уравнений.

7. Разработана математическая модель, позволяющая качественно оценить годовой термический режим вечной мерзлоты районов суши, требующая для расчёта лишь данные изменений температуры воздуха.

8. Для анализа волновых процессов, пластической деформации и разрушения структурно неоднородных материалов на мезомасштабном уровне разработана математическая модель блочной среды с упругопластическими кластерами-блоками и тонкими податливыми реологически сложными прослойками. Проведено сравнение различных способов описания динамики блочной структуры горных пород при сейсмических воздействиях, учитывающих вязкоупругие деформации межблочных прослоек. В рамках модели предварительно напряжённой блочной среды исследован механизм возникновения самоподдерживающихся волн разрушения в закаленном стекле, обусловленных выделением энергии начальных напряжений в блоках по мере прохождения волн пластического нагружения.

9. Построена модель трёхслойной сэндвич-пластины, состоящей из двух слоёв композитного материала и изотропной упругой прослойки. Слои композитного материала моделируются с учётом различия модулей упругости при растяжении и сжатии и представляют собой ортотропный материал, армированный параллельной системой углеродных волокон. С помощью вариационного принципа Лагранжа построен функционал энергии, минимизация которого проведена с использованием метода начальных напряжений и метода конечных элементов. Анализ результатов численных расчётов показал влияние различных модулей на деформированное состояние пластины при цилиндрическом изгибе.

10. Разработан и исследован новый способ интерпретации цифровых карт распределения гравитационного параметра EWH (эквивалентный уровень воды над контуром геоида Земли), построенных по данным измерений глобальных и локальных гравитационных аномалий Земли с помощью спутниковой системы GRACE. Предложенный способ предназначен для выявления особенностей и закономерностей исследуемого геодинамического процесса в очаговых зонах сильнейших цунамигенных землетрясений (подготовка, основное событие, релаксация), происходящих в субдукционных областях Мирового океана. Результаты интерпретации карт EWH позволяют, в частности, моделировать вероятные варианты геометрических характеристик протяжённого источника цунами для последующих расчётов распространения волны в открытом океане. На новом уровне решается задача предвычислений степени опасности цунами по начальному источнику цунами, что актуально для региональных систем предупреждения об угрозе воздействия волн цунами.

11. Исследованы вопросы численного оценивания областей безопасности технических систем с управляющими и возмущающими воздействиями, в том числе беспилотных летательных аппаратов, беспилотных катеров, беспилотных машин. Для таких систем учитываются условия неопределённости, задаются границы допустимых воздействий, то есть границы возможных значений функций, параметров или коэффициентов соответствующей математической модели. Предложены эффективные алгоритмы оценки областей безопасности функционирования сложных технических систем, учитывающие зависимость решений математических моделей от изменения управляющих и возмущающих параметров, изучены способы практического построения множеств решений. Исследована проблема роста границ оценок множеств решений. Найдено решение этой проблемы.

Полученные в течение 2024 года научные и научно-технические результаты имеют высокий потенциал практического применения в машиностроении, авиастроении и других отраслях отечественной промышленности. Они позволяют получить ответ на ряд фундаментальных вопросов в науке о землетрясениях, которые могут быть решены только с помощью математических методов. Результаты моделирования применимы к анализу физических механизмов, лежащих в основе процессов зарождения и распространения возмущений в земной коре, что в конечном итоге может быть использовано при разработке систем предупреждения и защиты населения и инфраструктуры городов от крупных сейсмических событий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M. Mathematical modelling of fracture waves in a blocky medium with thin compliant interlayers // Philosophical Transactions of the Royal Society. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2024. – V. 382, Iss. 2277. – Art. 20230305. DOI: 10.1098/rsta.2023.0305. EDN: AWLVKO. (WoS, Q1; Scopus, Q1)
2. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Laskovets E. V. Study of the gas flow rate effect on the parameters of evaporative convection regimes using an exact solution // International Journal of Thermal Sciences. – 2024. – V. 204. – Art. 109179. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2024.109179. EDN: TPULKF. (WoS, Q1; Scopus, Q1)
3. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Modeling of stratified two-phase flows with non-uniform evaporation based on the exact solution of convection equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. – V. 47, Iss. 2. – P. 847–872. DOI: 10.1002/mma.9687. EDN: HGDLHN. (WoS, Q1; Scopus, Q1)
4. Senashov V.I. Layer-finiteness of some groups // Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics. – 2024. – V. 48. – P. 145–151. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.48.145. EDN: GGRRVZ. (WoS, Q2; Scopus, Q2)
5. Rogalev A. N. Regularization of numerical estimates of solution regions of differential equations with disturbing effects // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2024. – V. 21, No. 3. – P. A57–A69. DOI: 10.33048/semi.2024.21.A03. (WoS, Q4; Scopus, Q2)
6. Andreev V. K., Efimova M. V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small Marangoni number // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2024. – V. 18, Iss 2. – P. 179–191. DOI: 10.1134/S1990478-924020017. EDN: NESHNE. (Scopus, Q2)
7. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Thermal convection of two immiscible fluids in a 3D channel with a velocity field of a special type // Fluid Dynamics. – 2023. – V. 58, Iss. 7. – P. 1246–1254. DOI: 10.1134/s0015462823602176. EDN: WKNEXA. (WoS, Q4; Scopus, Q3)
8. Stepanova I.V. Binary mixture convection in a horizontal channel under the Soret effect action // Theoretical and Applied Mechanics. – 2024. – V. 51, Iss. 2. – 16 p. Article in Press. DOI: 10.2298/TAM231019004S. EDN: EATDRY. (WoS, Q4; Scopus, Q4)
9. Sadovskii V. M. Reduction of the Cosserat-type nonlinear equations to the system of Godunov's form // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 1. – P. 55–64. EDN: OEKHND. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)

10. Andreev V. K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a three-dimensional layer at low Marangoni numbers // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 2. – P. 195–206. EDN: FVESDY. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
11. Kaptsov O. V. Symmetries of linear and nonlinear partial differential equations // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 5. – P. 570–574. EDN: CSWBKZ. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
12. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. On one exact solution of an evaporative convection problem with the Dirichlet boundary conditions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 2. – P. 207–219. EDN: GTRJTD. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
13. Shmidt A. V. Approximate solution to a model of the far momentumless axisymmetric turbulent wake // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 2. – P. 229–237. EDN: LOHSKC. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
14. Smolekho I. V. Analysis of the unstable state of a nematic liquid crystal based on a simplified dynamic model // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2024. – V. 17, Iss. 2. – P. 272–281. EDN: VEGZRT. (WoS, Q4; Scopus, Q3; ядро РИНЦ)
15. Азанов А. А., Лемешкова Е. Н. Качественные свойства решения одной сопряжённой задачи тепловой конвекции // Ученые записки Казанского ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 326–343. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.326-343. EDN: IMCMCO. (WoS, Q4; Scopus, Q4; ядро РИНЦ)
16. Андреев В. К., Степанова И. В. Априорные и апостериорные оценки решения одной эволюционной обратной задачи // Ученые записки Казанского ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. – 2024. – Т. 166, № 1. – С. 5–21. EDN: YOQXWL. (WoS, Q4; Scopus, Q4; ядро РИНЦ)
17. Андреев В. К., Вахрамеев И. В. Свойства решения обратной сопряжённой краевой задачи о тепловой конвекции в трубе // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 5. – С. 13–27. DOI: 10.15372/PMTF202415495. EDN: KZVJUV. (ядро РИНЦ)
18. Капцов О. В. Решения линейных моделей гидродинамики с переменными коэффициентами // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 5. – С. 95–102. DOI: 10.15372/PMTF202415474. EDN: IQIPET. (ядро РИНЦ).
19. Аннин Б. Д., Садовский В. М., Садовская О. В. Задача трехточечного изгиба упругой балки из пористого металла // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 2. – С. 217–227. DOI: 10.31857/S0032823524020043. EDN: XUTZSL. (ядро РИНЦ)

20. Садовский В. М., Садовская О. В. Алгоритмы корректировки решения для численного моделирования динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред // Вычислительные методы и программирование. – 2024. – Т. 25, вып. 1. – С. 78–91. DOI: 10.26089/NumMet.v25r107. EDN: DQFLQF. (ядро РИНЦ)
21. Сенашов В. И. M-апериодические слова над трехбуквенным алфавитом // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2024. – Т. 25, № 2. – С. 176–181. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-176–181. EDN: OIQGDD. (ядро РИНЦ)
22. Андреев В.К., Ефимова М.В. Структура двухслойного течения в канале с радиальным нагревом нижней подложки при малых числах Марангони // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27, № 2 (98). – С. 5–19. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.201. EDN: OPUHGI. (ядро РИНЦ)
23. Миронов В.А., Перетокин С.А., Симонов К.В. Алгоритм построения графиков повторяемости землетрясений с учетом неопределенностей в оценке магнитуд // Информатизация и связь. – 2024. – № 2. – С. 27–32. DOI: 10.34219/2078-8320-2024-15-2-27-32. EDN: SOXWKL. (ВАК)
24. Симонов К.В., Рублева Т.В., Мацулев А.Н. Геодинамические процессы в зонах субдукции и интерпретация данных измерений КС GRACE // Информатизация и связь. – 2024. – № 3. – С. 37–45. DOI: 10.34219/2078-8320-2024-15-3-37-45. EDN: EIMBGD. (ВАК)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом

1. Авторы: Андреев Виктор Константинович

   Докладчик: Андреев Виктор Константинович

   Название доклада: Групповые свойства универсального уравнения одномерных движений газа

   Название конференции: Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвящённая 105-летию со дня рождения академика Л. В. Овсянникова

   Место проведения конференции: Новосибирск, 13–17 мая 2024 г.

2. Авторы: Володько Ольга Станиславовна, Лемешкова Елена Николаевна

   Докладчик: Володько Ольга Станиславовна

   Название доклада: Вертикальная структура внутренних сейш в стратифицированном озере

   Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

   Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

3. Авторы: Генова Светлана Николаевна, Белолипецкий Виктор Михайлович

   Докладчик: Генова Светлана Николаевна

   Название доклада: Одномерная модель для исследования годовой динамики вечной мерзлоты в районах суши

   Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

   Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

4. Автор: Ефимов Евгений Александрович

   Докладчик: Ефимов Евгений Александрович

   Название доклада: Распространение волн в трёхмерной блочной среде с тонкими прослойками

   Название конференции: Конференция 053w: «Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах»

   Место проведения конференции: Сочи, Сириус, 4–8 ноября 2024 г.

5. Авторы: Капцов Олег Викторович

   Докладчик: Капцов Олег Викторович

   Название доклада: Contact mappings of jet spaces

   Название конференции: International Conference «Advances in Applications of Analytical Methods for Solving Differential Equations (Symmetry 2024)»

   Место проведения конференции: Nakhon Ratchasima, Thailand, 22–26 января 2024 г.

6. Авторы: Петраков Игорь Евгеньевич

   Докладчик: Петраков Игорь Евгеньевич

   Название доклада: Моделирование сечения двухслойного разномодульного композитного материала с упругой прослойкой

   Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

   Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

7. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Садовская Оксана Викторовна

   Докладчик: Садовский Владимир Михайлович

   Название доклада: Задача о бегущей дислокации

   Название конференции: Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвящённая 105-летию со дня рождения академика Л. В. Овсянникова

   Место проведения конференции: Новосибирск, 13–17 мая 2024 г.

8. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Садовская Оксана Викторовна

   Докладчик: Садовский Владимир Михайлович

   Название доклада: Моделирование веерного механизма образования разломов в земной коре

   Название конференции: Конференция 053w: «Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах»

   Место проведения конференции: Сочи, Сириус, 4–8 ноября 2024 г.

9. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Садовская Оксана Викторовна

   Докладчик: Садовская Оксана Викторовна

   Название доклада: Моделирование волн разрушения на основе уравнений блочной среды

   Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

   Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

10. Авторы: Смолехо Ирина Владимировна

    Докладчик: Смолехо Ирина Владимировна

    Название доклада: Исследование эффекта ориентационной термоупругости с помощью упрощённой модели нематического жидкого кристалла в акустическом приближении

    Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

    Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

11. Авторы: Степанова Ирина Владимировна, Мелешко Сергей Васильевич

    Докладчик: Степанова Ирина Владимировна

    Название доклада: Group classification of heat and mass transfer equations

    Название конференции: International Conference «Advances in Applications of Analytical Methods for Solving Differential Equations (Symmetry 2024)»

    Место проведения конференции: Nakhon Ratchasima, Thailand, 22–26 января 2024 г.

12. Авторы: Шмидт Алексей Владимирович

    Докладчик: Шмидт Алексей Владимирович

    Название доклада: Приближённое решение для дальней области закрученного турбулентного следа

    Название конференции: Всероссийская онлайн-конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН

    Место проведения конференции: Красноярск, 18–20 сентября 2024 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности, зарегистрированных в 2024 году

1. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2024687438 «Программа корректировки напряжений для учета пластичности в динамике упругопластических, сыпучих и пористых сред (DynPlast_StressCorr)». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Авторы: Садовская О. В., Садовский В. М. Дата гос. регистрации: 19.11.2024.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2024 год, утвержденная государственным заданием

Описание задач, предлагаемых к решению	**Предполагаемые (ожидаемые) результаты**
1. Теоретико-групповой анализ уравнений тепломассообмена с непостоянными коэффициентами переноса. Построение решений с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика. Построение решений задачи о течении в закрученном турбулентном следе.	1. Структура алгебр Ли нелинейных уравнений тепломассопереноса. Точные решения с функциональным произволом трёхмерных уравнений ферромагнетика в обменном приближении. Приближённое решение, описывающее течение в дальнем закрученном турбулентном следе.
2. Построение новых точных решений неклассических моделей конвекции: анализ прямых и обратных задач, исследование устойчивости точных решений. Изучение динамики двухслойных систем жидких сред, подверженных внешним тепловым воздействиям.	2. Точные решения, соответствующие течениям в областях различной геометрии, в том числе с границами раздела, области их применимости. Спектры характеристических возмущений точных решений, карты устойчивости.
3. Модификация одномерной в вертикальном направлении математической модели годового термического режима вечной мерзлоты для районов суши с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя.	3. Модифицированная математическая модель для изучения динамики термического режима вечной мерзлоты для районов суши.
4. Математическое и численное моделирование нестационарных процессов в геологических средах с учётом вязких эффектов, пластической деформации и структурной неоднородности. Разработка параллельных вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных систем, применение их к анализу распространения сейсмических волн.	4. Параллельные вычислительные алгоритмы для анализа нестационарных процессов в геологических средах с учётом вязких эффектов, пластической деформации и структурной неоднородности. Программная реализация алгоритмов на высокопроизводительных вычислительных системах кластерной архитектуры. Результаты расчётов распространения волн, возбуждаемых импульсным сейсмоисточником в грунтовых массивах.
5. Развитие методов исследования устойчивости природных и технических систем по отношению к постоянно действующим возмущениям. Комплексный анализ возмущения начальных условий и уравнений движения на конечном интервале времени. Анализ зависимости динамики	5. Алгоритмы вычисления аффинного тензора векторного поля и линейного приближения деформации границ областей безопасности математических моделей природных и технических систем и их программная реализация. Методы оценки множеств решений системы путём

формы границ областей безопасности систем от множеств решений дифференциальных уравнений. Конструирование сходящихся последовательностей в пространстве решений.

численного решения исходной системы дифференциальных уравнений с начальными данными в точках измерений (вершинах многогранников, концах полуосей эллипсоидов).

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Количественные показатели проекта, утвержденные государственным заданием, за весь период выполнения проекта по годам

Наименование показателя	Ед. измерения	2024 г.	2025 г.	2026 г.
Публикации (типа article и review) в научных журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science Core Collection и (или) Scopus)	единиц	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)	9 (из них 2 в научных журналах первого и второго квартилей)
Прочие публикации в научных журналах, входящих в ядро РИНЦ	единиц	15	15	15
Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом	единиц	12	12	12
Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности	единиц	1	1	1