

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»  
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)

УДК 517.958

Рег. № НИОКТР 124012900546-4

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН  
чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А. А. Шпедт

«\_\_\_\_\_» января 2026 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕД  
С ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА В ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
(промежуточный, этап 2)

Направление фундаментальных исследований  
1.1.1. Теоретическая математика  
(№ FWES-2024-0025)

Руководитель НИР

главный научный сотрудник

член-корреспондент РАН

\_\_\_\_\_ В. М. Садовский

Красноярск 2026

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы гл. науч. сотр., член-корреспондент РАН	_____	В. М. Садовский (Раздел 4)
Исполнители:		
зав. отд., д-р физ.-мат. наук	_____	В. Б. Бекежанова (Раздел 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	В. К. Андреев (Раздел 1, 2)
гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	В. М. Белолипецкий (Раздел 3)
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	О. В. Капцов (Раздел 1)
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	В. И. Сенашов (Раздел 1)
вед. науч. сотр., д-р техн. наук	_____	К. В. Симонов (Раздел 5)
ст. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	И. В. Степанова (Разделы 1, 2)
ст. науч. сотр., канд. техн. наук	_____	С. Н. Генова (Раздел 3)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	И. В. Киреев (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	А. Н. Рогалев (Раздел 5)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	О. В. Садовская (Раздел 4)
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	А. В. Шмидт (Раздел 1)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	М. В. Ефимова (Раздел 2)
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Е. Н. Лемешкова (Раздел 2)

науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Е. П. Магденко (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	И. Е. Петраков (Раздел 4)
	<i>(подпись, дата)</i>	
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Ю. В. Шанько (Раздел 1)
	<i>(подпись, дата)</i>	
мл. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	И. В. Смолехо (Раздел 4)
	<i>(подпись, дата)</i>	
ст. инж.	_____	Н. Ф. Ильина (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
ст. инж.	_____	Е. И. Калмыкова (Раздел 5)
	<i>(подпись, дата)</i>	
инж.	_____	К. А. Амосов (Раздел 4)
	<i>(подпись, дата)</i>	
инж.	_____	Е. А. Ефимов (Раздел 4)
	<i>(подпись, дата)</i>	
инж.	_____	В. С. Кобычева (Раздел 2)
	<i>(подпись, дата)</i>	
нормоконтроль	_____	А. А. Кадочников
	<i>(подпись, дата)</i>	

## РЕФЕРАТ

Отчёт 70 с., 29 рис., 3 табл., 5 прил.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ГИДРОДИНАМИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД, УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЙ, БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ГЕОМОНИТОРИНГ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ**

Объектом исследований, проводимых в рамках настоящего проекта, являются процессы, происходящие в многокомпонентных естественных и управляемых системах под влиянием разнородных факторов и при различных условиях функционирования в окружающей среде. Цель исследований состоит в разработке более точных математических моделей для описания сложных природных и технических комплексов, создании теоретических основ экспериментальных методов исследований многофазных систем, развитии аналитических и численных методов для решения неклассических задач механики сплошных сред в областях с поверхностями раздела. Для достижения указанной цели выполняются анализ новых нелинейных математических моделей, построение точных решений определяющих дифференциальных уравнений, исследование свойств точных решений, включая свойства устойчивости; разработка и реализация вычислительных алгоритмов и комплексов программ, в том числе предполагающих распараллеливание вычислений на высокопроизводительных ЭВМ, для решения фундаментальных и прикладных задач, включая задачи, возникающие в ходе лабораторных экспериментов; выработка рекомендаций по аспектам функционирования технических объектов и их модификациям, прогнозирование динамики природных систем и оценка возможных последствий естественных природных явлений.

Промежуточный отчёт по второму этапу проекта научной темы содержит описание результатов выполнения темы проекта в 2025 г.

В 2025 году получены следующие новые результаты. По результатам решения задач, исследуемых в рамках тематики раздела 1, сформулированы необходимые условия на потенциал для существования обобщённых функционально-инвариантных решений класса 2 трёхмерного стационарного уравнения Шрёдингера. Усовершенствован метод построения приближённых решений краевых задач свободной турбулентности, основанный на процедуре сшивки асимптотических разложений решений привлекаемых полуэмпирических моделей турбулентности. Развиваемый метод позволяет в процессе построения приближённых решений осуществлять выделение значения показателя автомодельности задачи и других неизвестных параметров. Значительно расширен известный ранее результат групповой классификации уравнений одномерных течений газа

с уравнением состояния общего вида, в котором давление задано произвольной гладкой функцией плотности и энтропии. С применением аппарата перехода в лагранжевы координаты найдено 28 спецификаций данной функции, для которых симметрия системы уравнений расширяется. В частности, для плоских волн обнаружено новое, помимо известных, уравнение состояния политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5$ . Некоторые из найденных уравнений состояния содержат функциональный произвол, что повышает их потенциал для построения точных решений исходных моделей.

В разделе 2 изучен ряд задач об устойчивости двухслойных жидкостных систем с внутренними термокапиллярными границами раздела. На основе амплитудных уравнений, записанных в лагранжевых координатах, доказана неустойчивость растяжения двухслойной идеальной жидкости. В задаче об устойчивости равновесия двух вязких теплопроводных жидкостей с недеформируемой границей раздела и верхней свободной границей, заполняющих цилиндрический контейнер, построено аналитическое решение, описывающее динамику и форму малых осесимметрических немонотонных возмущений. Для конкретной системы сред построены нейтральные кривые, изучена их эволюция в зависимости от геометрии цилиндра. В рамках модели испарительной конвекции исследована устойчивость точного решения уравнений Обербека – Буссинеска, принадлежащего классу решений Бириха, относительно трёхмерных конечно-амплитудных колебаний. С помощью точного решения изучены характеристики конвективных режимов, возникающих в жидкости, обдуваемой парогазовым потоком. Изучена структура вторичных движений в зависимости от кинематических характеристик газа. Описано формирование различных вторичных режимов, которые могут реализоваться в форме упорядоченных поперечных или продольных конвективных валов.

Исследованы спектральные задачи для двумерных стационарных термогравитационных течений в двух различных конфигурациях: в слое жидкости со свободной термокапиллярной поверхностью и канале с проницаемой верхней стенкой. В обоих случаях осуществлена редукция к нелинейной спектральной задаче для параметра, связанного с градиентом давления. В предельных случаях получены аналитические решения соответствующих спектральных задач, для произвольных чисел Марангони или Рейнольдса построены численные решения. Установлено свойство неединственности решений: для некоторых чисел Марангони (для течения в слое со свободной границей) или Рейнольдса (для течения в канале) может существовать от одного до трёх различных решений, выполнен анализ структуры течений, соответствующих различным собственным значениям. Построено точное решение, описывающее стационарные трёхмерные термодиффузионные течения в двухслойной системе жидких сред, одна из которых

является бинарной смесью, заполняющей канал с непроницаемой подложкой, на которой поддерживается квадратичное распределение температуры, и теплоизолированной верхней стенкой. Изучено влияние толщин слоёв на структуру возникающих вихревых течений. Разработаны модификации математической модели испарительной конвекции, позволяющие учесть неоднородность состава жидкой и газовой рабочих сред, являющихся бинарными смесями, нелинейность зависимости поверхностного натяжения от концентрации жидкого раствора и корректно использовать условия отсутствия потоков тепла и вещества через стенки канала. Полученные модели использованы для расчёта основных характеристик течений с диффузионным испарением на границе раздела (скорости, интенсивности испарения, температуры и концентрации) в системе реальных сред; верификация точных решений выполнена на основе сравнения расчётных и экспериментальных данных. Изучена задача о термокапиллярной конвекции, индуцируемой внешней локальной тепловой нагрузкой, в замкнутой камере, частично заполненной испаряющейся жидкостью. Математическая модель, основанная на приближении Буссинеска, включает условие теплового баланса на границе раздела жидкость – газ, обобщённое на случай учёта диффузионного испарения, термодиффузионных эффектов, обусловленных присутствием испаряемого компонента в газовой фазе, и дефекта тепла, отвечающего затратам энергии на деформацию межфазной границы. Выполнено численное моделирование, позволяющее оценить вклад дефекта тепла при переходе через внутреннюю поверхность раздела. В рамках обобщённой постановки предсказывается уменьшение глубины термокапиллярного прогиба в области температурного удара и амплитуды осцилляций межфазной границы. Предложенная математическая модель составляет теоретическую основу для экспериментальных методов исследования термокапиллярной конвекции в многокомпонентных системах в лабораторных условиях.

Результаты, полученные при выполнении работ раздела 3, развивают имеющиеся результаты по построению корректных моделей прогнозирования динамики вечной мерзлоты. Разработана одномерная квазистационарная модель для расчёта глубины протаивания и вертикальных температурных профилей в слоях вечной мерзлоты (снег, талый и мёрзлый грунты), учитывающая метеорологические данные в качестве входных параметров в условиях Стефана на подвижных границах фазовых переходов. Реализован численный алгоритм, основанный на методе расщепления; проведён вычислительный эксперимент с данными метеостанции Анадырь.

Исследования раздела 4 направлены на решение проблемы определения параметров упругости моментного континуума Коссера, которая представляет собой непреодолимое

препятствие на пути широкого применения моментной теории к анализу деформации элементов конструкций из структурно неоднородных материалов типа пористых сред, пенометаллов, геоматериалов, композитов. Эта трудноразрешимая проблема в течение более сотни лет с момента появления теории сдерживает активное использование данной теории инженерами-механиками. В частности, по этой причине уравнения континуума Коссера, которые в отличие от классических уравнений механики сплошной среды дают адекватное описание вращательных движений в средах с микроструктурой, не используются в современных конечно-элементных программных средствах для инженерных расчётов типа Ansys, Abaqus и т.п. В разделе представлены основанные на структурном анализе алгоритмы заполнения пропусков в таблицах параметров по известным из литературы экспериментальным испытаниям пористых материалов, костной ткани и композитов, наполненных стеклянными сферами. Получены формулы для оценки параметров упругости в теории континуума Коссера для многоблочной среды с тонкими податливыми прослойками через параметры упругости блоков и прослоек. Эти формулы верифицированы с помощью сравнительных расчётов в двумерной постановке задачи о распространении волн вращательного движения на основе модели блочной среды и модели ортотропного моментного континуума.

В разделе 4 приведены также результаты моделирования динамики нематического жидкого кристалла 5СБ на основе упрощённой математической модели акустического приближения, учитывающей эффекты Коссера.

В разделе 5 продолжены исследования прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий на основе методов аппроксимации тригонометрическими многочленами, многочленами Лежандра, нелинейной многомерной регрессии (нейросетевой подход). Полученные модели адекватно описывают процесс подготовки сильнейшего землетрясения и позволяют оценить основные параметры ожидаемого сейсмического события. Учёт влияния внешних геодинамических факторов, изменчивости гравитационного поля Земли и анализ локальных гравитационных аномалий относительно очаговых зон катастрофических мега-землетрясений в Тихом океане позволил уточнить на основе применения индекса аномалии местоположение и геометрические особенности очагов Чилийского (2010 г.) и Японского (2011 г.) цунамигенных землетрясений. Эти данные предоставляют возможность оценить зону генерации цунами, пригодную для применения в качестве начальных условий для численного моделирования распространения цунами современными быстрыми алгоритмами, а также выполнить обработку и визуализацию результатов расчётов. В этой связи предложена алгоритмическая схема геометрического анализа расчётных визуальных

данных, основанная на применении алгоритмов шпирлет-преобразования и цветового кодирования изображений.

В рамках работы обзорного характера выполнен анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли на примере влияния геодинамических факторов на формирование Антарктической озоновой дыры (АОД).

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	11
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	14
1 Разработка новых методов решения уравнений с частными производными. Построение точных решений с функциональным произволом линейных и нелинейных уравнений .....	14
1.1 Критерий существования ОФИ решения класса 2 для стационарного уравнения Шрёдингера.....	14
1.2 Построение решений задачи о течении в дальних областях турбулентного слоя смешения .....	14
1.3 Групповые свойства уравнений одномерных движений газа .....	17
2 Исследование устойчивости течений в рамках неклассических моделей конвекции. Апробация двусторонних постановок задач для описания динамики жидкостных систем в небуссинесковских условиях. Анализ конвективных режимов, индуцированных внешними воздействиями.....	19
2.1 Исследование устойчивости двухслойных течений .....	19
2.1.1 Неустойчивость растяжения двух несмешивающихся идеальных жидкостей .....	19
2.1.2 Устойчивость равновесия цилиндрической двухслойной системы .....	20
2.1.3 Вторичные течения в испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным потоком газа .....	21
2.2 Спектры краевых задач двумерной тепловой конвекции.....	23
2.2.1 Система со свободной поверхностью.....	23
2.2.2 Течения в канале с твёрдыми стенками .....	24
2.3 Краевые задачи тепловой конвекции в различных условиях.....	26
2.3.1 Конвекция в двухслойной системе в присутствии локального температурного экстремума на нижней границе.....	26
2.3.2 Двухслойное течение бинарных смесей в канале с теплоизолированными стенками .....	27
2.3.3 Влияние скорости прокачки газа на интенсивность испарения в системе двухкомпонентных смесей .....	29
2.4 Численное моделирование конвекции, возбуждаемой локальным нагревом, в рамках постановки, учитывающей вклад дефекта тепла.....	31
3 Разработка комплекса численных алгоритмов и компьютерных программ для исследования сезонных изменений вечной мерзлоты, адаптация комплекса под методику дистанционных измерений .....	34

4	Разработка методов калибровки параметров упругости однородного ортотропного моментного континуума Коссера на основе численного решения волновых задач для блочной среды с податливыми прослойками .....	35
4.1	Анализ экспериментальных данных по определению параметров Коссера .....	36
4.2	Блочные среды с тонкими прослойками .....	39
4.3	Сравнительные расчёты волн вращательного движения .....	41
4.4	Моделирование нестационарных процессов в жидких кристаллах .....	43
5	Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учётом влияния внешних геодинамических факторов. Анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли .....	48
5.1	Результаты построения и исследования прогностических моделей предвестников для сильных сейсмических событий на основе методов аппроксимации .....	48
5.2	Учёт дополнительных геодинамических факторов, изменчивости гравитационного поля Земли и анализ его локальных аномалий относительно очаговых зон мега-землетрясений в Тихом океане.....	51
5.3	Результаты анализа кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли на примере влияния геодинамических факторов на формирование Антарктической озоновой дыры .....	55
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	57
	ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	62
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б .....	65
	ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	68
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г .....	69
	ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	70

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий отчёт является промежуточным по второму этапу научной темы «Математическое моделирование неидеальных сред с поверхностями раздела в природных и технических системах» за 2025 год.

Проведённые исследования соответствуют приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: «а» переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объёмов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта; «б» переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии.

Тематика отчёта соответствует научному направлению Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021 – 2030 годы) по разделу «1.1.1.4. Дифференциальные уравнения (в том числе обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными), динамические системы, теория управления, в том числе, оптимальное управление, приложения к задачам математической физики. Развитие теории и конструктивных методов решения уравнений с частными производными, возникающих в математической физике, механике, химии, биологии, медицине и др. приложениях». В рамках этого направления задачи механики, возникающие при исследовании многокомпонентных систем с внутренними границами раздела, требуют междисциплинарного подхода и привлекают внимание учёных разных специальностей в России и за рубежом. Запрос на изучение подобных задач формируется при разработке и совершенствовании технологий, применяемых в химической и пищевой промышленности, микроэлектронике, металлургии, материаловедении, гидрофизике, экологии, геофизике. Достаточно упомянуть проблемы, связанные с оптимизацией процессов термического контроля в системах теплоотвода различного назначения, термического осушения и нанесения покрытий, в том числе покрытий с требуемыми функциональными характеристиками, электрофореза, жидкостных технологий, основанных на принципе термокапиллярного отклика. Для природных систем глобальной экологической проблемой является изменение климата Земли. Таяние вечной мерзлоты в северных широтах становится источником значительного количества парниковых газов в атмосфере и может привести к усилению глобального потепления. Рассматриваемые в проекте задачи востребованы при анализе динамики вечной мерзлоты

и последствий, связанных с оттаиванием грунтов и изменением поведения геологических разломов. Уточнение математических моделей за счёт учёта вклада дополнительных факторов, которыми пренебрегают в классических постановках, неизбежно приводит к их усложнению и, как следствие, к привлечению более сложного аппарата для решения соответствующих начально-краевых задач. А в ряде случаев изучение характера и степени влияния разнородных механизмов, влияющих на динамику сложных систем, требует разработки новых подходов к описанию изучаемых явлений.

В отчётный период 2025 года исследования проводились по пяти направлениям:

1) Разработка новых методов решения уравнений с частными производными. Построение точных решений с функциональным произволом линейных и нелинейных уравнений.

2) Исследование устойчивости течений в рамках неклассических моделей конвекции. Апробация двусторонних постановок задач для описания динамики жидкостных систем в небуссинесковских условиях. Анализ конвективных режимов, индуцированных внешними воздействиями.

3) Разработка комплекса численных алгоритмов и компьютерных программ для исследования сезонных изменений вечной мерзлоты, адаптация комплекса под методику дистанционных измерений.

4) Разработка методов калибровки параметров упругости однородного ортотропного моментного континуума Коссера на основе численного решения волновых задач для блочной среды с податливыми прослойками.

5) Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учётом влияния внешних геодинамических факторов. Анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли.

Полученные в 2025 году результаты соответствуют поставленным целям и задачам. По новизне задач, оригинальности постановок и точности решений, прикладной значимости исследований качество результатов соответствует мировому уровню, а для некоторых рассматриваемых проблем имеет опережающий характер. Это подтверждается публикациями в ведущих научных журналах по тематике исследований и направлениям проекта, индексируемых в международных наукометрических базах, а также в иных высокорейтинговых журналах. При реализации планов проекта использовались как зарекомендовавшие себя традиционные методы и технологии исследований, так и современные, в том числе оригинальные, разрабатываемые исполнителями проекта. Построенные математические модели процессов и явлений соответствуют принятому в мире уровню полноты и точности описания.

Результаты, изложенные в отчёте, являются фундаментальными. По каждому из направлений проекта разработаны новые подходы, которые в дальнейшем могут быть применены при решении открытых проблем. Практическое использование полученных результатов возможно: а) в инженерной практике для быстрого получения оценок значений гидродинамических характеристик свободных турбулентных течений; б) при разработке и/или совершенствовании экспериментальных методов исследования конвекции в мини-системах в условиях испарения; в) при принятии технологических решений относительно характеристик тепловых элементов, используемых для продуцирования внешней температурной нагрузки в жидкостных термокапиллярных мини-системах; г) при оценке скорости и глубины сезонного протаивания зон вечной мерзлоты; д) для расчётов напряжённо-деформированного состояния структурно неоднородных сред; е) для установления связей глобальных геодинамических и геофизических процессов с катастрофическими сейсмическими событиями.

В тексте отчёта приведены основные результаты (с иллюстрациями), полученные в ходе выполнения проекта в 2025 году.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### **1 Разработка новых методов решения уравнений с частными производными. Построение точных решений с функциональным произволом линейных и нелинейных уравнений**

#### **1.1 Критерий существования ОФИ решения класса 2 для стационарного уравнения Шрёдингера**

Для трёхмерного стационарного уравнения Шрёдингера

$$\Delta\Psi = U(x, y, z)\Psi, \quad (1)$$

где  $\Psi$  – комплекснозначная волновая функция,  $\Delta$  – трёхмерный оператор Лапласа,  $U$  – вещественный потенциал, рассмотрены обобщённые функционально-инвариантные (ОФИ) решения класса 2, то есть решения, представимые в виде:

$$\Psi = \Psi_1 h_1(q) + \Psi_2 h_2(q). \quad (2)$$

Здесь функции  $\Psi_1, \Psi_2, q$ , зависящие от  $x, y, z$ , считаются заданными, а функции  $h_1, h_2$  – произвольные, достаточно гладкие.

Получены необходимые условия существования обобщённых функционально-инвариантных решений уравнений (2), которые сформулированы в виде критерия.

*Критерий существования ОФИ решения класса 2 для уравнений (1).*

Пусть  $(f(x, y, z))^{-2} = |U(x, y, z)|$ , тогда при условии, что  $f_{xy}f_{xz}f_{yz} \neq 0$ , и выполнении соотношений

$$f_{yz}(f_{xy}^2 - f_{xz}^2) - f_{xy}f_{xz}(f_{yy} - f_{zz}) = 0, \quad f_{xz}(f_{xy}^2 - f_{yz}^2) - f_{xy}f_{yz}(f_{xx} - f_{zz}) = 0 \quad (3)$$

решения уравнения (1) в форме (2) существуют.

#### **1.2 Построение решений задачи о течении в дальних областях турбулентного слоя смешения**

Проведено усовершенствование нового метода построения приближённых решений краевых задач свободной турбулентности, основанного на сшивке усечений асимптотических разложений решений уравнений привлекаемых полуэмпирических моделей турбулентности. В целях повышения точности метода предлагается сохранять

выражения для части коэффициентов при младших членах асимптотических разложений перед выполнением процедуры сшивки.

Данная модификация метода была использована при построении приближённого автомодельного решения второго рода краевой задачи, сформулированной в рамках полуэмпирической модели дальнего закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом (предложена А. Г. Деменковым и Г. Г. Черных). Приближённое значение показателя автомодельности 0.2312 поставленной задачи также определялось в процессе выполнения процедуры сшивки асимптотических разложений. Полученные при построении приближённого решения результаты использовались в качестве данных для пристрелки при решении рассматриваемой краевой задачи методом стрельбы. При этом в численных расчётах значение показателя автомодельности фиксировалось в соответствии со значением  $21/92$ , установленным аналитически В. С. Мадеричем и С. И. Константиновым. Результаты сравнения приближённого решения, построенного в виде усечения ряда Пьюизё и включающего 16 аппроксимантов, и численного решения, полученного методом стрельбы, представлены на рисунке 1. Относительная погрешность решений не превосходит 1 %.

Рассмотрена задача описания течения в дальних областях турбулентного слоя смешения на основе  $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \\ U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x$  – переменная, вдоль которой преимущественно развивается слой смешения,  $y$  – поперечная координата,  $U$  – продольная компонента скорости осреднённого движения,  $V$  – поперечная компонента скорости осреднённого движения,  $k$  – кинетическая энергия турбулентности,  $\varepsilon$  – скорость диссипация кинетической энергии турбулентности.

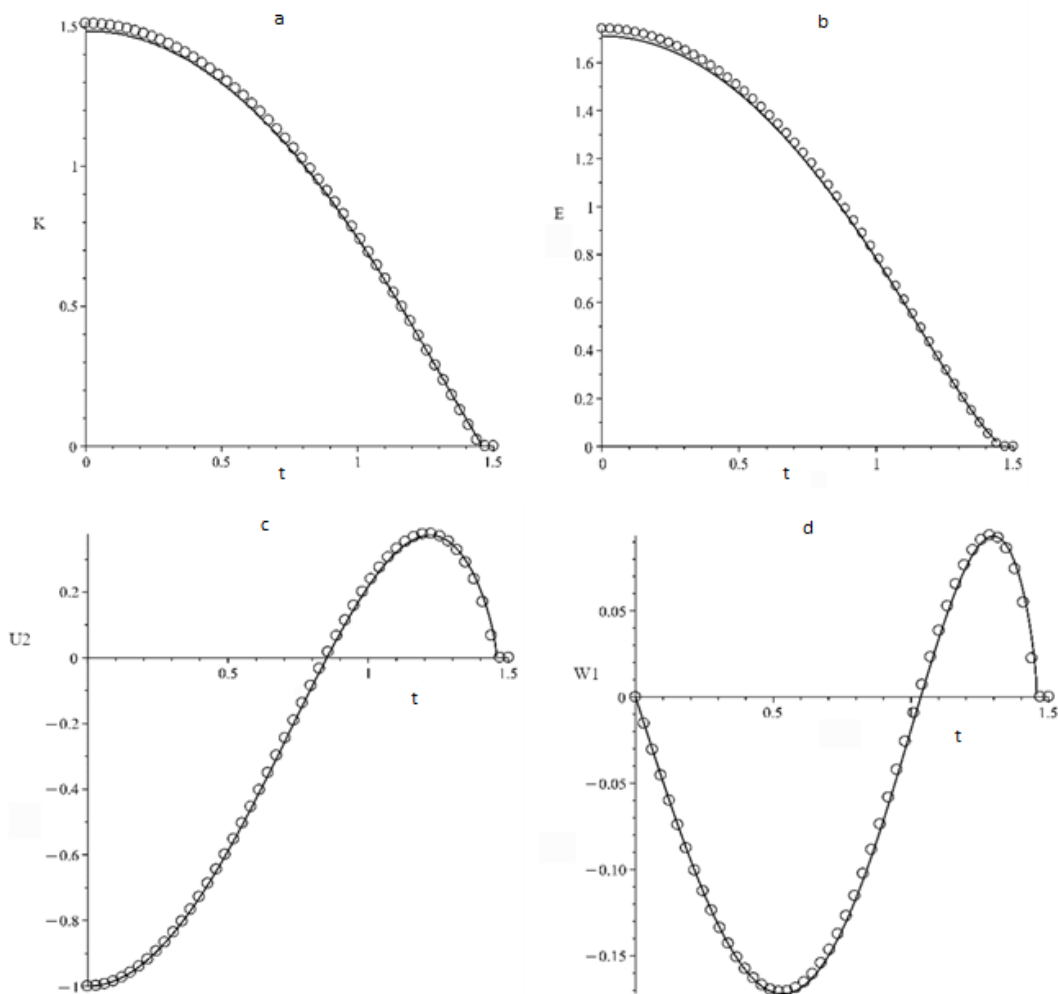


Рисунок 1 – Сравнение аналитического и численного решения: а) кинетическая энергия турбулентности, б) скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, в) дефект продольной осреднённой компоненты скорости, г) тангенциальная осреднённая компонента скорости. Сплошные линии представляют приближённое решение, символы о – численное решение

Получена автомодельная редукция уравнений модели (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующая краевая задача для редуцированной системы относится к классу задач с автомодельностью первого рода. Значение показателя автомодельности удаётся установить, привлекая закон сохранения импульса. С помощью метода сшивки асимптотических разложений проведено построение приближённого решения, описывающего течение в дальних областях турбулентного слоя смешения. Относительная погрешность приближённого решения, содержащего 13 аппроксимантов, и численного решения данной краевой задачи, полученного ранее К. С. Юргенсоном с помощью модифицированного метода стрельбы, не превышает 1 %. Сравнение указанных решений представлено на рисунке 2. Кроме того, имеет место удовлетворительное согласие приближённого решения с доступными экспериментальными данными.

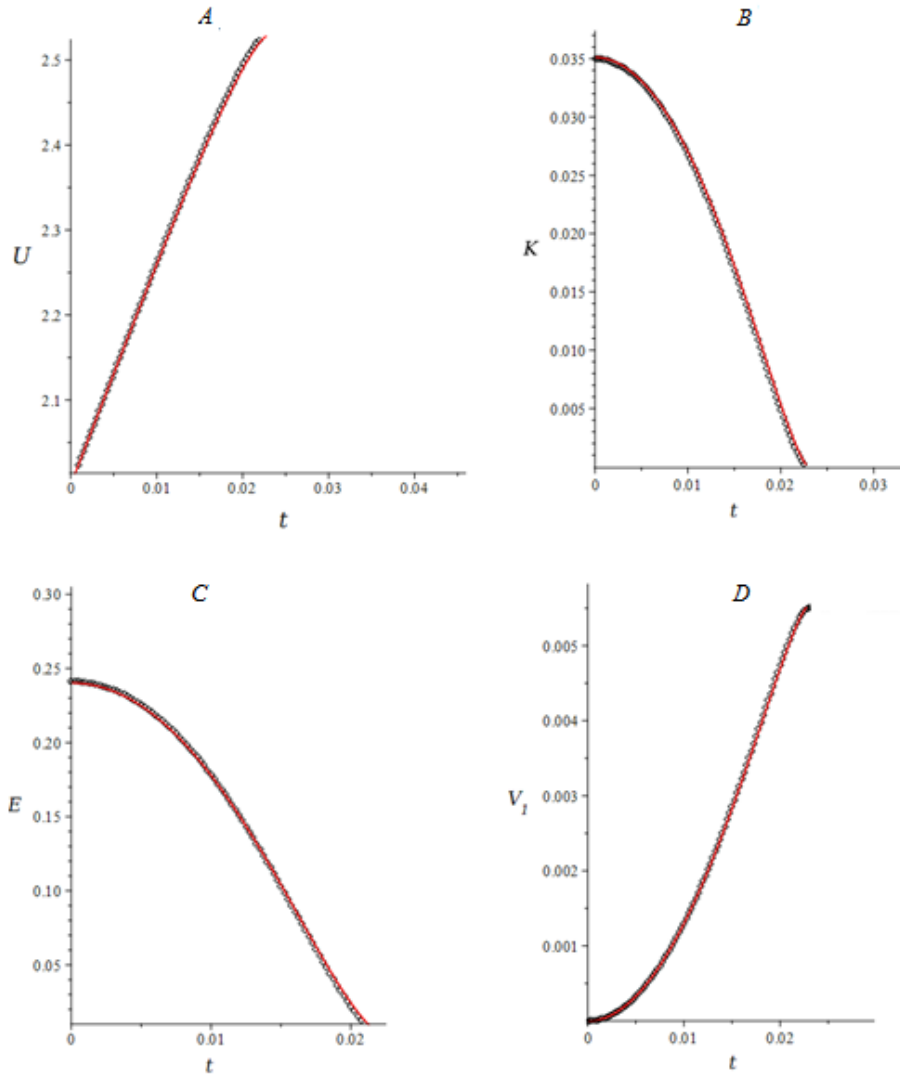


Рисунок 2 – Сопоставление аналитического и численного решения: *A*) продольная осреднённая компонента скорости, *B*) кинетическая энергия турбулентности, *C*) скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, *D*) поперечная осреднённая компонента скорости. Сплошные линии представляют приближённое решение, символы о – численное решение

### 1.3 Групповые свойства уравнений одномерных движений газа

Одномерные движения газа в эйлеровых координатах описываются системой уравнений

$$q_t + qq_r + \frac{1}{\rho} p_r = 0, \quad \rho_t + q\rho_r + \rho\left(q_r + \frac{v}{r}q\right) = 0, \quad s_t + qs_r = 0, \quad (5)$$

где  $v = 0, r = x, q = u$  для плоских волн,  $v = 1, r = (x^2 + y^2)^{1/2}, q = (u^2 + v^2)^{1/2}$  для цилиндрических и  $v = 2, r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, q = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$  для сферических волн;  $u, v, w$  – проекции

вектора скорости на оси  $x, y, z$ ;  $\rho, p, s$  – плотность, давление и энтропия газа. Система (5) дополняется уравнением состояния газа  $p = g(\rho, s)$ , таким, что  $\sqrt{g_\rho}$  – скорость звука в газе. Показано, что в случае непрерывных течений газа система (5) может быть сведена к одному уравнению для лагранжевой переменной  $y(t, x)$ :

$$y_x^2 y_{tt} - 2y_x y_t y_{xt} + (y_t^2 - f_\rho) y_{xx} + \frac{v}{x} f_\rho y_x^3 = y_x^3 f_y, \quad (6)$$

где функция  $f(\rho, y) = g(r^{-v} y_r, s(y))$  задаёт уравнение состояния.

Решена задача групповой классификации для уравнения (6) относительно функции  $f(\rho, y)$  и показателя  $v = \{0; 1; 2\}$  в зависимости от того, какие волны (плоские, цилиндрические, сферические) рассматриваются. Вычислена основная алгебра  $L_0$ , операторы которой допускаются уравнением (6) при произвольных классифицируемых параметрах:

$$L_0 = \{\partial_t \text{ при } v \neq 0; \partial_t, \partial_x, t \partial_x \text{ при } v = 0\}. \quad (7)$$

Установлено, что преобразование эквивалентности для классифицируемой функции представляется в виде  $\bar{f}(\bar{\rho}, \bar{y}) = a_1 f(a_2 \rho, a_3 y + a_4) + a_5$ , где  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3, a_4, a_5$  – постоянные. С учётом преобразования эквивалентности найдены 28 специализаций уравнения состояния, которые допускают расширение основной алгебры  $L_0$ . Приведём ниже два примера.

Пример 1. *Сферические волны*. В случае  $v = 2$ ,  $f = \alpha(\rho) + y$ ,  $\alpha(\rho)$  – произвольная функция, уравнение (5) допускает дополнительно к  $L_0$  оператор переноса по  $y$ :  $L = \{L_0, \partial_y\}$ .

Пример 2. *Плоские волны, политропный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 5$* . Если  $v = 0$ ,  $f = \rho^5 + \sigma y$ ,  $\sigma = \{0; \mp 1\}$ , алгебра допускаемых операторов имеет следующий вид:

$$L = \left\{ L_0, t^2 \partial_t + \left( tx - \frac{\sigma t^3}{2} \right) \partial_x, \left( x - \frac{\sigma t^2}{2} \right) \partial_x + 2y \partial_y, t \partial_t - \sigma t^2 \partial_x - y \partial_y \right\}. \quad (8)$$

## **2 Исследование устойчивости течений в рамках неклассических моделей конвекции. Апробация двусторонних постановок задач для описания динамики жидкостных систем в небуссинесковских условиях. Анализ конвективных режимов, индуцированных внешними воздействиями**

### **2.1 Исследование устойчивости двухслойных течений**

#### **2.1.1 Неустойчивость растяжения двух несмешивающихся идеальных жидкостей**

Исследована эволюция малых возмущений совместного движения двух идеальных несжимаемых жидкостей, которые равномерно растягиваются. На свободных границах слоёв и на поверхности раздела между ними выполняются кинематические и динамические условия. В плоском случае основное движение описывается явными функциями, при этом поле скоростей линейно зависит от одноимённых координат и времени, поле давлений – квадратичная функция продольной координаты. При растяжении с ростом времени толщины слоёв уменьшаются так, что течение можно считать плёночным. Показано, что задача о малых возмущениях в лагранжевых координатах допускает разделение переменных. Получена система амплитудных уравнений, содержащая три числа Вебера (параметры влияния сил поверхностного натяжения на свободных границах и границе раздела), отношение плотностей, начальных толщин слоёв и волновых чисел. Полученные результаты численного решения амплитудных уравнений указывают на неустойчивость рассматриваемого движения. На рисунке 3 приведён результат расчёта амплитуд нормальных составляющих возмущений поверхности раздела  $R^0(\tau)$  и свободных границ  $R^1(\tau)$ ,  $R^2(\tau)$ ,  $\tau$  – безразмерное время,  $We_j$  – числа Вебера ( $j = 0,1,2$ ). Можно видеть, что амплитуды возмущений свободных поверхностей и границы раздела неограниченно нарастают со временем.

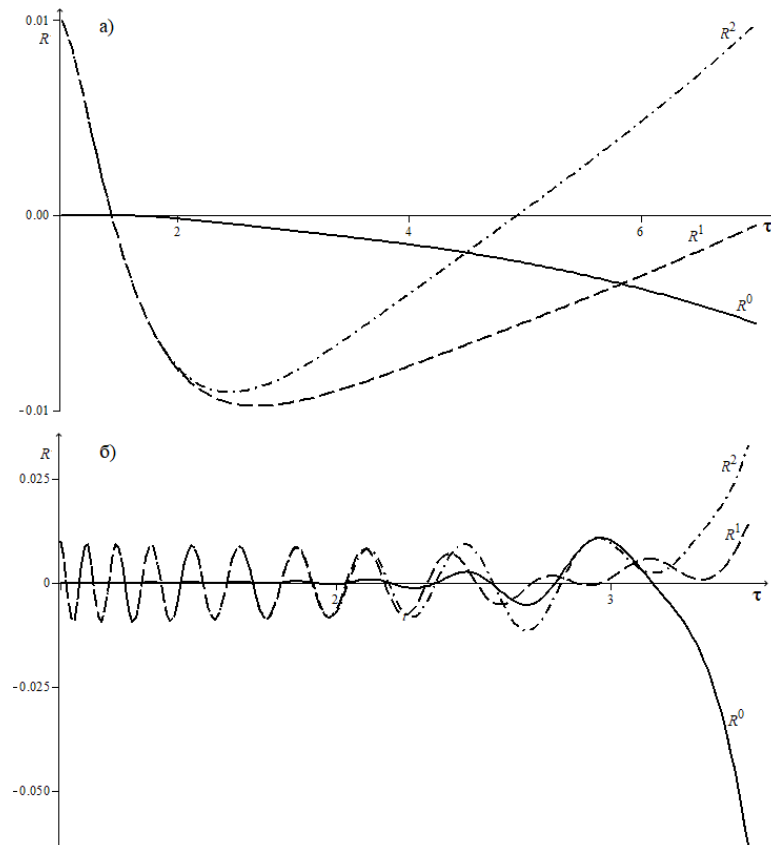


Рисунок 3 – Поведение амплитуд возмущений  $R^0(\tau)$ ,  $R^1(\tau)$ ,  $R^2(\tau)$ : а) при  $We_1 = 0$ ,  $We_2 = 0$ ,  $We_0 = 0$ ; б) при  $We_1 = We_2 = 5$ ,  $We_0 = 0$

### 2.1.2 Устойчивость равновесия цилиндрической двухслойной системы

Исследована задача о малых осесимметрических немонотонных возмущениях равновесного состояния двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхностью раздела  $\Gamma$  (считается внутренней границей) в вертикальном цилиндрическом контейнере с твёрдым дном. Верхняя граница системы  $\Gamma_b$  – свободная поверхность. Предполагается, что внутренняя и свободная границы  $\Gamma$  и  $\Gamma_b$  не деформируются и образуют прямой угол контакта с боковой поверхностью  $\Gamma_s$  цилиндрического контейнера, поверхностное натяжение каждой жидкости линейно зависит от температуры. На  $\Gamma_s$  выполняется условие просачивания жидкости, при этом общий поток через всю боковую поверхность равен нулю. Аналитическое решение задачи построено с помощью разделения переменных в виде комбинаций функций Бесселя.

Для системы жидкостей трансформаторное масло – муравьиная кислота построены нейтральные кривые, определяющие критические значения температуры  $T^*$ , задаваемой на нижнем основании цилиндра, при которых в системе возникает конвективное движение. Проведён анализ влияния параметров задачи на вид нейтральных кривых. Установлено, что с увеличением числа Вебера  $We$ , отвечающего за соотношение сил инерции и

поверхностного натяжения, растут пороговые значения температуры  $T^*$ . Нейтральные кривые в плоскости  $(\alpha, \lg|M|)$  представлены на рисунке 4. Здесь  $\alpha$  – геометрический параметр, характеризующий отношение высоты нижнего слоя к радиусу цилиндра,  $M$  – число Марангони, содержащее множителем величину  $T^*$ . Изучено влияние интенсивности теплообмена на свободной границе  $\Gamma_b$  с окружающей средой: при росте числа Био  $Bi$  значение критической температуры  $T^*$  также увеличивается.

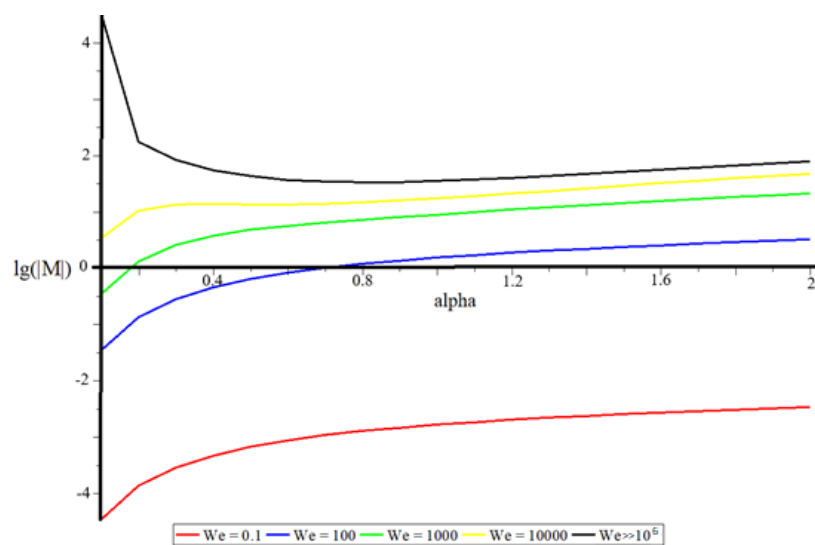


Рисунок 4 – Зависимость числа Марангони от  $\alpha$  при различных значениях числа Вебера  $We$

### 2.1.3 Вторичные течения в испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным потоком газа

В рамках двусторонней модели испарительной конвекции исследуется эволюция возмущений конечной амплитуды в надкритической области и форма вторичных режимов, возникающих при потере устойчивости совместных течений испаряющейся жидкости и парогазового потока в плоском горизонтальном миниканале. Основное состояние, представляющее собой стационарное течение, описывается точным частично-инвариантным решением ранга 1 дефекта 3 уравнений Обербека – Буссинеска. Решение позволяет моделировать конвективные установившиеся однонаправленные течения на рабочем участке протяжённого канала, на стенках которого приложена линейная тепловая нагрузка, в условиях заданного расхода газа  $R_g$  (определяется скоростью прокачки  $v_g^*$ ). Для возникающих в рассматриваемой двухслойной системе режимов характерно формирование на межфазной поверхности теплового поля с постоянным продольным градиентом  $A$ , величина которого определяется в ходе построения точного решения с помощью соответствующих граничных условий.

Рассматриваются пространственные трёхмерные колебания конечной амплитуды и исследуется структура вторичных движений, которые описываются суммой функций, отвечающих осреднённому движению и второй гармонике в надкритичной области. При определении среднего вторичного движения используются амплитудные функции для первичных колебаний, полученные ранее при исследовании линейной устойчивости основного течения. Согласно результатам, полученным в рамках линейной теории, при потере устойчивости в рассматриваемой системе возникают колебательные режимы, которым отвечают соответствующие инфинитезимальные моды; при этом граница области неустойчивости определяется значениями числа Грасгофа  $Gr$  (или числа Марангони  $Ma$ ), содержащими величину градиента  $A$  в качестве множителя.

На примере системы сред этанол – воздух изучено влияние расхода газа  $R_g$  на структуру вторичных конвективных режимов. Установлено, что при малых скоростях прокачки основной вклад в формирование вторичного движения вносит плоская компонента первичного колебания рэлеевского типа; в обеих средах распространяются поперечные конвективные валы, которые сносятся основным течением (это видно по деформации тепловых структур в жидком слое (см. рисунок 5 а). При увеличении скорости прокачки  $v_g^*$  в системе жёстко возбуждаются продольные структуры, вдоль которых частицы движутся по винтообразным траекториям в направлении приповерхностного основного течения (см. рисунок 5 б).

Возникающее вторичное течение представляет собой суперпозицию плоских и пространственных компонент первичных колебаний. С ростом  $R_g$  происходит уменьшение поперечного размера упорядоченных периодических валов.

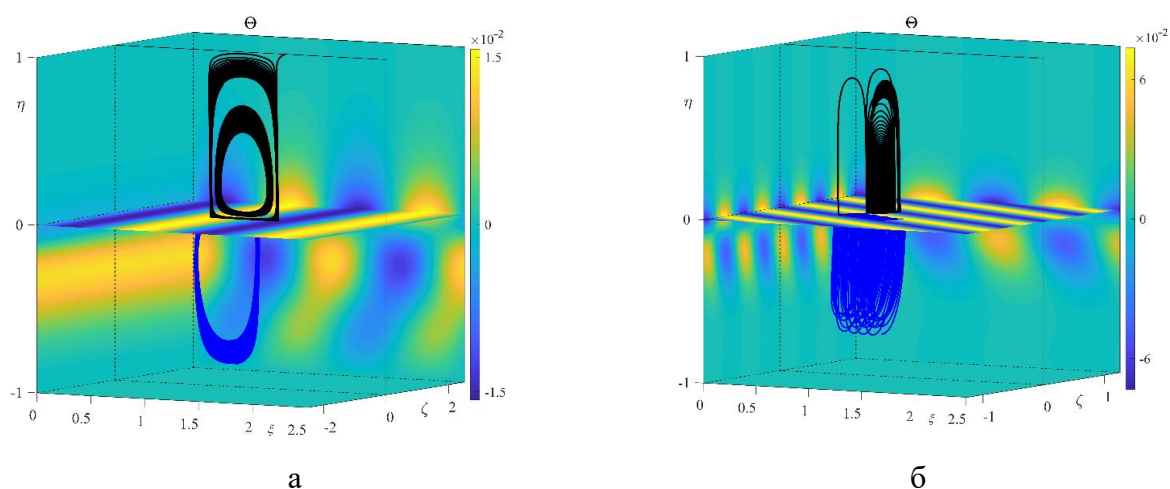


Рисунок 5 – Траектории частиц и структура теплового поля вторичных движений в системе этанол – воздух с толщиной жидкого и газового слоёв 3 мм: а)  $A = 4.8 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}$ ,  $R_g = 9.2 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ ; б)  $A = 9.7 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}$ ,  $R_g = 18.4 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$

## 2.2 Спектры краевых задач двумерной тепловой конвекции

В рамках двумерных постановок проведено исследование течений жидкости в полосе, ограниченной твёрдыми стенками, и в области со свободной верхней границей. В качестве математической модели использовались уравнения Навье – Стокса, дополненные уравнением теплопереноса. Решение указанных задач ищется в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям: поля скорости линейны по продольной координате, поля температур и давлений – квадратичные функции той же координаты. Анализ системы определяющих уравнений на совместность приводит к нелинейной задаче на собственные значения для определения полей течений в канале. Установлена неединственность решения, характерная для задач подобного рода.

### 2.2.1 Система со свободной поверхностью

Исследовано течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на плоской твёрдой неравномерно нагретой границе. Предполагается, что свободная граница не деформируется, так что жидкий слой имеет постоянную толщину. На свободной границе задано условие теплового контакта; поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Поставленная задача сводится к спектральной задаче для нелинейного дифференциального оператора, содержащего слагаемое  $F$ . Этот член отвечает за коэффициент при горизонтальном градиенте давления, который, в свою очередь, также является искомой функцией наряду со скоростью. Зависимость  $F(Ma, Pr)$  исследована аналитически при малых числах Марангони ( $Ma$ ) и численно при произвольных числах Марангони. Изучено влияние числа Прандтля  $Pr$  и величины теплового потока на изменение спектра.

На рисунке 6 представлен спектр  $F = F(Ma, Pr = 0)$ . Видно, что на ветви 1 ( $Ma > 0$ ) имеется не более двух решений, а на ветвях 2, 3 ( $Ma < 0$ ) имеется от одного до трёх значений собственного числа  $F$ , отвечающих фиксированному числу Марангони (на ветви 3 – одно решение). Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе. Отметим, что имеется не менее двух решений с нулевым собственным значением: одно соответствует асимптотике  $F = 3Ma$ , полученной аналитически при малых числах Марангони, а второе – значению  $Ma = -572.426$  (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3). Ветвям 1 и 3 спектра соответствуют режимы с одновихревой структурой потока (одной возвратной зоной). Значениям  $F_1 = 2783.857$ ,  $F_2 = 887.843$  и  $F_3 = 421.954$  (ветвь 2 на рисунке 6) – двухвихревые течения (рисунок 7 а). Линии тока для нулевого собственного значения ( $F = 0$ ,  $Ma = -572.426$ ) указывают на формирование одновихревого режима (рисунок 7 б), причём ядро вихря смещено к свободной границе.

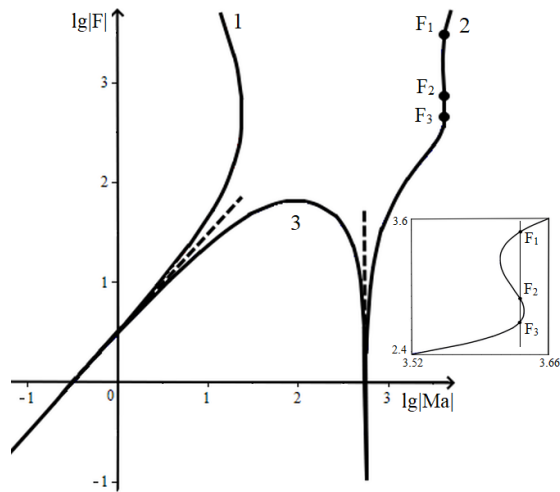


Рисунок 6 – Спектр  $F = F(Ma, Pr = 0)$

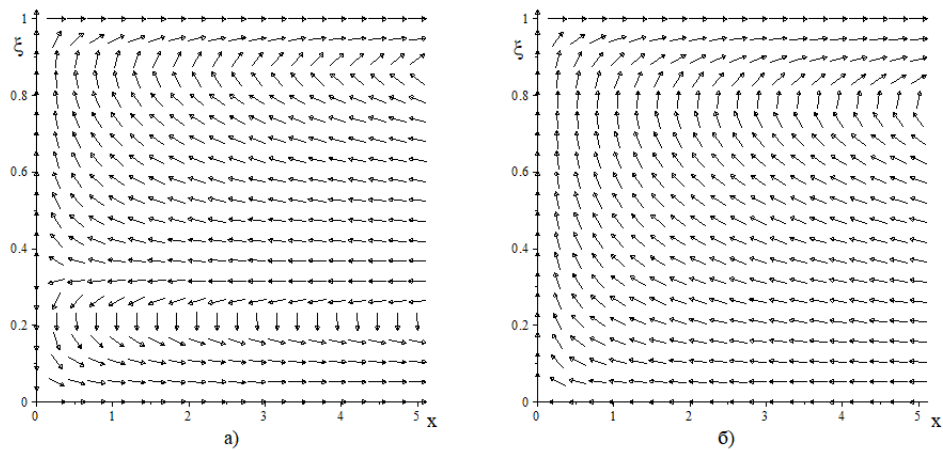


Рисунок 7 – Линии тока в слое для  $F = 421.954$  (а) и  $F = 0$  (б)

### 2.2.2 Течения в канале с твёрдыми стенками

Изучено течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с подогреваемой подложкой. На верхней стенке для скорости задано условие проницаемости (просачивания). Исследовалась структура спектра возникающей задачи и топология течения в слое в зависимости от числа Рейнольдса  $R$ . Зависимость  $F(R)$  исследовалась аналитически при малых числах Рейнольдса и численно для произвольных.

На рисунке 8 представлен спектр  $F = F(R)$ , который демонстрирует неединственность решения рассматриваемой задачи. В частности, на ветви 3 ( $R > 0$ ) имеется от одного до трёх собственных значений  $F$ , соответствующих фиксированному значению  $R$ . Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе. Также имеется не менее двух решений с нулевым собственным значением: одно

соответствует асимптотике  $F = -12 R$ , а второе – значению параметра  $R = 6.303$  (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3).

На рисунке 9 приведены профили горизонтальной компоненты скорости  $W(\xi)$  для нескольких точек спектра  $F = F(R)$ . Кривые 1 – 3 соответствуют значениям  $F_1, F_2$  и  $F_3$  (ветвь 2 на рисунке 8). При  $F = F_1$  противоток возникает в центральной части слоя, причём пиковые скорости в противоположных направлениях отличаются почти вдвое. Кривая 4 описывает решение с нулевым собственным значением:  $F = 0, R = 6.303$ . В этом случае течение является возвратным во всей рассматриваемой области.

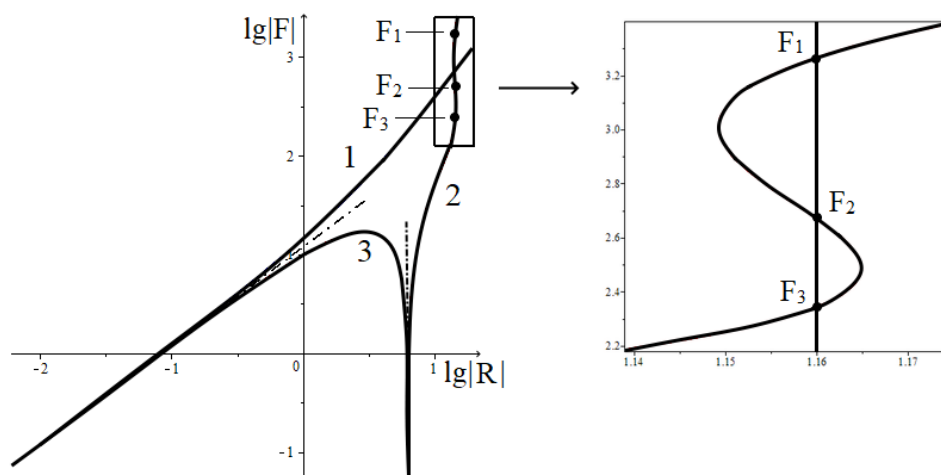


Рисунок 8 – Спектр  $F = F(R)$

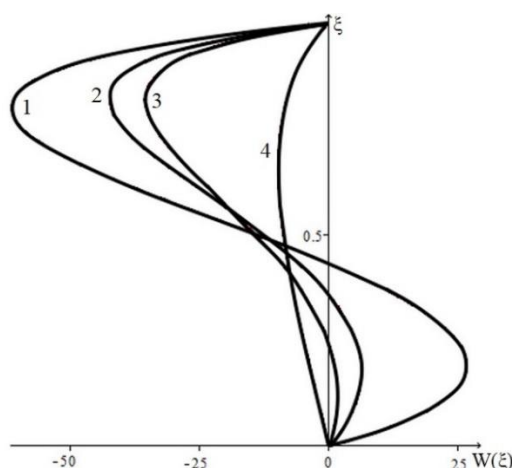


Рисунок 9 – Профиль горизонтальной составляющей скорости: кривые 1, 2, 3 соответствуют одноимённым значениям параметров  $F_i$ , кривая 4 построена при  $F = 0$

Для всех точек спектра, образующих ветви 1 и 3, характерно течение типа Пуазейля с параболическим профилем скорости. При этом любое значение на ветви 3 ( $F < 0, R > 0$ ) соответствует течению с отрицательной скоростью, что согласуется с отрицательными значениями параметра  $F$ .

## 2.3 Краевые задачи тепловой конвекции в различных условиях

### 2.3.1 Конвекция в двухслойной системе в присутствии локального температурного экстремума на нижней границе

Исследуются характеристики конвективных режимов в двухслойной системе несмешивающихся жидких сред, в которой нижняя жидкость является бинарной смесью. Для описания процессов тепло- и массопереноса в системе используются уравнения Обербека – Буссинеска, дополненные уравнениями теплопереноса в обоих слоях и массообмена в бинарной жидкости:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \mathbf{v}_{jt} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla \bar{p}_j + \nu_j \Delta \mathbf{v}_j - \mathbf{g}(\beta_j^T \theta_j + \varepsilon_j \beta^C c), \\ \theta_{jt} + \mathbf{v}_j \nabla \theta_j = \chi_j \Delta \theta_j, \quad c_t + \mathbf{v}_2 \nabla c = D \Delta c + \alpha_2 D \Delta \theta_2. \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{v}_j$  – вектор скорости,  $\theta_j$  и  $c$  – отклонения температуры и концентрации от их средних равновесных значений,  $\bar{p}_j$  – модифицированное давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  – ускорение силы тяжести,  $\rho_j, \nu_j, \beta_j^T, \beta^C, \chi_j, D, \alpha$  – постоянные коэффициенты плотности, кинематической вязкости, теплового и концентрационного расширения, температуропроводности, диффузии и термодиффузии,  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ . На границе раздела сред  $z = 0$  справедливы стандартные условия: равенство скоростей и температур; динамическое и кинематическое; равенство потоков тепла; отсутствие потока вещества через границу. На неподвижных внешних твёрдых границах канала считаются выполненными условия прилипания для функций скорости. На непроницаемой подложке задана тепловая нагрузка, распределённая по квадратичному закону относительно горизонтальных координат, верхняя стенка теплоизолирована.

Для исследования структуры движения вблизи локального экстремума температуры на подложке решение уравнений (9) строится в специальном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j = \left( f_j(z, t)x, f_j(z, t)y, -2 \int_{z_0}^z f_j(\zeta, t) d\zeta \right), \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(x, y, z, t), \\ \theta_j = a_j(z, t)(x^2 + y^2) + q_j(z, t), \quad c = m(z, t)(x^2 + y^2) + k(z, t), \end{aligned} \quad (10)$$

подстановка которого в определяющие уравнения позволяет построить стационарное решение в конечных формулах при малых числах Марангони. С помощью полученного решения проведён анализ влияния физических и геометрических параметров на параметры течений в системе. Показано, что с увеличением толщины слоя растёт интенсивность течения в бинарной смеси, при этом верхняя жидкость слабо реагирует на это изменение. В окрестности границы раздела  $z = 0$  с ростом толщины нижнего слоя влияние вязких сил уменьшается, и за счёт сил поверхностного натяжения формируется возвратное течение. На рисунке 10 представлены безразмерные зависимости, характеризующие поле скорости в поле силы тяжести для модельной системы со следующими физическими параметрами:  $\nu = \nu_1 / \nu_2 = 0.104$ ,  $\rho = \rho_1 / \rho_2 = 0.98$ ,  $\chi = \chi_1 / \chi_2 = 1.116$ ,  $k = k_1 / k_2 = 2.215$ .

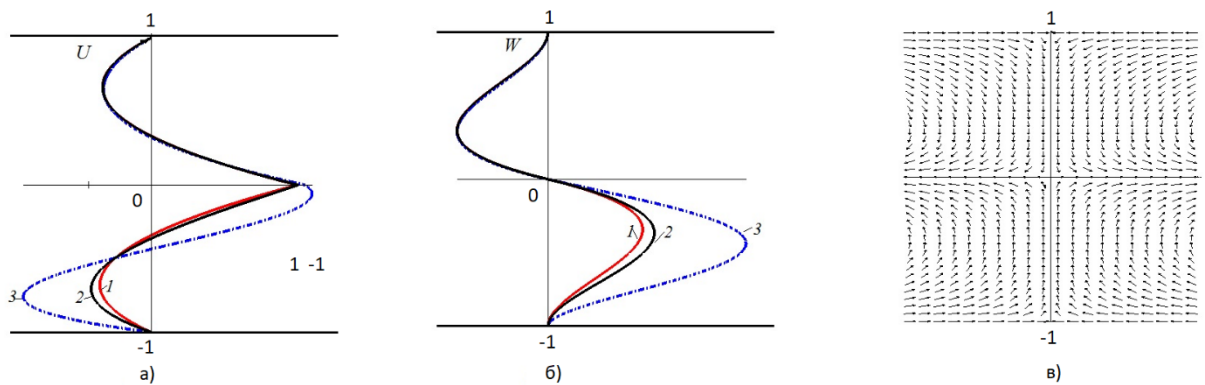


Рисунок 10 – Компонента функции скорости  $U$  (а),  $W$  (б) при различных толщинах слоёв: 1 –  $l_1 = l_2 = 0.0005$ , 2 –  $l_1 = l_2 = 0.001$ , 3 –  $l_1 = l_2 = 0.0025$ ; поле скоростей в сечении  $x = 1$  (в)

### 2.3.2 Двухслойное течение бинарных смесей в канале с теплоизолированными стенками

Постановки задач для моделирования испарительной конвекции в системе двух бинарных смесей в протяжённом горизонтальном канале с твёрдыми стенками, с помощью точного решения определяющих уравнений термоконцентрационной конвекции в приближении Буссинеска, допускают четыре типа граничных условий для функции температуры: условия Дирихле или Неймана на обеих твёрдых стенках или смешанные условия, когда на одной из стенок задаётся распределение температуры, на другой – нулевой поток тепла в направлении нормали к стенке. Использование каждого из этих условий в сочетании с остальными граничными соотношениями на стенках канала и поверхности раздела сред  $\Gamma$  приводит к необходимости согласования решения соответствующей задачи с физическим смыслом описываемого процесса и верификации на основе сравнения с доступными экспериментальными данными. Одной из характеристик

эксперимента по измерению зависимостей массовой скорости испарения в системе жидкость – газопаровая смесь является теплоизолированность стенок кюветы (Lyulin, Kabov, 2023). В соответствии с этим, в математической модели, состоящей из уравнений однонаправленного сопряжённого течения жидкого и газопарового слоёв, балансовых соотношений тепло- и массообмена в обеих средах, для функции температуры используются условия Неймана. Поскольку для функции концентрации испаряемого компонента также ставятся краевые условия второго рода, возникает классическая проблема неединственности решения второй краевой задачи для эллиптического оператора. Для выделения единственного решения вводятся два дополнительных интегральных условия, фиксирующих средние значения температуры и концентрации в жидком слое. Полученное решение используется для описания испарительной конвекции в системе водный раствор этанола – смесь паров этанола и химически инертного азота. Параметры системы следующие: толщины слоёв  $h_1 = 3$  мм,  $h_2 = 5$  мм, длина рабочего участка  $L_h = 100$  мм, расход прокачиваемого газа  $q = 6.7 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с), концентрация этанола в жидкости  $C_0 = 0.7$ , средняя температура нижнего слоя  $T_0 = 25$  °С, поверхностное натяжение  $\sigma = (38.212 - 0.089 T^1 - 15.534 C^1)$  мН/м (Стабников и др., 1976), где  $T^1$ ,  $C^1$  – температура и концентрация в жидком слое. Остальные параметры рабочих сред взяты из справочной литературы. Зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации существенно влияет на течение в системе, являясь механизмом возникновения термо- и концентрационно-капиллярного эффектов на поверхности раздела, который индуцирует движение жидкости в окрестности поверхности раздела  $y = 0$  в области с меньшими температурой и концентрацией. Вследствие испарения этанола температура (рисунок 11) и концентрация на  $\Gamma$  со стороны жидкой фазы (рисунок 12) меньше, чем на нижней стенке  $y = -h_1$ . Интенсивность испарения можно оценить величиной массовой скорости испарения  $M$ . Для рассматриваемых параметров расчётное значение составляет  $M = 2.234 \cdot 10^{-6}$  кг/(м·с<sup>2</sup>). Следует отметить, что математическая модель даёт заниженные по сравнению с экспериментальными значения параметра  $M$ , что объясняется использованием двумерной геометрии (двумерность модели ограничивает перенос тепла и массы горизонтальным направлением), пренебрежением конвективным движением на границе раздела, а также расхождением в свойствах жидкостей (в эксперименте использовался чистый этанол, в то время как модель разработана для водно-спиртовых растворов, у которых массовая скорость испарения зависит от концентрации). Тепломассоперенос в верхнем слое связан с действием эффекта термодиффузии: как видно на рисунках 11 и 13, и температура, и концентрация падают в направлении увеличения координаты  $y$ .

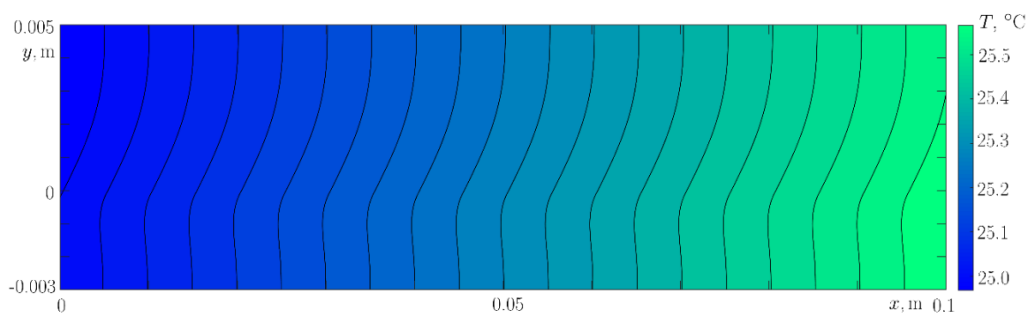


Рисунок 11 – Поле температуры в двухслойной системе с испарением на границе раздела  $y = 0$  и условиями теплоизоляции горизонтальных стенок канала

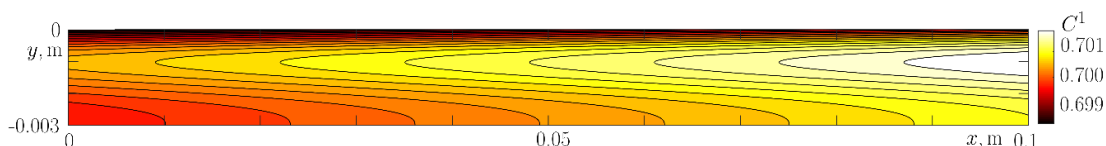


Рисунок 12 – Поле концентрации в слое жидкости для модели с условиями теплоизоляции горизонтальных стенок канала

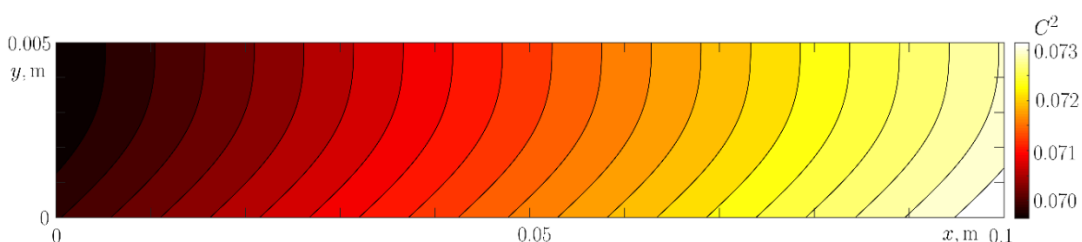


Рисунок 13 – Поле концентрации в парогазовом слое для модели с условиями теплоизоляции горизонтальных стенок канала

### 2.3.3 Влияние скорости прокачки газа на интенсивность испарения в системе двухкомпонентных смесей

Используемая математическая модель характеризуется учётом неоднородности состава обеих сред: рабочей жидкости с испаряющимся компонентом и газопаровой смеси, содержащей испарившийся компонент и фоновый газ. Ранее (Бекежанова, Степанова, 2024) было показано, что использование анзаца Остроумова – Бириха при поиске точного решения в рамках такой математической модели, допускающей также учёт квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации испаряющегося компонента, условие на расход смеси в одном из слоёв является избыточным. Однако если сохранить соответствующее равенство в постановке задачи и использовать его как условие переопределения, можно найти некоторые параметры, которые в других постановках являются входными. Например, можно определить градиент температуры на одной из стенок канала, при этом важно следить за тем, чтобы температура на подложке была ниже,

чем на верхней стенке для сохранения устойчивой конфигурации. Задача была решена в указанной постановке с условием на расход  $q$ :

$$q = \int_0^{h_2} U \rho_2 dy, \quad (11)$$

где  $U$  – измеряемая в эксперименте скорость прокачки газа;  $h_2$  – толщина газопарового слоя;  $\rho_2$  – плотность газопаровой смеси.

Таблица 1 – Расчётные характеристики испарительной конвекции в зависимости от расхода газопаровой смеси

$q_i \cdot 10^4,$ $кг / м \cdot с^2$	$A_1$ $^{\circ}C / м$	$u^{\Gamma} \cdot 10^3,$ $м / с$	$M \cdot 10^6,$ $кг / м \cdot с^2$	$C_1^{\Gamma}$	$C_2^{\Gamma}$	$T^{\Gamma}, ^{\circ}C$
0.4	2.67	0.76	0.446	0.6986	$0.0163 x + 0.0695$	$2.90 x + 24.91$
0.5	2.72	1.03	0.576	0.6981	$0.0166 x + 0.0693$	$2.94 x + 24.88$
1.5	2.84	3.81	1.870	0.6941	$0.0172 x + 0.0675$	$3.06 x + 24.55$
2.5	2.87	6.59	3.158	0.6900	$0.0173 x + 0.0656$	$3.08 x + 24.23$
3.5	2.88	9.38	4.450	0.6859	$0.0174 x + 0.0638$	$3.09 x + 23.89$

В таблице 1 приведены основные характеристики конвективных режимов в системе водно-спиртовой раствор – смесь воздуха и паров этанола при диффузионном испарении на межфазной границе  $\Gamma$  для расходов  $q$ , вычисляемых по формуле (11). Рассчитанные градиенты температуры на нижней стенке  $A_1$  приведены во втором столбце. В третьем и четвёртом столбцах указаны значения скорости и массовой скорости испарения на  $\Gamma$ , соответственно. Обе характеристики растут с увеличением скорости прокачки газа, которое влечёт ослабление термокапиллярного эффекта (рост  $u^{\Gamma}$  происходит за счёт роста сдвиговой скорости) и интенсификацию испарения (рост  $M$ ). Концентрация этанола уменьшается из-за испарения на границе раздела фаз (пятый столбец таблицы 1). В шестом столбце таблицы 1 приведены значения концентрации паров этанола в слое несущего газа. В то время как градиент концентрации увеличивается (множитель перед  $x$ ), средняя концентрация уменьшается с понижением температуры. Эффект согласуется с наблюдаемыми изменениями температуры на  $\Gamma$  (седьмой столбец таблицы 1): чем выше расход газа, тем ниже температура поверхности и концентрация летучего компонента со стороны жидкости

и, как следствие, тем меньше количество испарённого вещества в газе. Меньшая концентрация паров в свою очередь стимулирует более высокую скорость испарения при соответствующих значениях  $q$ . Таким образом, в исследуемых условиях характер испарения определяется диффузионным, а не кинетическим механизмом.

#### 2.4 Численное моделирование конвекции, возбуждаемой локальным нагревом, в рамках постановки, учитывающей вклад дефекта тепла

Изучается задача о термокапиллярной конвекции в ограниченном массиве с твёрдыми внешними стенками, частично заполненном испаряющейся жидкостью. В начальный момент времени среды покоятся и находятся в состоянии взаимного насыщения, равновесная концентрация пара в газе равна  $C_0$ . На нижней границе камеры размещены нагреватели, включение которых приводит к возникновению движения в жидкости и лежащем над ней слое газа, деформации межфазной поверхности  $\Gamma$  и росту скорости испарения. Движение и динамика теплового поля в обеих объёмных фазах описываются уравнениями Обербека – Буссинеска, которые дополняются уравнением конвективной диффузии для моделирования переноса примеси пара, испаряющегося с поверхности жидкости, в фоновый газ. На границе раздела сред формулируются обычные условия непрерывности полей скорости и температуры, условие, задающее концентрацию насыщенного пара на  $\Gamma$ , кинематическое и динамическое условия, сохраняющие классическую форму в силу предполагаемого диффузионного характера испарения, и условие теплового баланса в виде:

$$\partial_n \theta_2 - \bar{\kappa} \partial_n \theta_1 + \bar{\sigma}_d \left( \theta_2 + \left( \frac{T_0}{T_*} \right) \right) \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_2 - \alpha_C \bar{\kappa} \partial_n C = -EM, \quad M = -\partial_n C + \alpha_T \partial_n T_1. \quad (12)$$

Здесь  $\partial_n$  – дифференциальный оператор, обозначающий производную по нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\theta_j$  – температура  $j$ -й среды,  $j = 1$  соответствует газовой фазе,  $j = 2$  – жидкой,  $\bar{\kappa} = \kappa_1/\kappa_2$  – отношение коэффициентов теплопроводности  $\kappa_j$ ,  $\bar{\sigma}_d$  – приведённый безразмерный температурный коэффициент поверхностного натяжения,  $T_0$  – температура термодинамического равновесия,  $T_*$  – характерный перепад температур,  $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^3 [\partial_{x_i} - n_i (\mathbf{n} \cdot \nabla)] (\mathbf{v}_2)_i$  – оператор поверхностной дивергенции,  $\mathbf{v}_2$  – вектор скорости жидкой фазы,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – вектор внешней (относительно жидкого слоя) нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\alpha_C, \alpha_T$  – коэффициенты Дюфура и Соре соответственно,  $C$  – концентрация пара в газе,  $E = DL\rho_1/(\kappa_2 T_*)$ ,  $D$  – коэффициент диффузии пара в газе,  $L$  – скрытая теплота

парообразования,  $\rho_1$  – плотность газа,  $M$  – массовая скорость испарения. Условие (12) является прямым следствием закона сохранения энергии и представляет собой его поверхностный аналог, обобщённый на случай учёта испарения диффузионного типа и энергетических характеристик границы раздела. Третье слагаемое в левой части этого равенства трактуется как дефект тепла при переходе через  $\Gamma$ ; его значение соответствует затратам энергии на деформацию межфазной поверхности термокапиллярными силами.

На основе прямого численного моделирования исследуется влияние дефекта тепла на характеристики конвективных режимов в системе сред бензин – воздух в прямоугольной плоской кювете длиной 4 см и высотой 2 мм. Комбинированный нагрев производится двумя нагревателями размерами 5.5 и 4 мм. Один работает в переключаемом режиме, когда температура  $\Theta_1(t)$  скачкообразно через равные промежутки времени увеличивается до некоторого предельного значения, второй – в стационарном, с постоянной температурой  $\Theta_2(t)$  в течение ограниченного периода. Для проведения расчётов был реализован авторский код на языке Фортран.

Выполнен сравнительный анализ ряда характеристик, рассчитанных в рамках постановки с полным условием (12) (задача I) и постановки, в которой слагаемое, отвечающее за вклад дефекта тепла, исключено (задача II). Контролировались значения следующих параметров: моменты зарождения переходных и окончательного (установившегося) режимов  $t_{CR}^m$  (время после начала температурной накачки), различающихся числом  $m$  и формой вихревых структур, минимальная толщина жидкого слоя  $h_2^{min}$ , максимальные значения температуры межфазной поверхности  $\theta_\Gamma^{max}$ , концентрации пара в газовом слое  $C^{max}$ , модуля касательной скорости на  $\Gamma$   $v_s^{max}$ , массовой скорости испарения  $M^{max}$ , частота осцилляций межфазной поверхности  $\zeta_\Gamma$  для установившегося режима.

Установлено, что дефект тепла не приводит к качественной перестройке полей скорости и температуры, поведения границы раздела фаз и существенному изменению временной динамики. В обоих случаях включение нагревателей и последующие изменения интенсивности нагрева приводят к каскаду реакций, а именно: последовательному формированию восьми-, четырёх- и двухвихревого режимов в каждом слое (рисунок 14), сопровождающихся образованием и деформацией термокапиллярных прогибов в зонах нагрева и осцилляциями  $\Gamma$ .

Динамика изменений формы профиля межфазной поверхности и поля температуры вблизи  $\Gamma$  показана на рисунке 15. Частота осцилляций  $\zeta_\Gamma$  границы  $\Gamma$  совпадает в обеих задачах и равна 1/3 Гц, при этом за счёт расходов тепла на термокапиллярные деформации, уменьшаются температура  $\theta_\Gamma^{max}$  и, как следствие, амплитуда прогибов и скорость

термокапиллярного растекания жидкости  $v_s^{max}$ . В установившемся режиме относительные изменения  $v_s^{max}$  и  $h_2^{min}$  могут составлять порядка 10 – 15 %.

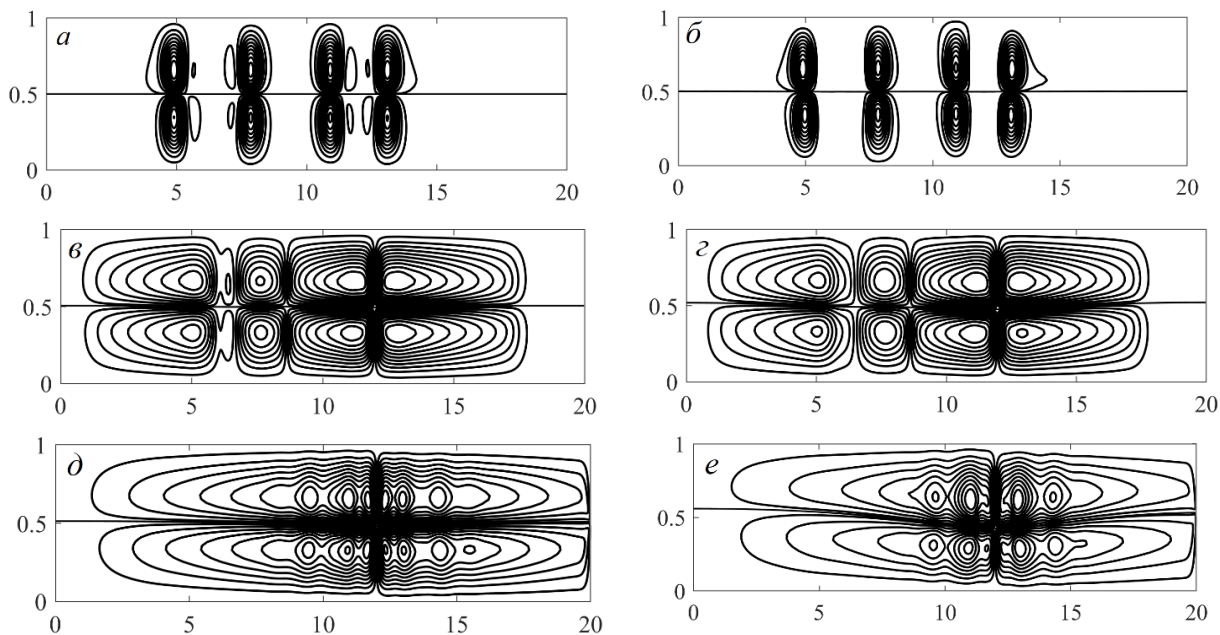


Рисунок 14 – Перестройка поля скорости в задаче I (слева) и задаче II (справа): (а, б) – через 3 с после включения нагревателей; (в, г) – через 28.5 с; (д, е) – через 300 с

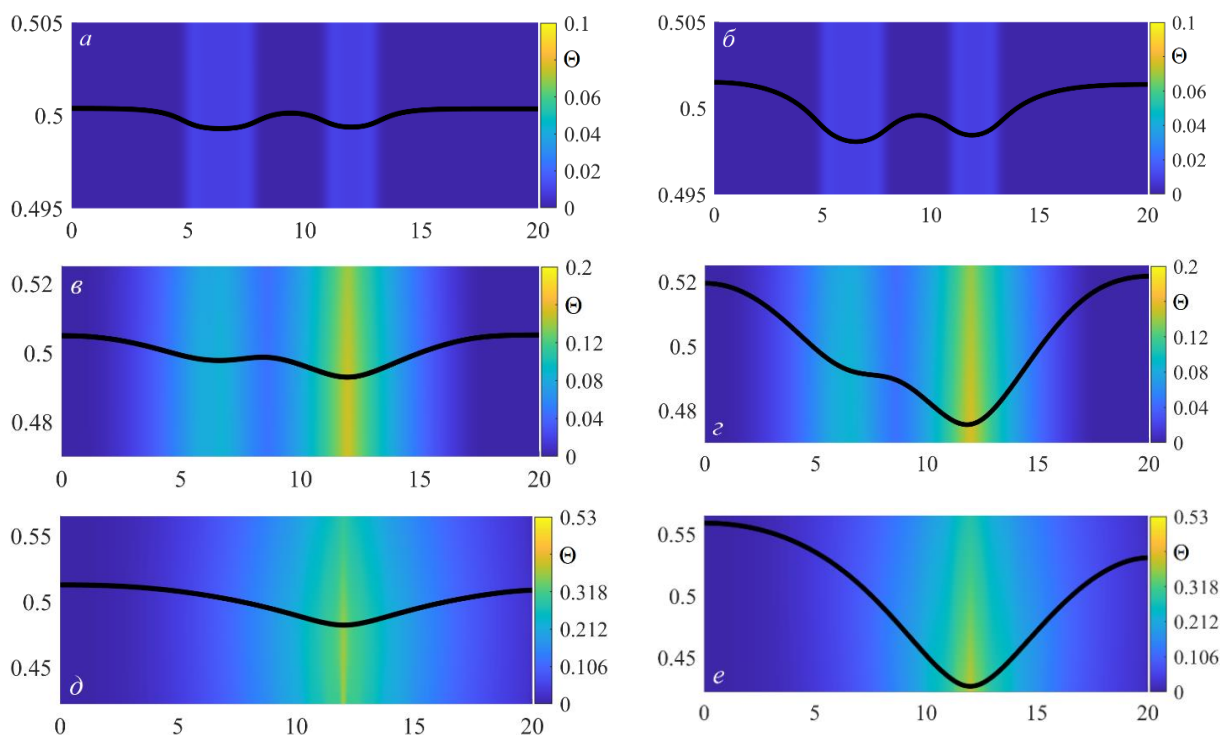


Рисунок 15 – Динамика изменений формы межфазной границы (сплошные линии) и поля температуры вблизи границы Г, предсказываемых в рамках задачи I (слева) и задачи II (справа): (а, б) – через 3 с после включения нагревателей; (в, г) – через 28.5 с; (д, е) – через 300 с

### **3 Разработка комплекса численных алгоритмов и компьютерных программ для исследования сезонных изменений вечной мерзлоты, адаптация комплекса под методику дистанционных измерений**

Для исследования вертикальных распределений температуры в талых и мёрзлых слоях вечной мерзлоты и глубины протаивания грунта разработаны одномерные квазистационарные модели. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты на суше выделены слои с границами фазового перехода: талый грунт, мёрзлый грунт, снег. Рассмотрены три варианта расположения слоёв:

- вариант I: слой снега, мёрзлый слой (M1);
- вариант II: талый слой (T2), граница фазового перехода  $h_2$ , мёрзлый слой (M1);
- вариант III: снег, мёрзлый слой (M3), граница фазового перехода  $h_3$ , талый слой (T2), граница фазового перехода  $h_2$ , мёрзлый слой (M1).

В стационарном приближении вертикальные распределения температуры в рассматриваемых слоях считаются линейными функциями вертикальной координаты; параметры  $t_1$  (начало весеннего таяния грунта) и  $t_2$  (установление нулевой температуры воздуха осенью) известны.

В разработанной квазистационарной модели динамики вечной мерзлоты выделяются интервалы времени, на которых температура воздуха  $T_a$  одного знака. Для периода  $T_a < 0$  температура грунта на границе снег – почва зависит от высоты и плотности снежного покрова, для периода  $T_a > 0$  температура грунта вычисляется в зависимости от коротковолновой радиации и потерь тепла при испарении; на подвижных границах фазового перехода ставятся условия Стефана, на нижней границе температура грунта задана. Численный алгоритм решения поставленных сопряжённых задач основан на методе расщепления и разделении переменных.

С использованием предложенной модели были проведены расчёты по сценарию с потеплением на 10 – 15 градусов с использованием среднедекадных значений температуры воздуха для метеостанции г. Анадырь (Чукотка) 2015 – 2023 гг. (данные архива [https://pogoda-service.ru/archive\\_gsod.php](https://pogoda-service.ru/archive_gsod.php)). На всё время расчёта прибавка температуры распределялась равномерно, толщина снежного покрова предполагалась постоянной (50 см). Согласно расчётам, модель предсказывает увеличение глубины протаивания грунта на 6 – 7 см к концу века, что соответствует одному из прогнозов, представленных в докладе экспертов ООН по климату в 2022 году.

#### 4 Разработка методов калибровки параметров упругости однородного ортотропного моментного континуума Коссера на основе численного решения волновых задач для блочной среды с податливыми прослойками

Теория моментного континуума Коссера может использоваться в качестве эффективного инструмента для описания деформации широкого круга структурно неоднородных материалов. К ним относятся сыпучие среды, композиты, пористые металлы, жидкие кристаллы, а также современные искусственные метаматериалы и пантографические структуры. В отличие от классической сплошной среды моментная среда рассматривается не как континуум материальных точек, а как континуум объёмов малых размеров, которые, кроме поступательных, обладают и вращательными степенями свободы. Однако непреодолимая проблема на пути применения теории континуума Коссера к анализу краевых задач механики деформируемых сред, в особенности к количественному анализу с применением вычислительных методов, состоит в том, что в открытых источниках практически невозможно найти полный набор достоверных механических параметров для каких-либо природных или искусственных материалов. Даже в приближении изотропии, когда кроме плотности среды и момента вращательной инерции параметров упругости всего шесть. Гораздо более сложная картина возникает при учёте анизотропии. В самом общем случае система уравнений упругого континуума записывается относительно 24-х неизвестных функций: проекций векторов скоростей поступательного и вращательного движений  $v_i$ ,  $\omega_i$  и компонент несимметричных тензоров напряжений и моментных напряжений  $\sigma_{ij}$ ,  $m_{ij}$  (далее  $\varepsilon_{ijk}$  – символ Леви – Чивиты):

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad J_{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} - \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}, \quad (13)$$

$$a_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + c_{ijkl} \frac{\partial m_{kl}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \omega_k, \quad c_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + b_{ijkl} \frac{\partial m_{kl}}{\partial t} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}.$$

В уравнения входят плотность материала  $\rho$ , симметричный тензор инерции  $J_{ij}$  и три тензора феноменологических параметров упругости  $a_{ijkl}$ ,  $b_{ijkl}$  и  $c_{ijkl}$ , симметричных относительно пар индексов. Всего 115 коэффициентов. Для изотропной среды тензоры упругости определяются через шесть независимых параметров  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\varepsilon$ :

$$4a_{ijkl} = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) \delta_{jk} \delta_{il} - \frac{2\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (14)$$

$$4b_{ijkl} = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} + \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta_{jk} \delta_{il} - \frac{2\beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad c_{ijkl} = 0.$$

Вариант системы уравнений редуцированного континуума Коссера, в котором пренебрегается влиянием моментных напряжений, получается из вышеприведённой общей системы при  $\beta, \gamma$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### 4.1 Анализ экспериментальных данных по определению параметров Коссера

Обзор имеющихся результатов экспериментов по идентификации параметров упругости Коссера показывает, что экспериментально определяются лишь отдельные параметры среды или их комбинации. Это объясняется тем, что используемые методы испытаний основываются на тонких эффектах теории типа, требующих при их исследовании постановки специальных экспериментов и предельно точных измерений. Для заполнения пропусков в таблицах параметров авторы данного раздела применили следующие соображения.

В приближении высокопористой среды для пенопластов, пенистых металлов и пантографических материалов толщину стенок упругого скелета  $\delta$  можно считать постоянной. Тогда внутри кубической ячейки периодичности (контрольной ячейки, структурного элемента) с ребром  $a$  находится пустое пространство в форме куба. Пористость  $\theta$ , плотность  $\rho$ , плотность сплошного (литого) материала  $\rho_0$  и момент инерции  $J$  вычисляются по формулам:

$$\theta = \frac{(a - \delta)^3}{a^3} \times 100\%, \quad \rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\theta}{100} \right), \quad J = \frac{1}{6} \rho_0 a^2 \left( 1 - \left( \frac{\theta}{100} \right)^{5/3} \right). \quad (15)$$

Эти формулы позволяют пересчитать пористость среды, если известны одновременно две плотности – пористого и литого материала; вычислить через неё толщину стенок скелета по размеру ячейки или, наоборот, размер ячейки по толщине стенок, и после этого входящую в уравнение вращательного движения величину момента инерции.

Блочные среды из деформируемых блоков с податливыми тонкими прослойками, строго говоря, не являются изотропными, но для оценочных расчётов можно использовать определяющие уравнения изотропной моментной среды. Для блочной среды

$$\rho = \rho_1 + (\rho_0 - \rho_1) \frac{a^3}{(a + \delta)^3}, \quad J = \frac{1}{6} \rho_1 (a + \delta)^2 + (\rho_0 - \rho_1) \frac{a^5}{6(a + \delta)^3}, \quad (16)$$

где  $\rho_0$  и  $\rho_1$  – плотности материалов блоков и прослоек,  $a$  и  $\delta$  – ребро блока и толщина прослойки.

В первом приближении можно также считать изотропными среды средней пористости с кубическими контрольными ячейками и со сферическими пораами радиуса  $r$ . К ним относятся, например, применяемые в судостроении сферопласты – эпоксидные смолы, наполненные тонкостенными стеклянными сферами. Для таких сред применимы формулы:

$$\theta = \frac{4\pi r^3}{3a^2} \times 100\%, \quad \theta = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \times 100\%, \quad J = \rho_0 a^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{8\pi}{15} \left( \frac{3\theta}{400\pi} \right)^{5/3} \right). \quad (17)$$

По известному радиусу пор и величине пористости эти формулы позволяют определить характерный размер ячейки и при заданной плотности литого материала вычислить момент инерции.

В случае композитного материала с шарообразными включениями радиуса  $r$  формулы преобразуются с учётом плотности включений  $\rho'_0$ :

$$r = a \left( \frac{3\theta}{400\pi} \right)^{1/3}, \quad \rho = \rho_0 + (\rho'_0 - \rho_0) \frac{\theta}{100}, \quad J = \left( \frac{1}{6} \rho_0 + \frac{8\pi}{15} (\rho'_0 - \rho_0) \left( \frac{r}{a} \right)^5 \right) a^2. \quad (18)$$

В таблице 2 перечислены материалы с относительно небольшим числом пропусков из обзорной статьи [Адамов А. А. Механика композиционных материалов и конструкций, 2010. Т. 16, № 3. С. 329–346], где собраны известные из литературных источников экспериментальные параметры упругости Коссера. Недостающие параметры для этих материалов удалось восстановить с помощью приведённых формул, поскольку для каждого из соответствующих литых материалов (для связующих и для включений) в справочной литературе имеются достоверные значения плотностей.

Таблица 2 – Наименования материалов

№	Материал
1	пенополиуретан
2	полистирольный пенопласт низкой плотности
3	вспененный полиметакриламид
4	вспененный полиметакриламид средней плотности
5	вспененный полиметакриламид низкой плотности
6	костная ткань
7	полые стеклянные сферы в эпоксидной матрице

В таблице 3 представлены результаты заполнения. Восстановленные параметры материалов выделены полужирным шрифтом.

Таблица 3 – Коэффициенты уравнений для пористых и армированных материалов

	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda$ , МПа	763	0,098	99	5	20	0	2096
$\mu$ , МПа	104	0,6	285	80	30	4000	1033
$\alpha$ , МПа	4,33	0,059	2,88	3,33	4,11	400	115
$\beta$ , Н	-26,6					-12,9	-2,73
$\gamma$ , Н	40	5,69	182	20,8	8,46	19,4	4,1
$\varepsilon$ , Н	4,5	54,3	494	20,6	26,6	305	0,13
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	340	140	380	110	60	2000	585
$J$ , кг/м · 10 <sup>6</sup>	<b>0,8533</b>	<b>0,0037</b>	<b>40,1316</b>	<b>7,4229</b>	<b>7,3689</b>	<b>18,2672</b>	<b>0,0821</b>
$a$ , м	0,100	0,010	0,650	0,500	0,670	0,200	<b>0,024</b>
$\delta$ , м	<b>0,010</b>	<b>0,000</b>	<b>0,070</b>	<b>0,014</b>	<b>0,010</b>	<b>0,041</b>	0,012
$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	<b>1214</b>	<b>1077</b>	<b>1310</b>	<b>1310</b>	<b>1333</b>	<b>4000</b>	1170
$c_1$ , м/с	1690	440	1327	1225	1155	2000	2667
$c_2$ , м/с	564	300	870	870	754	1483	1401
$c_3$ , м/с	7911	55326	3012	2367	1515	1191	8161
$c_4$ , м/с	7222	127027	4104	2362	2181	4214	7177
$\nu$ , МГц	0,717	1,268	0,085	0,213	0,238	1,490	11,911
$\theta$ , %	<b>72</b>	<b>87</b>	<b>71</b>	<b>91,6</b>	<b>95,5</b>	50	50

Скорости продольных и поперечных волн  $c_1$ ,  $c_2$ , скорости волн кручения и вращения частиц  $c_3$ ,  $c_4$ , а также резонансная частота вращательного движения  $\nu$  в таблице 2 определены по известным формулам:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}. \quad (19)$$

Анализ скоростей волн позволил оценить возможность применения упрощённой редуцированной теории континуума Коссера с тремя параметрами упругости материала вместо шести. Если скорости волн, обусловленных вращением частиц микроструктуры материала, значительно превосходят скорости продольных и поперечных упругих волн, то в таком материале моментные взаимодействия протекают в квазистатическом режиме и, по всей вероятности, при исследовании динамических процессов могут быть опущены. Судя по таблице 3, уравнения редуцированного континуума применимы к моделированию пенополиуретана, полистирольного пенопласта, костной ткани и эпоксидного композита с полыми стеклянными сферами.

#### 4.2 Блочные среды с тонкими прослойками

К описанию деформации геоматериалов типа грунтов, гранулированных сред и горных пород применяются модели блочных сред с тонкими податливыми прослойками, поскольку для таких материалов характерна блочно-слоистая структура. В блочных средах вращательные степени свободы имеют принципиальное значение, так как с ними связано наступление пластичности и разрушения материала. Для математического моделирования блочных сред развиты эффективные аналитические и численные методы исследования, основанные на конечно-элементной и конечно-разностной аппроксимации уравнений в блоках и прослойках. Однако получаемые расчётные схемы имеют настолько высокую размерность, что проведение расчётов становится возможным только на вычислительных системах суперкомпьютерной производительности. С другой стороны, при стремлении числа блоков к бесконечности блочную среду можно приблизить моментным континуумом. Определённые комбинации параметров континуума для блочной среды могут быть найдены теоретически с помощью схем деформирования, изображённых на рисунке 16.

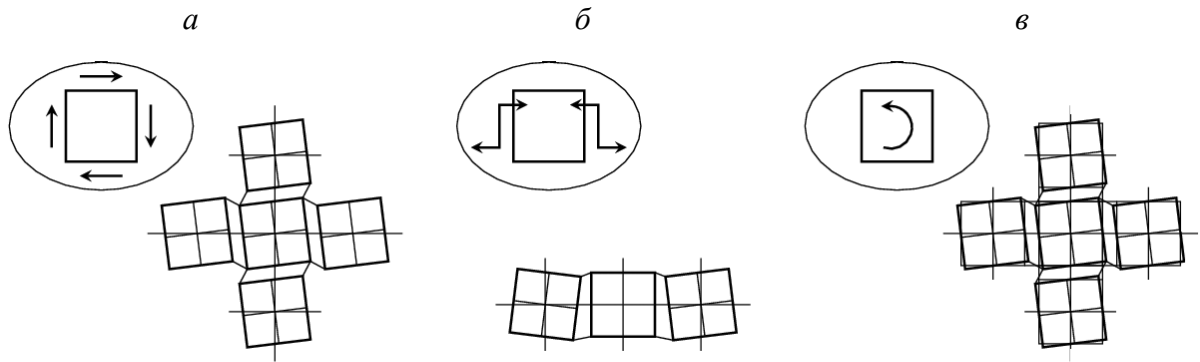


Рисунок 16 – Схемы деформирования блочной среды: а) однородное вращение блоков, б) неоднородное вращение с образованием кривизны, в) однородное скручивание

При однородном вращении жёстких блоков с неподвижными центрами масс на угол  $\phi$  (рисунок 16 а) податливые прослойки находятся в состоянии чистого сдвига. Угол сдвига  $\gamma$  и касательное напряжение  $\tau$  на гранях блоков оцениваются по формулам:  $\gamma = a\phi/\delta$ ,  $\tau = \mu'\gamma$ , где  $\mu'$  – модуль сдвига прослойки. Через коэффициент пропорциональности  $f_1 = \tau/\phi = \mu'a/\delta$  может быть найден один из параметров упругости моментной среды. В схеме неоднородного вращения на рисунке 16 б перемещения центров масс также отсутствуют. Из-за поворота блоков образуется кривизна  $\varkappa = \phi/(\alpha + \delta)$ . При этом в прослойке возникает нормальное напряжение, действие которого сводится к изгибающему моменту  $M = E'\phi a^3/(12\delta)$  ( $E'$  – модуль Юнга прослойки). Коэффициент пропорциональности  $f_2 = M/\varkappa = E'(a + \delta)a^3/(12\delta)$  также может служить для определения параметров. На рисунке 16 в приведена схема однородного скручивания блочной среды вокруг осей, проходящих через неподвижные центры масс блоков перпендикулярно плоскости рисунка. В этом состоянии напряжения в прослойках определяются из решения задачи упругого кручения. Таким способом можно вычислить коэффициент пропорциональности между скручивающим моментом и величиной кручения:  $f_3 = M_0/\varkappa_0 = \mu'(a + \delta)a^4/(6\delta)$ , через который определяется ещё одна комбинация параметров. Итоговые формулы для пересчёта параметров моментного континуума через коэффициенты упругости материалов блоков и межблочных прослоек принимают следующий вид:  $\alpha = f_1/2$ ,  $\gamma + \varepsilon = f_2/a$ ,  $\beta + 2\gamma = f_3/a^2$ .

Для пересчёта параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , характеризующих податливость материала на растяжение–сжатие и на сдвиг, приравнивались средние скорости продольных и поперечных упругих волн в направлении осей симметрии в блочной среде с аналогичными скоростями в моментном континууме.

### 4.3 Сравнительные расчёты волн вращательного движения

С целью верификации полученных формул для коэффициентов уравнений моментного континуума, соответствующего блочной среде с модулями упругости горной породы, проводились численные расчёты волновых движений на основе двух разработанных ранее авторских компьютерных программ для решения краевых задач в рамках модели блочной среды с упругими блоками и модели ортотропного моментного континуума с плоскостями симметрии, параллельными граням блоков. Расчёты были выполнены на высокопроизводительной ЭВМ серии МВС кластерной архитектуры в Институте вычислительного моделирования СО РАН. Коэффициенты уравнений ортотропной моментной среды вычислялись по вышеприведённым формулам, учитывающим модули упругости блоков и прослоек, с требованием совпадения скоростей распространения упругих волн в этих моделях.

На рисунках 17 и 18 приведены результаты сравнительных расчётов для задачи о распространении локализованного возмущения из центра массива. В этой задаче в начальный момент времени поле угловой скорости  $\omega_3$  относительно декартовой системы

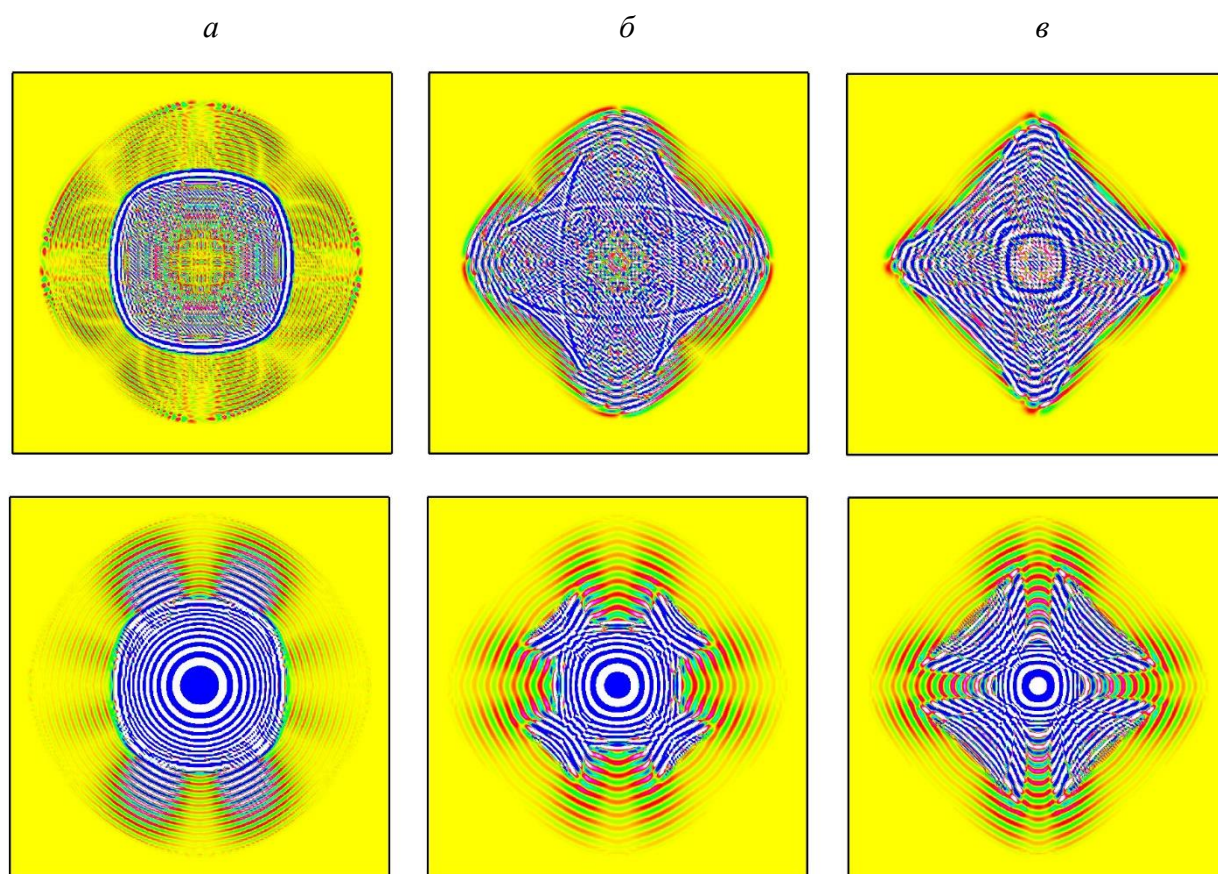


Рисунок 17 – Линии уровня угловой скорости  $\omega_3$ : а)  $\delta = 0.1$  мм, б)  $\delta = 1$  мм, в)  $\delta = 5$  мм, в рамках модели блочной среды (вверху) и моментного континуума (внизу)

координат  $x_1, x_2, x_3$  задаётся в виде дельта-функции Дирака, сосредоточенной в центральной точке. Со временем от этой точки вовнутрь массива движется система волн. За фронтами волн происходит осциллирующее движение с частотой резонансного возбуждения среды. Размер блоков был принят равным 0.1 м. На рисунке 17 показано распределение угловой скорости в некоторый момент времени, полученное в расчётах по модели блочной среды и по модели континуума Коссера. На рисунке 18 приведено распределение касательных напряжений.

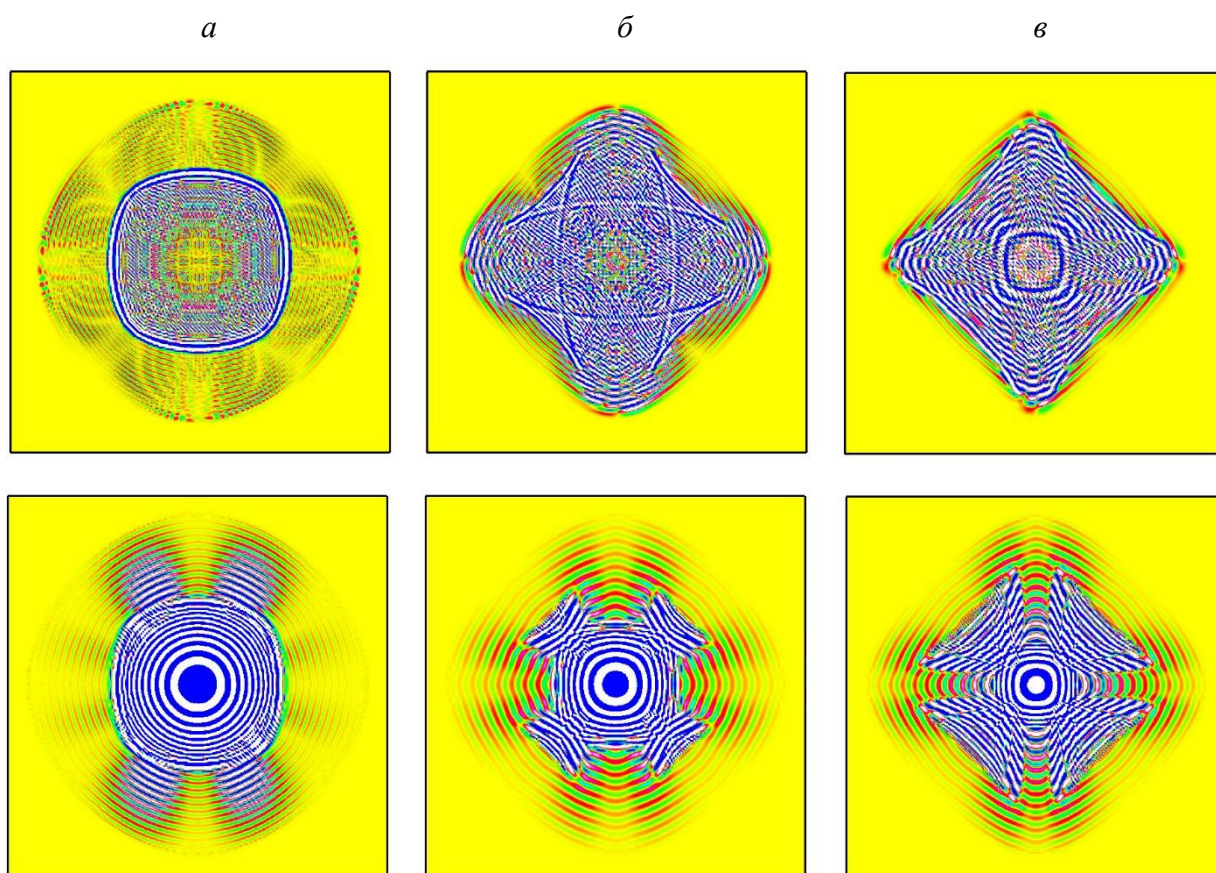


Рисунок 18 – Линии уровня касательного напряжения  $\sigma_{21}$ : а)  $\delta = 0.1$  мм, б)  $\delta = 1$  мм, в)  $\delta = 5$  мм, в рамках модели блочной среды (вверху) и моментного континуума (внизу)

Анализируя результаты, можно сделать вывод о том, что обе модели воспроизводят близкие волновые картины как на качественном, так и на количественном уровне, но только для достаточно тонких прослоек. В среде с относительно толстыми прослойками скорости основных волн с эллиптическими фронтами в направлениях полуосей эллипса существенно ниже средних скоростей продольных и поперечных упругих волн. Для повышения точности вычислений необходима разработка более точного метода расчёта параметров

ортотропного континуума через геометрические и механические характеристики блочной среды.

Результаты расчётов в задаче о начальном локализованном вращении центрального блока в массиве показали, что анизотропия блочной среды с податливыми прослойками проявляется даже при достаточно тонких прослойках. Таким образом, моделирование распространения волн в геодинамике с учётом блочной структуры горной породы требует использования уравнений ортотропного континуума.

#### **4.4 Моделирование нестационарных процессов в жидких кристаллах**

Жидкие кристаллы (ЖК) – это класс веществ, занимающий промежуточное положение между кристаллическими твёрдыми телами и обычными жидкостями. Их свойства зависимы от внешних воздействий, таких как электрическое поле, магнитное поле, температура и давление, что делает жидкие кристаллы идеальными компонентами для термографических датчиков и устройств контроля температуры.

Исследуемый эффект заключается в переориентации молекул ЖК, возникающей при локальном нагревании границы горизонтального слоя. Это явление известно как ориентационная термоупругость. Экспериментальные исследования [Трашкеев С. И., Бритвин А. В. Журнал технической физики. 2011. Т. 81, вып. 6. С. 1–7] продемонстрировали влияние температуры на ориентацию молекул ЖК. В результате было установлено, что реакция молекул ЖК на тепловой поток сопоставима с их реакцией на воздействие электромагнитных полей. Однако важно отметить критическую особенность экспериментальной установки: использовалась обкладка с существенно отличающимся от ЖК коэффициентом объёмного теплового расширения, что приводит к возникновению механических напряжений на границе раздела. Эти напряжения, в свою очередь, могут вызывать переориентацию молекул ЖК.

При исследовании эффекта ориентационной термоупругости применялась разработанная ранее упрощённая модель термомеханического и электрического воздействий в акустическом приближении, включающая в себя уравнения поступательного и вращательного движений, уравнения для моментных и касательного напряжений, уравнение для угла поворота, уравнение состояния для давления, а также уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\rho v_{1,t} = -p_{x1} - q_{x2} + f_1, \quad \rho v_{2,t} = q_{x1} - p_{x2} + f_2, \quad j \omega_t = 2q + \mu_{1,x1} + \mu_{2,x2} + m,$$

$$\mu_{1,t} = \gamma \omega_{x1}, \quad \mu_{2,t} = \gamma \omega_{x2}, \quad \varphi_t = \omega,$$

(20)

$$q_t = -2\alpha \left( (v_{1,x2} - v_{2,x1}) / 2 + \omega + q/\eta \right), \quad p_t = -\kappa (v_{1,x1} + v_{2,x2}) + \beta T_t,$$

$$\rho c T_t = (\mathfrak{a}_{11} T_{x1} + \mathfrak{a}_{12} T_{x2})_{x1} + (\mathfrak{a}_{12} T_{x1} + \mathfrak{a}_{22} T_{x2})_{x2} - \beta T (v_{1,x1} + v_{2,x2} + 2q^2/\eta + H),$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – компоненты вектора скорости,  $\omega$  – угловая скорость,  $\theta$  – угол поворота молекул,  $p$  – давление,  $q$  – касательное напряжение,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – моментные напряжения,  $T$  – температура,  $\rho$  – плотность,  $j$  – момент инерции,  $\kappa$  – модуль объёмного сжатия,  $\alpha$  – модуль упругого сопротивления вращению,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $\gamma$  – модуль упругого сопротивления изменению кривизны,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $H$  – интенсивность источников тепла,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_{\parallel} \cos^2 \theta + \mathfrak{a}_{\perp} \sin^2 \theta$ ,  $\mathfrak{a}_{12} = (\mathfrak{a}_{\parallel} - \mathfrak{a}_{\perp}) \sin \theta \cos \theta$ ,  $\mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_{\parallel} \sin^2 \theta + \mathfrak{a}_{\perp} \cos^2 \theta$ ,  $\mathfrak{a}_{\parallel}$  и  $\mathfrak{a}_{\perp}$  – коэффициенты теплопроводности в направлении ориентации молекул жидкого кристалла и в поперечном направлении,  $f_1$ ,  $f_2$  и  $m$  – объёмные силы и момент сил, обусловленные воздействием электрического поля.

Граничные условия в данной задаче описываются через давление, скорости, напряжения и температуру. При решении системы используется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным. Этот метод разбивает решение на пять последовательных этапов на каждом шаге по времени, что значительно упрощает вычисления и повышает эффективность алгоритма. На 1-м и 5-м этапах решаются одномерные уравнения в направлении  $x_1$ :

$$\rho v_{1,t} = -p_{x1}, \quad \rho v_{1,t} = -p_{x1}, \quad j \omega_t = \mu_{1,x1}, \quad \mu_{1,t} = \gamma \omega_{x1},$$

$$q_t = \alpha v_{2,x1}, \quad p_t = -\kappa v_{1,x1} + \beta T_t, \tag{21}$$

$$\rho c T_t = h_{1,x1} - \beta T v_{1,x1}, \quad h_1 = \mathfrak{a}_{11} T_{x1} + \mathfrak{a}_{12} T_{x2}$$

На 2-м и 4-м этапах решаются аналогичные уравнения в направлении  $x_2$ . При решении уравнений акустики применяется конечно-разностная схема распада разрыва Годунова, шаг «корректор» которой является дискретным аналогом одномерных уравнений. На шаге «предиктор» используются уравнения на характеристиках:

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \mp \sqrt{\kappa / \rho} dt: \quad dI_1^\pm = 0, \quad I_1^\pm = p \pm v_1 \sqrt{\kappa \rho}, \\
dx_1 &= \pm \sqrt{\alpha / \rho} dt: \quad dI_2^\pm = 0, \quad I_1^\pm = q \pm v_2 \sqrt{\alpha \rho}, \\
dx_1 &= \pm \sqrt{\gamma / j} dt: \quad dI_3^\pm = 0, \quad I_1^\pm = \mu_1 \pm \omega \sqrt{\gamma j}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Уравнение теплопроводности решается с применением конечно-разностной схемы Иванова. Рассматривается расширенная система  $\rho c T_t = h_{x_m}$ ,  $h_{x_m} = \alpha T_{x_m} + g$ , где  $g$  вычисляется на предыдущем временном слое. На шаге «предиктор» используется уравнение баланса энергии

$$\frac{\rho c}{2} T_{tt} + \alpha (T_{x_m})^2 = h_{x_m} (T - \bar{T}) + T_{x_m} (h - \bar{h}) + (\bar{T} \bar{h})_{x_m} - g T_{x_m} \tag{23}$$

и обеспечивается его выполнение на дискретном уровне. Шаг «корректор» представляет собой дискретный аналог расширенной системы. Схема является неявной на шаге «предиктор» и явной на шаге «корректор». Вычисление температуры в каждом направлении выполняется методом трёхточечной прогонки. Важно отметить, что использование одной и той же сетки и шага по времени для всех уравнений обеспечивает согласованность решения и удовлетворение условию Куранта – Фридрихса – Леви, что гарантирует устойчивость вычислений и точность результатов. На 3-м этапе используется схема Кранка – Николсон для пересчёта угла поворота молекул жидкого кристалла, угловой скорости и касательного напряжения:

$$j \omega_t = 2q, \quad \varphi_t = \omega, \quad q_t = -2\alpha(\omega + q/\eta), \quad \rho c T_t = 2q^2/\eta + H. \tag{24}$$

$$j \frac{\bar{\omega} - \omega}{\Delta t} = 2 \frac{\bar{q} + q}{2}, \quad \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{\Delta t} = \frac{\bar{\omega} + \omega}{2}, \quad \frac{\bar{q} - q}{\Delta t} = -2\alpha \left( \frac{\bar{\omega} + \omega}{2} + \frac{\bar{q} + q}{2\eta} \right), \quad \rho c \frac{\bar{T} - T}{\Delta t} = \frac{(\bar{q} + q)^2}{2\eta} + H.$$

Для реализации численного алгоритма использовалась технология параллельного программирования CUDA, что позволяет значительно ускорить расчёты за счёт распределения нагрузки между графическими процессорами. Численные расчёты проведены для жидкого кристалла 5ЦБ со следующими параметрами:  $\rho = 1022 \text{ кг/м}^3$ ,  $j = 3 \cdot 10^{-16} \text{ кг/м}$ ,  $\kappa = 11.1 \text{ ГПа}$ ,  $\beta = 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ,  $\gamma = 6 \cdot 10^{-12} \text{ мкН}$ ,  $\eta = 3.6 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,

$c = 100$  Дж/(кг·К),  $\alpha_{\parallel} = 0.226$  Вт/(м·К),  $\alpha_{\perp} = 0.135$  Вт/(м·К), взятыми из [Skarp K., Lagerwall S., Stebler B. Molecular Crystals and Liquid Crystals. 1980. Vol. 60, Iss. 3. P. 215–236]. Параметр  $\alpha = 360$  Па вычислялся по формуле  $\alpha = v^2 j \pi^2$ , где учитывалась резонансная частота  $v^* = 350$  МГц, полученная экспериментально в [Belyaev B.A., Drokin N.A., Shabanov V.F., Shepov V.N. Physics of Solid State. 2000. Vol. 42, Iss. 3. P. 577–579].

Рассматривается прямоугольный ЖК-слой размерами  $l_{x1} = 200$  мкм и  $l_{x2} = 80$  мкм. Размер конечно-разностной сетки при этом составляет  $640 \times 256$  ячеек. В начальный момент времени ненулевыми заданы только  $T_0 = 297$  К и  $\theta = \pi/2$  во всей области. На верхней границе слоя задана температура:  $T = T_0 + T' e^{-4(x-x_c)^2/x_r^2}$ , где  $T'$  – некоторая константа,  $x_c$  – центр приложения нагрузки,  $x_r$  – радиус действия нагрузки. На рисунке 19 представлены результаты расчётов, показывающие распределение температуры в ЖК-слое под воздействием трёх источников тепла радиусом 20 мкм на верхней границе. При этом  $x_c = (m - 0.5) l_{x1} / n$ , где  $n = 3$  – количество источников тепла ( $m = 1, 2, 3$ ). На рисунке 20 показано распространение и отражение волн давления, начиная с зоны нагрева. Рисунок 21 иллюстрирует соответствующее распределение скоростей в виде векторного поля.

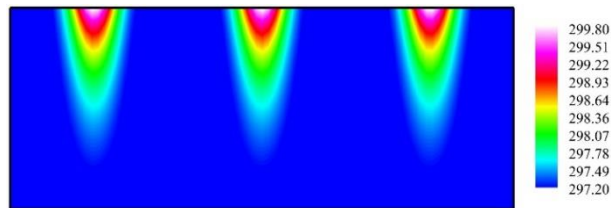


Рисунок 19 – Нагревание части верхней границы: линии уровня температуры  $T$

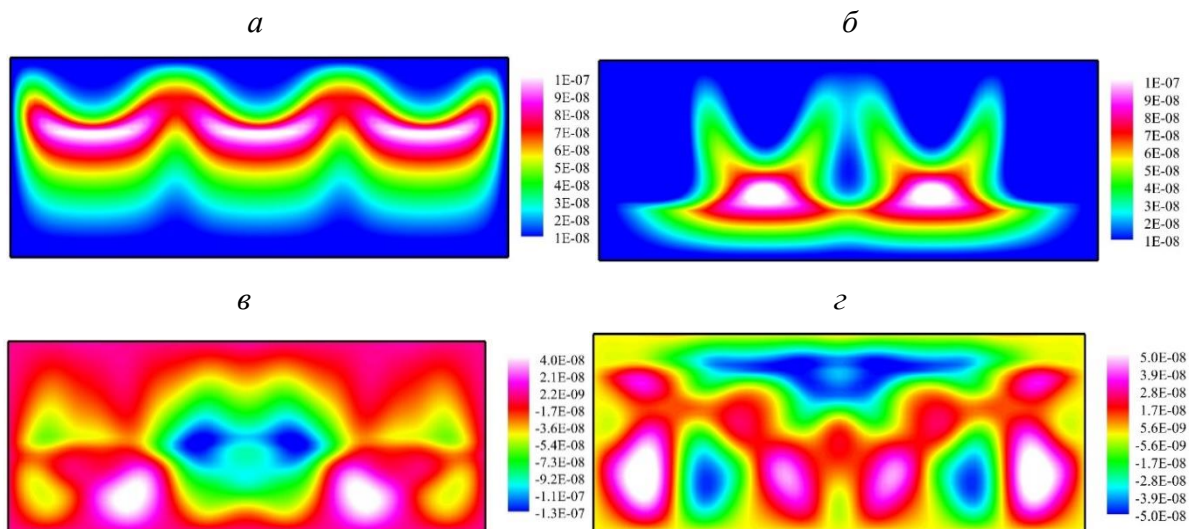


Рисунок 20 – Нагревание части верхней границы: линии уровня давления  $p$  в разные моменты времени

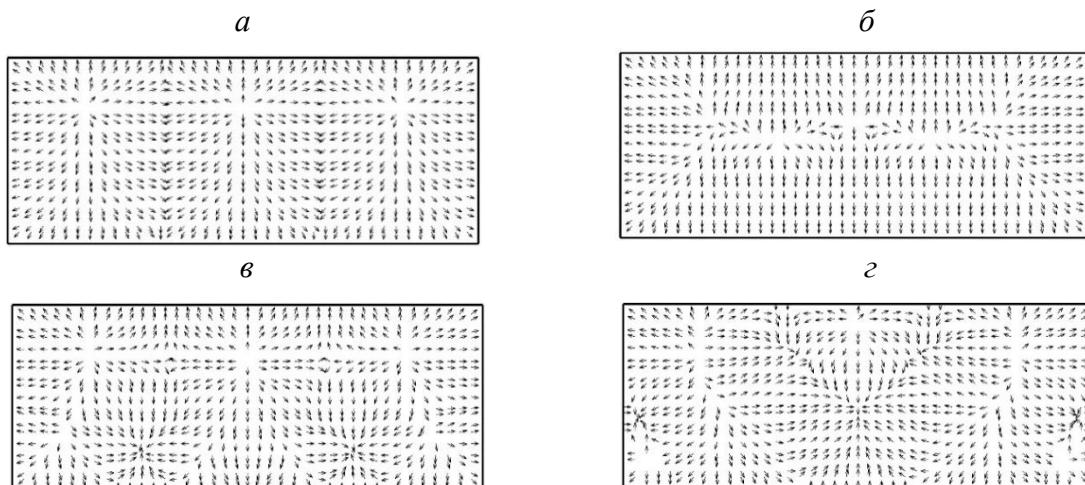


Рисунок 21 – Нагревание части верхней границы: векторное поле скоростей в разные моменты времени

Таким образом, в рамках данного подхода невозможно изменить ориентацию молекул нематического жидкого кристалла исключительно с помощью температурного воздействия. Дальнейшие исследования будут направлены на усовершенствование модели путём включения в неё сил поверхностного натяжения.

## 5 Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учётом влияния внешних геодинамических факторов. Анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли

### 5.1 Результаты построения и исследования прогностических моделей предвестников для сильных сейсмических событий на основе методов аппроксимации

Краткосрочный прогноз сильных землетрясений является актуальной проблемой в науках о Земле. Геодинамический мониторинг – обязательный элемент системы безопасности в сейсмически активных регионах. Научно-методические основы геодинамического мониторинга развиваются в рамках ГС РАН. Начиная с 2000 г., получили развитие региональные наблюдательные геодинамические сети на территории Алтае-Саянской сейсмоактивной области. При этом используются как сейсмологические сети, так и комплексные сети, регистрирующие различные геолого-геофизические параметры.

В качестве модели для описания и интерпретации процесса подготовки сильного землетрясения по данным сейсмического мониторинга в НП «Экологический центр рационального освоения природных ресурсов» приняты представления о возникновении определённой структуры-предвестника, когда энергия высокоэнергетических сейсмических событий снижается, а низкоэнергетических – возрастает, до момента возникновения основного землетрясения (рисунок 22).

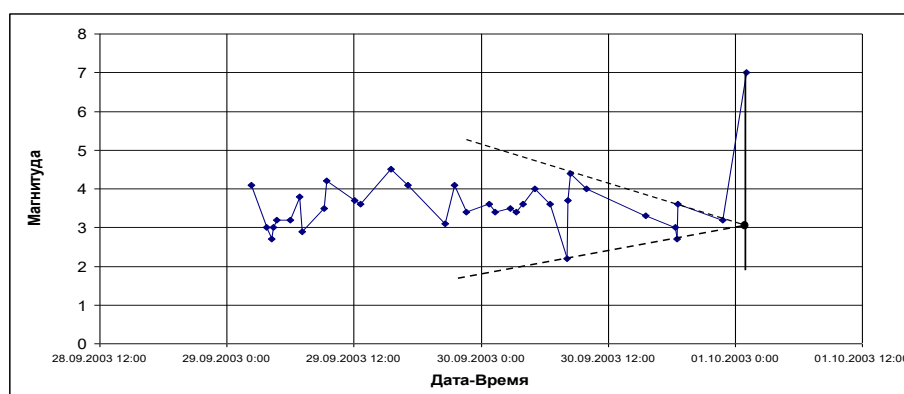


Рисунок 22 – Индикаторная последовательность сейсмических событий (форшоков), которую необходимо выявить во временном ряде сейсмических данных геомониторинга для выделенной очаговой области в процессе подготовки сильного землетрясения (на примере Алтайского землетрясения 2003 г.)

Эта структура соответствует хорошо известной стадии «сейсмического затишья», когда снижается энергетический уровень регистрируемых в выделенной прогнозной

области сейсмических событий. Отмеченные особенности структуры энергетического процесса подтвердились при анализе сейсмических событий в различных регионах земного шара. Успешность оценки определяется не только выявленными закономерностями в структуре энергетических процессов, но и надёжностью исходных данных. Анализируемый энергетический процесс требует соблюдения следующих условий: однородности измеряемых величин, непрерывности временного ряда, равноточности данных и отсутствия систематических погрешностей.

Исследование по проекту в 2025 г. посвящено разработке алгоритмического обеспечения обработки данных сейсмического мониторинга (форшоков) в процессе подготовки сильного землетрясения для решения прогностических задач на основе методов аппроксимации. Предложена методика обработки временных рядов специального вида – структур-предвестников для выделения закономерностей в данных сейсмического мониторинга процесса подготовки сильного землетрясения. Методика включает применение нескольких подходов, сочетание которых позволяет аппроксимировать сигналы различной сложности и находить в них скрытые закономерности. Совокупность расчётных схем методики предоставляет возможность эффективно решать задачи выделения закономерностей, восстановления пропусков, экстраполяции и оценки параметров ожидаемого сейсмического события. При этом применяются аппроксимация данных тригонометрическими многочленами, аппроксимация выпуклых оболочек данных многочленами Лежандра, а также аппроксимация «верхних и нижних ветвей» данных наблюдений (каталога землетрясений) на основе построения нелинейных регрессионных моделей – нейросетевой подход, позволяющий с повышенной точностью получать оценки исследуемого процесса. В отчётный период получены следующие результаты.

1) Алгоритмическая схема аппроксимации данных тригонометрическими многочленами включает:

– предварительную обработку данных сейсмомониторинга, построение сеточной функции на основе выделенных экспериментальных данных, представление функции в кусочно-линейном виде, преобразование отрезков с помощью коэффициентов Фурье;

– представление функции как суммы рядов Фурье, приближение функции на основе формул Валле-Пуссена и Фейера, также производится их сравнительный анализ, выявляются их особенности для обнаружения закономерностей;

– интерпретацию результатов расчётов, определение искомой функции – средней энергетической характеристики исследуемого процесса.

Отметим, что обобщение сумм Фурье до средних сумм Фейера и Валле-Пуссена позволяет получать более точный и устойчивый результат, не чувствительный к малым

шумам, поскольку указанные средние распределяют ошибку аппроксимации по всему интервалу аппроксимации. При обработке данных на основе средних Фейера, Валле-Пуссена выполняется серия предвычислений, не зависящих от данных, в результате коэффициенты аппроксимации вычисляются за линейное время. Показано, что наиболее адекватным для описания исследуемого физического процесса является среднее Валле-Пуссена, поскольку в нём особое внимание уделяется гармоникам высокого порядка. Проведено тестирование алгоритма на примере обработки данных процесса подготовки катастрофического землетрясения на Средних Курилах в 2006 г.

2) В аппроксимации данных геомониторинга на основе многочленов Лежандра используются узлы выпуклой оболочки, что на 1–2 порядка уменьшает количество узлов аппроксимации. Аппроксимация выпуклой оболочки позволяет выделить искомые закономерности развития процесса для оценки параметров ожидаемого события. На примере обработки данных сейсмического мониторинга для района Средних Курил показаны возможности применения разработанного алгоритма для выделенных очаговых зон сильных землетрясений в 2006 – 2008 гг. Выполнено тестирование алгоритма построения выпуклых оболочек данных геомониторинга многочленами Лежандра (рисунок 23).

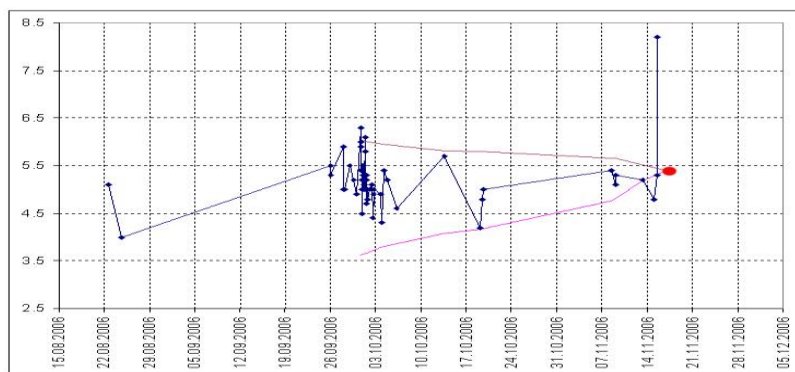


Рисунок 23 – Построение аппроксимационных функций на примере катастрофического землетрясения 15.11.2006 в районе о. Симушир (Средние Курилы)

Полученные аппроксимации отражают характер сейсмической активности в выделенной очаговой зоне, а оценка временного параметра  $t = 23.5$  (точка пересечения ветвей аппроксимации) практически соответствует времени возникновения изучаемого сильного землетрясения.

3) Выполнена обработка данных на основе построения нелинейной многомерной регрессии. При этом за счёт процедуры подбора количества гармоник и степени гладкости решается задача аппроксимации с заданной точностью. Разработанное алгоритмическое

обеспечение позволяет оценить время наступления ожидаемого основного сейсмического события. Выполнено тестирование на примере обработки и анализа данных геомониторинга очаговой области за определённый период времени наблюдения перед катастрофическим землетрясением 15.11.2006 в районе Средних Курильских островов.

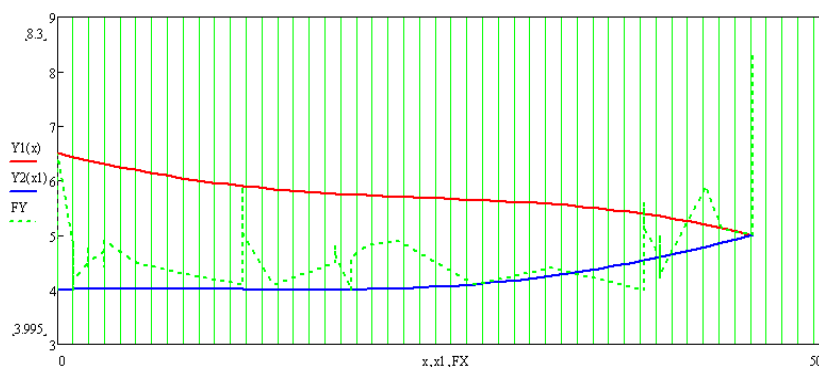


Рисунок 24 – Оценка параметров ожидаемого землетрясения 15.11.2006 (Средние Курилы)

Выделены наборы точек верхней и нижней ветвей данных наблюдений для заданной очаговой области. В результате получена модель, описывающая процесс подготовки сильнейшего землетрясения. Формирование аппроксимирующих функций для верхнего и нижнего наборов точек показано на рисунке 24. Для указанного набора точек погрешность по магнитуде лежит в диапазоне  $\Delta M \leq 0.25$ .

Предложенный алгоритм построения аппроксимационных функций позволяет оценить время ожидаемого события. Выявлена точность оценки временного параметра – отклонение от реально произошедшего события составляет 12 часов, при этом оценка уточняется по мере поступления новых данных. Эффективный подбор подстроечных коэффициентов по данным наблюдений позволяет быстро формировать искомые аппроксимации функции (модели). Показано, что подбор значения спектральной плотности и числа гармоник аппроксимирующей функции позволяет строить тренды, колебательную и шумовую составляющие изучаемого временного ряда с соответствующим количеством гармоник.

## **5.2 Учёт дополнительных геодинамических факторов, изменчивости гравитационного поля Земли и анализ его локальных аномалий относительно очаговых зон мега-землетрясений в Тихом океане**

В рамках проекта при исследовании данных о катастрофических цунамигенных мега-землетрясениях изучен параметр EWH (эквивалентная высота воды) на основе измерений космической системы (КС) GRACE в условиях возмущённой геосреды и

в фоновых условиях. Разработана методика, которая применяется для уточнения размеров гравитационных локальных аномалий, возникающих в районах очаговых зон цунамигенных мега-землетрясений с магнитудой  $M > 8.5$  по спутниковым данным GRACE. Целью исследования является уточнение параметров гравитационных аномалий относительно очаговых зон цунамигенных мега-землетрясений, произошедших в Тихом океане. Для исследования, в качестве примера, выбраны районы мега-землетрясений  $M > 8.5$  по данным каталога USGS в Тихом океане за последние 25 лет: зона субдукции вдоль побережья Японии, где произошло разрушительное цунамигенное мега-землетрясение 11.03.2011 с  $M = 9.1$ ; зона субдукции вдоль побережья Чили, где произошло катастрофическое цунамигенное землетрясение 27.02.2010 с  $M = 8.8$ .

Получены следующие результаты: проведён анализ геодинамических особенностей районов мега-землетрясений с  $M > 8.5$  по данным USGS в Тихом океане; сформирован архив спутниковых данных GRACE для исследуемых цунамигенных субдукционных областей за указанный период времени наблюдения; построены зависимости параметра EWH, полученного по измерениям GRACE в пространственно-временной области относительно гипоцентров указанных цунамигенных мега-землетрясений; выполнена интерпретация распределений параметра EWH и пространственно-временных характеристик изучаемых мега-землетрясений.

Таким образом, построены пространственные модели распределения EWH в очаговых зонах цунамигенных мега-землетрясений по спутниковым данным GRACE, включающие 2D и 3D цифровые карты возмущённой пространственной области, соответственно, за март 2011 г. (Японское мега-землетрясение) и за февраль 2010 г. (Чилийское мега-землетрясение), а также карты для фоновых, относительно спокойных геодинамических условий, также в мае и январе 2009 г. соответственно.

Для выявления и анализа гравитационных аномалий в очаговых зонах субдукционных областей построены карты абсолютных отклонений EWH (в виде разностных карт) и относительных отклонений EWH. Анализ распределения EWH относительно очаговых цунамигенных мега-землетрясений по построенным цифровым картам позволил уточнить размеры образовавшихся здесь аномалий, что предоставляет возможность формировать зону генерации цунами, пригодную для применения в качестве начальных условий для численного моделирования распространения цунами в Тихом океане. Дополнительно, с помощью метода RST (Robust Satellite Technique) рассчитаны индексы аномальности  $\delta EWH$ , на основе которых построены уточнённые цифровые карты гравитационных аномалий относительно района очаговых зон изучаемых цунамигенных мега-землетрясений. Метод RST использовался ранее для анализа пространственно-

временных рядов спутниковых данных поверхности с целью выявления статистических выбросов в этих рядах. В частности, метод использовался для построения тепловых аномалий по спутниковым данным. В данном исследовании индекс аномальности  $\delta EWH$  характеризует геометрию гравитационной аномальной области.

В итоге построены уточнённые цифровые карты аномалий распределения EWH на основе метода RST. На рисунке 25 показана аномалия, наблюдаемая относительно очаговой области Японского мега-землетрясения 11 марта 2011 г. На рисунке 26 приведена аномалия, наблюдаемая относительно очаговой области Чилийского мега-землетрясения 27 февраля 2010 г.

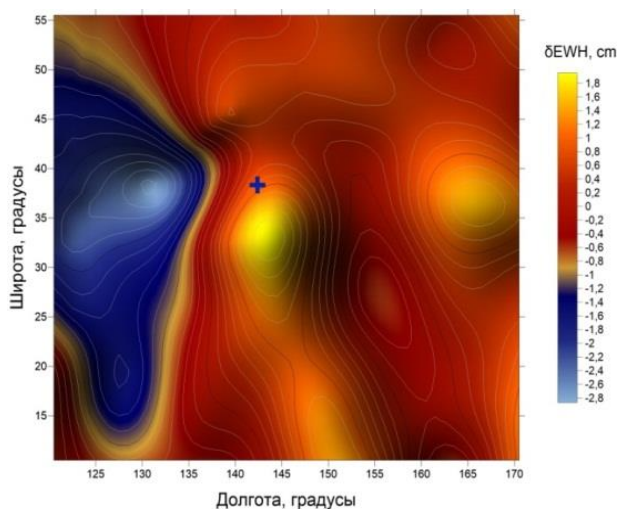


Рисунок 25 – Гравитационная аномальная область, образовавшаяся в районе Японского мега-землетрясения 11.03.2011

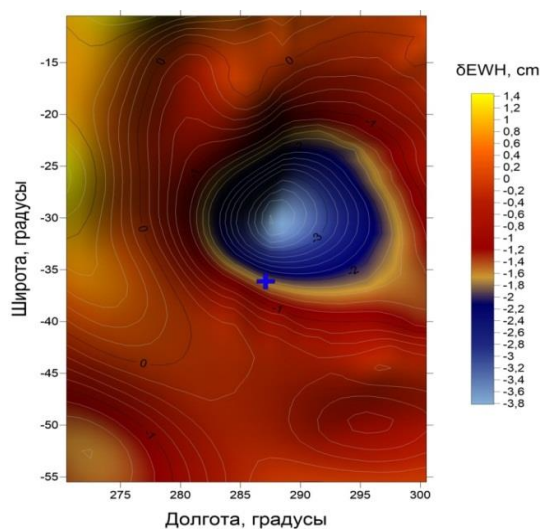


Рисунок 26 – Гравитационная аномальная область, образовавшаяся в районе Чилийского мега-землетрясения 28.02.2010

Интерпретация распределения аномалий параметра EWH относительно очаговых цунамигенных мега-землетрясений позволила уточнить размеры и геометрическую конфигурацию области, что предоставляет возможность оценить зону генерации цунами, пригодную для применения в качестве начальных условий для численного моделирования распространения цунами современными быстрыми алгоритмами, а также выполнить обработку и визуализацию результатов расчётов.

В этой связи предложена алгоритмическая схема геометрического анализа расчётных визуальных данных, основанная на применении алгоритмов шпирлет-преобразования и цветового кодирования изображений, с повышенной точностью и быстродействием. Применение данного алгоритмического и методического обеспечения обработки и анализа визуальных данных на основе алгоритмов шпирлет-преобразования в сочетании с процедурой контрастирования значительно улучшило результаты количественного описания проявлений волн-наводнений в проблеме цунами.

В качестве примеров приведены результаты применения алгоритмической схемы для обработки и визуализации: изображения карты максимальных высот цунами при моделировании распространения цунами от Чилийского мега-землетрясения 2010 г. (рисунок 27), а также следов воздействия цунами в береговой зоне о. Симушир от катастрофического землетрясения 2006 г. на Средних Курилах (рисунки 28 и 29).

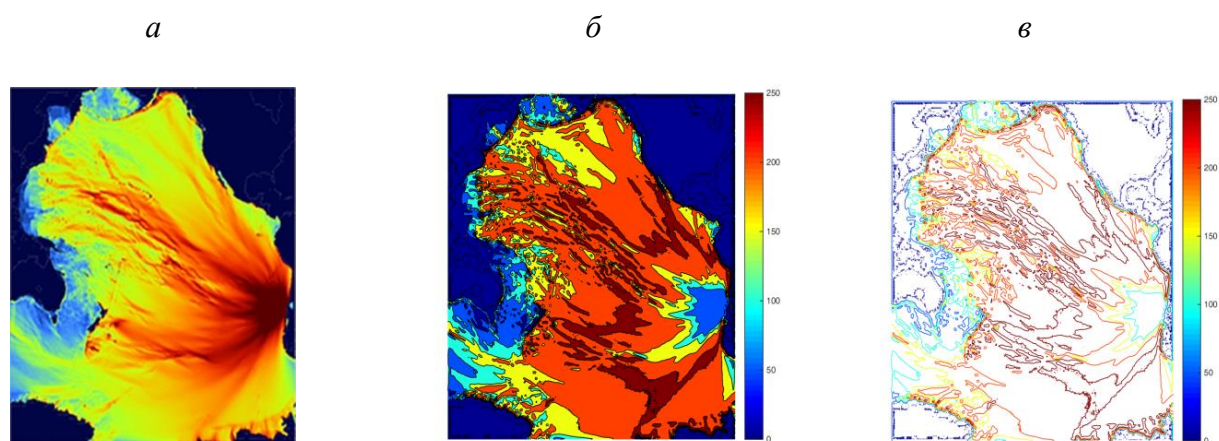


Рисунок 27 – Пример обработки и анализа изображения карты максимальных высот цунами от чилийского землетрясения 2010 г.: а) исходное изображение (результат численного моделирования цунами); б) результат шпирлет-преобразования исходного снимка и применения процедуры контрастирования; в) геометрический анализ и выделение контуров объекта интереса

В итоге было показано, что методика, включающая применение алгоритмов шпирлет-преобразования в сочетании с процедурой контрастирования изображений цветовым кодированием, является эффективным инструментом для анализа

геометрических черт изучаемых объектов: направленности распространения энергии цунами и, соответственно, анизотропии рельефа дна, а также следов проявлений морских природных катастроф в береговой зоне.



Рисунок 28 – Исходное изображение состояния побережья: верхнее – до цунами, нижнее – после цунами

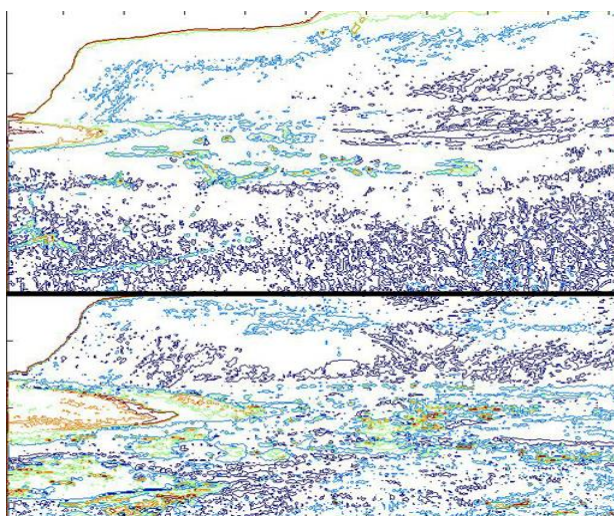


Рисунок 29 – Обработанное изображение проявлений цунами на побережье: верхнее – до цунами, нижнее – после цунами

### **5.3 Результаты анализа кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли на примере влияния геодинамических факторов на формирование Антарктической озоновой дыры**

В работе обзорного характера, в соответствии с гос. заданием на 2025 г., выполнен анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли на примере влияния геодинамических факторов на формирование Антарктической озоновой дыры

(АОД). Гравитационные измерения спутника GOCE и сейсмические измерения позволили построить цифровые карты гравитационных аномалий, которые сделали возможным по-новому интерпретировать литосферную структуру Антарктиды. Специфика геологического строения и геодинамики Западной Антарктиды определяется тем, что она является областью приполярного сочленения трёх главных океанских рифтовых зон: Тихоокеанской, Атлантической и Индийской.

Приведены данные об интенсивности, длительности и периодичности извержений стратовулкана Эребус с 1972 по 2023 гг. Рассмотрен вид мантийного плюма под «горячей точкой» вулкана Эребус по данным глубинной сейсмической томографии. Показано, что шлейф из вулканического газа и аэрозолей, выпускаемый в результате практически постоянной вулканической деятельности Эребуса, вносит значительный вклад в тропосферу и нижнюю стратосферу Антарктики, формируя Антарктическую озоновую аномалию (дыру). При этом основной причиной температурных и озоновых аномалий, наблюдаемых в нижней стратосфере в течение 1,5 – 2 лет после крупных вулканических извержений, является наличие в вулканических выбросах нанодисперсного сажевого аэрозоля.

С помощью моделей мантии, учитывающих скорости продольных и поперечных волн, представлено трёхмерное изображение мантийного плюма под горячей точкой вулкана Эребуса. Приведена схема процессов и источников пассивной и изверженной дегазации в магматической системе вулкана Эребус. Модель построена на основе наземных наблюдений за газовой примесью CO<sub>2</sub> (диоксида углерода) во время пассивной и взрывной дегазации в районе лавового озера.

Дополнительно, в качестве причин формирования АОД определены: влияние изменения температуры океана; усиление циркумполярного вихря, который является основным лимитирующим фактором; воздействие солнечных протонных вспышек на ОСО (общее содержание озона) полярных регионов. Это приводит к дополнительному образованию молекул окиси азота и гидроксильного радикала, разрушающих озон.

Приведён механизм разрушения озонового слоя на основе взаимодействия эндогенных флюидов (водорода, метана, азота) рифтовых зон со стратосферным озоном. Этот механизм связывает водородную дегазацию Земли с геодинамическими процессами. Водородная гипотеза подтверждена геологической позицией наиболее устойчивых планетарных озоновых аномалий. В качестве доказательства этой гипотезы выдвинуто пространственное соответствие мест глубинной земной дегазации и озоновых аномалий.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 2025 году выполнен полный цикл исследований, запланированных по теме проекта. Получены результаты, приоритет которых подтверждается рейтинговыми публикациями коллектива исполнителей проекта в ведущих российских и зарубежных научных журналах.

1) Сформулированы необходимые условия на потенциал для существования обобщённых функционально-инвариантных решений класса 2 трёхмерного стационарного уравнения Шрёдингера. Если исключить вырожденные случаи, то для существования таких решений потенциал должен удовлетворять двум дифференциальным соотношениям второго порядка. Полученные условия могут найти применение при поиске интегрируемых случаев трёхмерного стационарного уравнения Шрёдингера.

2) Предложена модификация метода построения приближённых решений краевых задач свободной турбулентности, основанного на процедуре сшивки асимптотических разложений решений полуэмпирических моделей турбулентности. Усовершенствованный метод позволяет выделить значения показателя автомодельности задачи и других неизвестных параметров. Полученные аналитические решения удовлетворительно согласуются с доступными экспериментальными данными и могут применяться в инженерной практике для получения априорных оценок значений гидродинамических характеристик свободных турбулентных течений.

3) Решена задача групповой классификации уравнений одномерных движений газа, найдены все специализации уравнения состояния, обеспечивающие расширение основной группы. Некоторые из найденных уравнений состояния содержат функциональный произвол, что повышает их потенциал для построения точных решений.

4) Исследована устойчивость растягивающего совместного движения двух слоёв идеальной жидкости с учётом сил поверхностного натяжения. Задача сведена к системе амплитудных уравнений на малые возмущения в лагранжевых координатах. Численно установлена неустойчивость основного течения.

5) Аналитически решена задача о малых осесимметрических немонотонных возмущениях равновесного состояния двух покоящихся несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей с плоской границей раздела и свободной верхней границей в цилиндрическом контейнере с твёрдым дном. Для конкретной системы жидкостей построены нейтральные кривые, определяющие пороговые значения температуры нижней границы цилиндра, при которых происходит потеря устойчивости, для различных геометрических конфигураций цилиндра.

6) Исследована устойчивость точного решения уравнений Обербека – Буссинеска, принадлежащего классу решений Бириха, относительно трёхмерных конечно-амплитудных колебаний. С помощью точного решения изучены характеристики конвективных режимов, возникающих в жидкости, обдуваемой парогазовым потоком. Построены карты возможных вторичных движений в зависимости от скорости прокачки газа, определены механизмы, обеспечивающие реализацию соответствующего вторичного режима. Описано формирование различных вторичных режимов в форме упорядоченных конвективных валов с различной ориентацией. Предсказываемые с помощью точного решения режимы течений подтверждаются данными теплофизических экспериментов. Полученные результаты могут быть использованы при разработке и/или совершенствовании экспериментальных методов исследования испарительной конвекции в мини-системах.

7) Исследованы спектральные задачи для двумерных стационарных конвективных течений. Изучены две конфигурации: слой жидкости со свободной термокапиллярной поверхностью и канал с проницаемой верхней стенкой. В обоих случаях анализ сводится к нелинейной спектральной задаче для параметра, связанного с градиентом давления. При малых числах Марангони и Рейнольдса построены аналитические решения соответствующих спектральных задач. Для произвольных значений указанных параметров получены численные решения. Для обеих конфигураций установлено свойство неединственности решений. Описаны формы течений, соответствующие различным собственным значениям.

8) В рамках сопряжённой постановки построено трёхмерное точное решение задачи о термодиффузионном совместном движении бинарной смеси и жидкости в канале, на нижней границе которого приложена тепловая нагрузка, распределённая по квадратичному закону, а верхняя является адиабатической границей. Дана физическая интерпретация решения. С помощью него изучено влияние геометрии системы на топологию возникающих вихревых структур.

9) Разработаны модификации математической модели испарительной конвекции в двухфазных системах, корректно учитывающие неоднородность состава рабочих сред, являющихся бинарными смесями, нелинейность зависимости поверхностного натяжения от концентрации жидкого раствора, и позволяющие использовать условия второго рода для функций температуры и концентрации на внешних границах области течения. Полученные модели использованы для расчёта основных характеристик сопряжённого течения с диффузионным испарением на границе раздела (скорости, интенсивности испарения, температуры и концентрации). Выделены варианты постановок краевых задач в областях с внутренней границей раздела, обеспечивающие физически содержательные результаты

моделирования. Результаты могут быть полезны при разработке концепций и определении условий проведения экспериментов по изучению испарительной конвекции, вызванной прокачкой газа.

10) В рамках приближения Буссинеска изучена задача о термокапиллярной конвекции, вызванной локальным граничным нагревом, в ограниченном массиве, частично заполненном испаряющейся жидкостью. Математическая модель включает полное условие теплового баланса на границе раздела жидкость – газ, учитывающее вклад диффузионного испарения, термодиффузионных эффектов, обусловленных присутствием испаряемого компонента в газовой фазе, и дефекта тепла, отвечающего затратам энергии на термокапиллярные деформации межфазной границы. На основе обобщённой модели выполнен численный эксперимент; полученные результаты позволяют оценить вклад дефекта тепла. Модель предсказывает уменьшение глубины термокапиллярного прогиба в области тепловой накачки и амплитуды осцилляций межфазной границы. Полученные результаты могут быть использованы при принятии технологических решений относительно геометрических и мощностных характеристик тепловых элементов, используемых для продуцирования внешней температурной нагрузки.

11) Разработана одномерная квазистационарная модель для расчёта глубины протаивания и вертикальных температурных профилей в слоях вечной мерзлоты с различной морфологической структурой (снег, талый и мёрзлый грунты). Модель учитывает условия Стефана на подвижных границах фазовых переходов и использует метеорологические данные в качестве входных параметров. С целью получения оценки влияния возможных изменений климата на динамику вечной мерзлоты для полярных районов на основе предложенной модели проведено численное моделирование с данными по метеостанции Анадырь по сценарию потепления на 10 – 15 °С. Модель предсказывает увеличение глубины протаивания к концу XXI века на 6 – 7 см.

12) Развита алгоритмическая база для решения проблемы калибровки феноменологических параметров структурно неоднородных сред, которая препятствует применению методов численного моделирования к решению инженерных задач в рамках теории моментного континуума Коссера. На основе анализа микроструктуры высокопористых материалов предложены эвристические алгоритмы для заполнения пропусков в таблицах параметров, известных из литературы по экспериментальным измерениям. Реализованы методы идентификации параметров моментного континуума на основе численного решения серии задач о распространении упругих волн в блочной среде с податливыми прослойками. Расчёты, проведённые на основе разработанной ранее вычислительной технологии, показали, что распространение волн напряжений и

деформаций в блочной среде с податливыми прослойками в состоянии плоской деформации можно приближенно моделировать на основе теории континуума Коссера. Это приближение обеспечивает относительно простой аналитический подход к построению решений и позволяет многократно сократить размерность вычислительных задач, обеспечивая при этом приемлемую для приложений точность численных решений.

В качестве примера применения теории континуума Коссера, учитывающей эффекты вращательного движения частиц, приведены результаты численных расчётов динамики жидкого кристалла 5СБ под действием механических, тепловых и электромагнитных возмущений.

Разработана и зарегистрирована в Роспатенте компьютерная программа для численного исследования в пространственной постановке краевых задач динамики блочно-слоистой среды на суперкомпьютерах с параллельной архитектурой. Проведение серийных расчётов с помощью этой программы в дальнейшем позволит получить более полное решение задачи идентификации параметров в теории континуума Коссера.

13) Разработаны алгоритмы построения и анализа прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий на основе методов аппроксимации. Выполнено тестирование алгоритмов на примере обработки и визуализации данных геомониторинга очаговой области перед катастрофическим землетрясением 15.11.2006 в районе Средних Курильских островов. Показано, что полученные модели адекватно описывают процесс подготовки сильнейшего землетрясения и позволяют оценить основные параметры ожидаемого сейсмического события.

Учёт влияния внешних геодинамических факторов, изменчивости гравитационного поля Земли и анализ локальных гравитационных аномалий относительно очаговых зон катастрофических мега-землетрясений в Тихом океане позволил уточнить местоположение и геометрические особенности очагов Чилийского (2010 г.) и Японского (2011 г.) цунамигенных землетрясений. Для построения уточненных контуров очаговых зон предложено использовать индекс аномалии. Полученные данные предоставляют возможность оценить зону генерации цунами, пригодную для применения в качестве начальных условий для численного моделирования распространения цунами современными быстрыми алгоритмами, а также выполнить обработку и визуализацию результатов расчётов. Предложена алгоритмическая схема геометрического анализа расчётных визуальных данных, основанная на применении алгоритмов шарлет-преобразования и цветового кодирования изображений. В качестве примеров приведены результаты применения алгоритмов для обработки и визуализации карты максимальных высот цунами при моделировании распространения цунами от Чилийского мега-

землетрясения 2010 г., а также следов воздействия цунами в береговой зоне о. Симушир от катастрофического землетрясения 2006 г. на Средних Курилах.

14) Выполнен анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли на примере влияния геодинамических факторов на формирование Антарктической озоновой дыры (АОД). Гравитационные измерения спутника GOCE и сейсмические измерения позволили построить цифровые карты гравитационных аномалий, которые сделали возможным по-новому интерпретировать литосферную структуру Антарктиды. Приведены данные об интенсивности, длительности и периодичности извержений стратовулкана Эребус с 1972 по 2023 гг. С помощью моделей мантии, учитывающих скорости продольных и поперечных волн, представлено трёхмерное изображение мантийного плюма под горячей точкой вулкана Эребуса. Показано, что шлейф из вулканического газа и аэрозолей, выпускаемый в результате вулканической деятельности Эребуса, вносит значительный вклад в тропосферу и нижнюю стратосферу Антарктики, формируя Антарктическую озоновую аномалию (дыру).

Полученные в течение 2025 года научные и научно-технические результаты обладают новизной, соответствуют мировому уровню и имеют высокий потенциал практического применения в машиностроении, авиастроении, горнодобывающей и других отраслях отечественной промышленности. Они позволяют получить ответ на ряд фундаментальных вопросов в науке о землетрясениях, которые могут быть решены только с помощью математических моделей и методов. Результаты моделирования в области геоэкологии и геодинамики могут быть использованы при разработке систем предупреждения и защиты населения и инфраструктуры городов от природных катастрофических событий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

1. Андреев В. К., Лемешкова Е. Н. Спектр краевой задачи двумерной тепловой конвекции // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2025. – Т. 52. – С. 34–43. DOI: 10.26516/1997-7670.2025.52.34. EDN: XZSSJW. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
2. Andreev V. K. Group classification of one equations that arises when describing one-dimensional gas motions // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2025. – V. 18, Iss. 5. – P. 694–701. EDN: UQMPMC. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
3. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Impact of the interface heat defect on the thermocapillary response of the phase boundary in a liquid–gas system upon local heating from below // International Journal of Multiphase Flow. – 2025. – V. 189. – Art. 105260. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2025.105260. EDN: QCWNHH. (Белый список, уровень 1; ядро РИНЦ)
4. Lemeshkova E. N. The spectrum of the boundary value problem describing a two-dimensional flat stationary thermocapillary flow in a channel // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. – 2025. – V. 18, Iss. 4. – P. 532–541. EDN: PNAGOD. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
5. Сенашов В. И. Приложения теории графов и теории групп в химии, физике // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2025. – Т. 26, № 3. – С. 334–342. DOI: 10.31772/2712-8970-2025-26-3-334-342. EDN: VOVFHM. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, категория K2 перечня ВАК)
6. Stepanova I. V. On influence of channel geometry on evaporative convection at nonlinear distribution of surface tension of evaporating liquid // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2025. – V. 175. – Art. 105121. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105121. EDN: AFPNLW. (Белый список, уровень 1; ядро РИНЦ)
7. Stepanova I. V., Meleshko S. V. Lie symmetry analysis of heat and mass transfer equations with cross-diffusion effects // Siberian Mathematical Journal. – 2025. – V. 66, Iss. 3. – P. 832–844. DOI: 10.1134/S003744662503019X. EDN: VVBNWY. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)

8. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. The Problem on an Edge Dislocation Running at Superseismic Velocity // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2025. – V. 19, Iss. 1. – P. 131–141. DOI: 10.1134/S1990478925010119. EDN: PGGGTZ. (Белый список, уровень 3; ядро РИНЦ, ВАК)
9. Volodko O. S., Lemeshkova E. N. Vertical structure of internal seiches in a stratified lake // *Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics*. – 2025. – V. 18, Iss. 5. – P. 687–693. EDN: QUUJVU. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
10. Volodko O. S., Lemeshkova E. N., Malcev E. D. The dynamic of internal waves in lake Shira // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2025. – V. 13, Iss. 3. – P. 61–77. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2025056654. (Белый список, уровень 3; ядро РИНЦ)
11. Садовский В. М., Садовская О. В. Задача о бегущей краевой дислокации // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2025. – Т. 66, № 1. – С. 163–173. DOI: 10.15372/PMTF202415480. EDN: LMVJPI. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
12. Садовский В. М., Садовская О. В. Задача о краевой дислокации, бегущей с трансзвуковой скоростью // *Физическая мезомеханика*. – 2025. – Т. 28, № 4. – С. 5–20. DOI: 10.55652/1683-805X\_2025\_28\_4\_5-20. EDN: VDKIIV. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
13. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Transonic edge dislocation problem // *Physical Mesomechanics*. – 2025. – V. 28, Iss. 6. – P. 713–727. DOI: 0.1134/S1029959925600016. (Белый список, уровень 1; ядро РИНЦ, ВАК)
14. Садовский В. М., Садовская О. В. Задача о краевой дислокации, бегущей со сверхсейсмической скоростью // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2025. – Т. 28, № 1. – С. 67–79. DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.105. EDN: LLOQSM. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
15. Efimov E. A., Sadovskii V. M. Wave propagation in a blocky-layered medium with thin interlayers // *Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics*. – 2025. – V. 18, Iss. 1. – P. 119–129. EDN: WBJQOM. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
16. Petrakov I. E. Modelling of a sandwich plate cross-section with different moduli of the material under cylindrical loads // *Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics*. – 2025. – V. 18, Iss. 3. – P. 320–330. EDN: KOZBCF. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
17. Smolekho I. V. Investigation of the orientational thermoelasticity effect using a simplified model of nematic liquid crystal in the acoustic approximation // *Journal of Siberian Federal*

- University: Mathematics & Physics. – 2025. – V. 18, Iss. 3. – P. 337–346. EDN: FDPGQX.  
(Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
18. Смолехо И. В. Алгоритм решения системы уравнений статики жидких кристаллов // Успехи кибернетики. – 2025. – Т. 6, № 4. – С. 114–120. (Белый список, уровень 3; категория К3 перечня ВАК)
  19. Ефимов Е. А. Моделирование распространения волн в блочной среде с тонкими вязкоупругими прослойками в пространственной постановке // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27, № 4. – С. 20–33. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.402. EDN: YWPGLC. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
  20. Petrakov I. On the stress-strain state of a multilayer composite plate with different resistance in compression and tension // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. – V. 46, Iss. 10. – P. 5459–5470. DOI: 0.1134/S1995080224608233. (Белый список, уровень 2; ядро РИНЦ, ВАК)
  21. Рублёва Т. В., Симонов К. В., Глазырин В. А. Построение гравитационных аномалий  $\Delta G$  над сейсмоактивными областями на основе метода геоцентра GFZ // Информатизация и связь. – 2025. – № 1. – С. 62–71. DOI: 10.34219/2078-8320-2025-16-1-62-71. EDN: MLSKDX. (Белый список, уровень 3; категория К2 перечня ВАК)
  22. Рублёва Т. В., Симонов К. В., Серебренникова Л. М. Геодинамические факторы, влияющие на формирование АОД // Информатизация и связь. – 2025. – № 2. – С. 37–49. DOI: 10.34219/2078-8320-2025-16-2-37-49. EDN: QSYKIE. (Белый список, уровень 3; категория К2 перечня ВАК)
  23. Курако М. А., Зотин А. Г., Симонов К. В., Кабанов А. А., Кругляков А. С. Обработка данных специального вида на основе методов аппроксимации // Информатизация и связь. – 2025. – № 2. – С. 50–60. DOI: 10.34219/2078-8320-2025-16-2-50-60. EDN: OXHEXQ. (Белый список, уровень 3; категория К2 перечня ВАК)
  24. Симонов К. В., Зотин А. Г., Рублёва Т. В. Анализ данных измерений КС GRACE над очаговыми зонами мега-землетрясений в Тихом океане // Информатизация и связь. – 2025. – № 3. – С. 57–68. DOI: 10.34219/2078-8320-2025-16-3-57-68. EDN: TIMMOV. (Белый список, уровень 3; категория К2 перечня ВАК)
  25. Зотин А. Г., Симонов К. В., Кругляков А. С. Обработка и визуализация данных на основе шпирлет-преобразования в проблеме цунами // Информатизация и связь. – 2025. – № 3. – С. 69–80. DOI: 10.34219/2078-8320-2025-16-3-69-80. EDN: SHIMMS. (Белый список, уровень 3; категория К2 перечня ВАК)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Доклады на ведущих научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом

1. Автор: Андреев Виктор Константинович  
Докладчик: Андреев Виктор Константинович  
Название доклада: Групповая классификация одного из уравнений, возникающего при описании одномерных движений газа  
Название конференции: Международная научная конференция «Современные проблемы математики и математического образования: 78-е Герценовские чтения»  
Место проведения конференции: г. Санкт-Петербург, 15–17 апреля 2025 г.
2. Авторы: Андреев Виктор Константинович, Степанова Ирина Владимировна  
Докладчик: Андреев Виктор Константинович  
Название доклада: Движение бинарной смеси в протяжённом горизонтальном канале с неоднородно нагретыми стенками  
Название конференции: X Всероссийская конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённая 125-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева  
Место проведения конференции: г. Новосибирск, 25–29 августа 2025 г.
3. Автор: Бекежанова Виктория Бахытовна  
Докладчик: Бекежанова Виктория Бахытовна  
Название доклада: Иерархия моделей испарительной конвекции  
Название конференции: XV Международная молодёжная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика»  
Место проведения конференции: г. Омск, 19–24 мая 2025 г.
4. Авторы: Бекежанова Виктория Бахытовна, Гончарова Ольга Николаевна  
Докладчик: Бекежанова Виктория Бахытовна  
Название доклада: Влияние дефекта тепла на характеристики термокапиллярного отклика межфазной границы при локальном нагреве двухслойной системы  
Название конференции: X Всероссийская конференция «Пермские гидродинамические чтения»  
Место проведения конференции: г. Пермь, 1–3 октября 2025 г.

5. Автор: Степанова Ирина Владимировна  
Докладчик: Степанова Ирина Владимировна  
Название доклада: Моделирование тепломассопереноса в двухслойной системе на основе точных решений уравнений конвекции  
Название конференции: III Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ – 25)  
Место проведения конференции: г. Улан-Удэ, 18–22 августа 2025 г.
6. Автор: Шанько Юрий Вадимович  
Докладчик: Шанько Юрий Вадимович  
Название доклада: Обобщённые функционально-инвариантные решения стационарного уравнения Шрёдингера  
Название конференции: XXIX Международная научно-практическая конференция «Решетнёвские чтения», посвящённая памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева  
Место проведения конференции: г. Красноярск, 10–14 ноября 2025 г.
7. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Гузев Михаил Александрович, Садовская Оксана Викторовна  
Докладчик: Садовский Владимир Михайлович  
Название доклада: Three solutions of a problem about running dislocation  
Название конференции: 9-я Всероссийская конференция «Dynamics in Siberia – 2025»  
Место проведения конференции: Новосибирск, 24 февраля – 1 марта 2025 г.
8. Авторы: Садовский Владимир Михайлович, Гузев Михаил Александрович, Садовская Оксана Викторовна  
Докладчик: Садовский Владимир Михайлович  
Название доклада: Анализ энерговыделения при сверхбыстром распространении трещин сдвига в земной коре на основе модели бегущей дислокации  
Название конференции: XIII Международная Российско-Китайская конференция по геомеханике больших глубин «Проблемы геомеханики сильно сжатых горных пород и массивов»  
Место проведения конференции: Владивосток, 28 июля – 1 августа 2025 г.
9. Авторы: Садовская Оксана Викторовна, Садовский Владимир Михайлович  
Докладчик: Садовская Оксана Викторовна  
Название доклада: Применение модели блочной среды к анализу пластической деформации геоматериалов на мезоуровне

Название конференции: XIII Международная Российско-Китайская конференция по геомеханике больших глубин «Проблемы геомеханики сильно сжатых горных пород и массивов»

Место проведения конференции: Владивосток, 28 июля – 1 августа 2025 г.

10. Автор: Ефимов Евгений Александрович

Докладчик: Ефимов Евгений Александрович

Название доклада: Распространение волн в структурно-неоднородных блочных средах в пространственной постановке

Название конференции: 29-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности

Место проведения конференции: Челябинск, 29 июня – 5 июля 2025 г.

11. Авторы: Смолехо Ирина Владимировна

Докладчик: Смолехо Ирина Владимировна

Название доклада: Алгоритм решения системы уравнений статики жидких кристаллов

Название конференции: XIV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвящённая памяти академика А. Ф. Сидорова, с элементами школы молодых учёных («АФСЖД-2025»)

Место проведения конференции: пос. Джанхот, Краснодарский край, 2–8 сентября 2025 г.

12. Авторы: Симонов Константин Василевич, Кашкин Валентин Борисович,

Рублёва Татьяна Васильевна

Докладчик: Симонов Константин Василевич

Название доклада: Геоэкологические и атмосферные проявления от геодинамической активности сильного землетрясения  $M = 7.5$  (о. Сулавеси) по данным космического мониторинга

Название конференции: V Всероссийский научно-практический форум по проблемам устойчивого развития в новом социо-технологическом укладе «Человек. Экономика. Технологии. Социум» (HETS 2025)

Место проведения конференции: Красноярск, 6 – 8 ноября 2025 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### **Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности, зарегистрированных в 2025 году**

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025615731 «Программа расчёта задач динамики трёхмерных блочно-слоистых сред с упругими блоками и тонкими упругими прослойками (3D\_blocky\_elast\_waves)». Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». Автор: Ефимов Е. А. Дата гос. регистрации: 07.03.2025.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2025 год, утверждённая государственным заданием

#### Описание задач, предлагаемых к решению

1. Разработка новых методов решения уравнений с частными производными. Построение точных решений с функциональным произволом линейных и нелинейных уравнений.

2. Исследование устойчивости течений в рамках неклассических моделей конвекции. Апробация двусторонних постановок задач для описания динамики жидкостных систем в небуссинесковских условиях. Анализ конвективных режимов, индуцированных внешними воздействиями.

3. Разработка комплекса численных алгоритмов и компьютерных программ для исследования сезонных изменений вечной мерзлоты, адаптация комплекса под методику дистанционных измерений.

4. Разработка методов калибровки параметров упругости однородного ортотропного моментного континуума Коссера на основе численного решения волновых задач для блочной среды с податливыми прослойками.

5. Построение и исследование прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учётом влияния внешних геодинамических факторов. Анализ кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли.

#### Предполагаемые (ожидаемые) результаты

1. Необходимые условия существования обобщенных функционально-инвариантных решений для трёхмерного стационарного уравнения Шрёдингера. Решения новых моделей свободной турбулентности.

2. Априорные оценки и карты устойчивости в зависимости от физических и геометрических параметров. Варианты постановок краевых задач в областях с внутренней границей раздела, обеспечивающие получение содержательных результатов моделирования конвекции в двухслойных системах.

3. Оценка влияния возможных изменений климата на динамику вечной мерзлоты на основе вычислительных экспериментов для полярных районов.

4. Алгоритмическая и программная реализация методов калибровки параметров упругости напряжённо-деформированного состояния однородного ортотропного моментного континуума Коссера с помощью численного решения волновых задач для модели блочной среды. Результаты анализа эффективности применения теории Коссера к моделированию деформации горных пород в задачах геодинамики.

5. Результаты построения и исследования прогностических моделей предвестников различной природы для сильных сейсмических событий с учётом влияния внешних геодинамических факторов. Результаты анализа кооперативных явлений в геосредах в сейсмоактивных регионах Земли.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

**Количественные показатели проекта**

№ п/п	Наименование показателя (в зависимости от характера исследований (фундаментальные, поисковые, прикладные, экспериментальные разработки)	Единицы измерения	План на 2025 г.	Факт в 2025 г.
1	Публикации в журналах "Белого списка" первого уровня	единиц	3	3
1.1	Публикации в журналах "Белого списка" второго уровня	единиц	4	14
2	Публикации в журналах "Белого списка" третьего уровня	единиц	13	7
3	Публикации в журналах "Белого списка" четвёртого уровня	единиц	1	1
4	Прочие публикации в научных журналах, входящих в перечень изданий из списка ВАК	единиц	4	0
5	Доклады на ведущих международных научных (научно-практических) конференциях в Российской Федерации и за рубежом	единиц	12	12
6	Рецензируемые монографии (при наличии ISBN), рецензируемые энциклопедии (при наличии ISBN)	единиц	0	0
7	Главы в рецензируемых монографиях (при наличии ISBN), статьи в рецензируемых энциклопедиях (при наличии ISBN)	единиц	0	0
8	Аналитические материалы в интересах (по заказам) органов государственной власти	единиц	0	0
9	Число поданных заявок на получение патента или регистрацию результата интеллектуальной деятельности (далее – РИД)	единиц	1	1
10	Научно-технический результат, завершающийся изготовлением, предварительными и приёмочными испытаниями опытного образца (опытной партии), тыс. рублей (для экспериментальных разработок)	единиц	0	0
11	Доля исследователей в возрасте до 39 лет в численности основных исполнителей темы	%	10	29
12	Защищенные диссертации по теме исследования:			
12.1	кандидатские	единиц	0	0
12.2	докторские	единиц	0	0
13	Количество планируемых к разработке медицинских технологий в рамках научной темы	единиц	0	0