

*На правах рукописи*

**ШМИДТ  
ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ**

**Аналитические алгоритмы усреднения оптических характеристик  
ансамблей несферических частиц**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2006

Работа выполнена в Красноярском государственном техническом университете

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук  
Парамонов Леонид Евгеньевич

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук  
Денисенко Валерий Васильевич

доктор физико-математических наук,  
профессор Слабко Виталий Васильевич

**Ведущая организация:** Институт оптики и атмосферы СО РАН,  
г. Томск

Защита диссертации состоится в 14 часов 26 декабря 2006 г. на заседании диссертационного совета Д 003.009.01 при Институте вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660036, г. Красноярск, Академгородок, ИВМ СО РАН, ауд. 5-09.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ СО РАН.

Автореферат разослан 24 ноября 2006 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н.

Симонов К.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Рассеяние и поглощение электромагнитного излучения частицами используется во многих областях науки и техники как важный источник информации о свойствах частиц, их природе, а также о процессах происходящих, например, в атмосфере и океане (Современные проблемы атмосферной оптики. в 9 т., под ред. акад. Зуева В. Е.; Шифрин К. С. Введение в оптику океана, 1983).

Разработка методов количественной оценки оптических характеристик несферических частиц с использованием точных методов является актуальной задачей оптики атмосферы и океана, а результаты расчетов на их основе могут служить в качестве эталонных, например, для проверки корректности приближенных решений. Эти методы также необходимы для установления связей (в ряде случаев функциональных) между оптическими характеристиками частиц и микроструктурой взвеси, что позволяет решать как прямые, так и обратные задачи оптики дисперсных сред.

Интерес к таким задачам обусловлен интенсивным развитием дистанционных методов, усовершенствованием техники прямых оптических измерений в атмосфере и океане, широким внедрением в практику биофизического эксперимента оптических методов. Исследование оптических свойств аэрозолей, гидрозолей, частиц биологического происхождения необходимо для понимания их роли в геосферно-биосферных процессах представляет собой сложную комплексную задачу. Результаты подобных исследований значимы для фундаментальных теорий климата, видимости, переноса излучения служат основой для разработки оптических методов экологического мониторинга окружающей среды.

Развитие существующих модельных представлений об оптических свойствах атмосферного аэрозоля, терригенной и биогенной составляющих океанской взвеси, биологических клеток с учетом их многообразия предполагает разработку данной проблемы в нескольких направлениях.

Во-первых, развитие точной теории дифракции электромагнитного излучения одиночными несферическими частицами (Waterman P., 1965, 1971; Asano S. and Yamamoto G., 1975; Barber P. and Yeh C., 1975; Фарафонов В., 1983; Eremin Yu. and Orlov N., 1998; Wriedt T. and Doicu A., 1998), разработка и численная реализация алгоритмов оценки полной системы оптических характеристик одиночной частицы, наблюдаемых линейным квадратичным приемником.

Во-вторых, при исследовании взаимодействия электромагнитного излучения с ансамблем независимых частиц необходимо учитывать ориентационную структуру ансамбля частиц, в этом случае особую значимость имеют эффективные алгоритмы усреднения оптических характеристик. Согласно литературным источникам (Mishchenko M., Videen G., Babenko V., Khlebtsov N. and Wriedt T., 2004), одним из наиболее эффективных точных методов решения задачи дифракции является метод T-матриц, разработанный Уотерменом (Waterman P., 1971). Отличительной особенностью метода является возможность аналитического ориентационного усреднения оптических характеристик (Mishchenko M., 1991; Khlebtsov N., 1992; Paramonov L., 1995). Для изотропного ансамбля хаотически ориентированных осесимметричных частиц (2D частицы) получено аналитическое разложение элементов матрицы рассеяния (Mishchenko M., 1991) в ряды по обобщенным сферическим функциям (Гельфанд И. М. и др., 1958) и численно реализован алгоритм, исключаяющий процедуру численного интегрирования.

Для хаотически ориентированных частиц, не обладающих осевой симметрией (3D частицы), аналогичное решение отсутствует, авторами (Wriedt T., 2002; Baran A. et al., 2001) используется трудоемкая процедура численного интегрирования по трем углам Эйлера.

В-третьих, необходимость решения обратных задач стимулирует исследования по оптической классификации ансамблей частиц (Hansen J., and Travis L., 1974; Парамонов Л., 2003), что позволяет решение ряда обратных задач свести к решению на классах эквивалентности.

**Цель работы.** Используя метод T-матриц, разработать и численно реализовать эффективные алгоритмы аналитического ориентационного усреднения оптических характеристик ансамблей частиц, не обладающих осевой симметрией, с последующим приложением результатов для а) проведения оптической классификации ансамблей частиц, б) оценки параметров ориентационной структуры ансамбля частиц по данным обратного рассеяния.

#### **Научная новизна результатов и положения, выносимые на защиту.**

1. Для хаотически ориентированных несферических частиц, не обладающих осевой симметрией (3D частицы), получено аналитическое разложение (в терминах элементов T-матрицы) элементов матрицы рассеяния в ряды по обобщенным сферическим функциям, исключаящее трудоемкую процедуру численного интегрирования оптических характеристик по трем

углам Эйлера. Коэффициенты являются компактным и удобным способом хранения информации об оптических характеристиках частиц и могут быть многократно использованы в задачах однократного и многократного рассеяния. На основе аналитического разложения разработан и численно реализован комплекс эффективных алгоритмов расчета оптических характеристик – угловой зависимости элементов матрицы рассеяния, коэффициентов рассеяния, поглощения, ослабления. Для гексагональных цилиндров разработанный алгоритм по времени численной реализации на два порядка эффективнее существующих аналогов.

2. Основываясь на оптической эквивалентности изотропных ансамблей эллипсоидальных частиц в приближении Рэлея-Ганса-Дебая (РГД), проведена оптическая классификация ансамблей несферических частиц (в том числе ориентированных) по микроструктурным параметрам. Определены классы эквивалентности, в пределах которых элементы матрицы рассеяния имеют близкие значения. Оптическая классификация ансамблей несферических частиц позволяет свести решение ряда обратных задач к решению на классах эквивалентности.

3. Разработана методика оценки параметров ориентационной структуры осесимметричных частиц по данным обратного рассеяния. Для горизонтально ориентированных частиц получены оценки параметров, однозначно определяющих вклад ориентационной структуры в обратное рассеяние.

**Практическая значимость.** Результаты исследования имеют практическую направленность и могут быть использованы при создании математического обеспечения специализированной аппаратуры оптического контроля дисперсных систем для решения задач экологического мониторинга атмосферных и водных объектов, идентификации частиц, информационного обеспечения работы лидарных и радарных систем.

**Достоверность результатов.** Обеспечивается корректным использованием методов теории дифракции электромагнитных волн частицами несферической формы, совпадением результатов численных расчетов с данными других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались на X Рабочей группе “Аэрозоли Сибири” (Томск, 2003), X Юбилейном международном симпозиуме “Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы” (Томск, 2003), XI международном симпозиуме “Оптика атмосферы и океана. Физика

атмосферы” (Томск, 2004), семинарах кафедры прикладной математики Красноярского государственного технического университета (Красноярск, 2004, 2005, 2006), XII Рабочей группе “Аэрозоли Сибири” (Томск, 2005), IX Международной конференции “Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles” (Санкт-Петербург, 2006), XIII Рабочей группе “Аэрозоли Сибири” (Томск, 2006).

**Публикации и личный вклад автора.** По материалам диссертации опубликовано 13 работ, перечень которых приведен в конце диссертации. Результаты диссертации, сформулированные в защищаемых положениях и выводах, отражают личный вклад автора в опубликованные работы.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и библиографии из 119 наименований. Работа изложена на 119 машинописных листах.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-05-64390.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы, излагается современное состояние вопроса, цель работы, отмечается научная новизна и значимость полученных результатов, формулируются основные положения, выносимые на защиту, кратко описано содержание диссертации по главам, приводятся данные о публикациях и личном вкладе автора.

**В первой главе** рассматривается задача дифракции электромагнитного излучения одиночной несферической частицей, приводится краткий обзор современных точных методов решения задачи дифракции. Излагаются основные соотношения метода Т-матриц. В терминах элементов Т-матриц приводятся выражения оптических характеристик: амплитудной матрицы рассеяния, матрицы рассеяния, матрицы Мюллера, сечений ослабления, рассеяния, поглощения.

В параграфе 1.3 кратко излагаются основные соотношения метода Т-матриц – метода решения задач дифракции электромагнитных и акустических волн несферическими частицами.

Согласно этому методу, электромагнитные поля – падающее, внутреннее и рассеянное – представляются в виде рядов по соответствующим векторным

сферическим гармоникам – решениям векторного уравнения Гельмгольца, а коэффициенты разложения падающего и рассеянного полей связаны бесконечномерным линейным преобразованием – Т-матрицей.

Учитывая инвариантность векторного уравнения Гельмгольца относительно вращения системы координат, выбор сферических гармоник осуществляется таким образом, чтобы при вращении системы координат сферические гармоники преобразовывались по неприводимым представлениям группы вращений (Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., 1952).

В фиксированной системе координат Т-матрица является инвариантом относительно параметров падающего излучения и при вращении системы координат преобразуется согласно (Tsang L. et. all, 1984):

$${}^2T_{mm'n'}^{ij} = \sum_{m_1=-n}^n \sum_{m_2=-n'}^{n'} D_{mm_1}^n(\alpha\beta\gamma) {}^1T_{m_1m_2n}^{ij} D_{m'm_2}^{n'*}(\alpha\beta\gamma),$$

где  $D_{m'm}^n(\alpha\beta\gamma)$  – D-функции Вигнера (Варшалович Д. и др., 1975),  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы Эйлера вращения системы координат ( $2 \rightarrow 1$ ).

В 1.3 приводятся основные соотношения симметрии Т-матрицы, что позволяют при определенном выборе системы координат значительно упростить расчеты Т-матрицы для некоторых форм частиц.

В параграфе 1.4 для описания рассеяния электромагнитного излучения частицей используются LP (linear polarization) и CP (circular polarization)-представления напряженности электрического поля, а также определяются амплитудная матрица рассеяния и матрица рассеяния, следуя работам (Kuščer I., and Ribarič M., 1959) и (Hovenier J., and van der Mee C., 1983).

Параметры Стокса падающей и рассеянной волн в CP-представлении определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{-2} &= E_{-1}E_{+1}^* = \frac{1}{2}(Q - iU), & I_{-0} &= E_{-1}E_{-1}^* = \frac{1}{2}(I + V), \\ I_{+0} &= E_{+1}E_{+1}^* = \frac{1}{2}(I - V), & I_2 &= E_{+1}E_{-1}^* = \frac{1}{2}(Q + iU), \\ I^C &= [I_{-2} \quad I_{-0} \quad I_{+0} \quad I_{+2}]^T, \end{aligned}$$

где  $E_{-1}, E_{+1}$  – компоненты вектора электрической напряженности в CP-представлении,  $I, Q, U, V$  – параметры Стокса в LP-представлении (Hovenier J., and van der Mee C., 1983).

Выбор параметров Стокса в CP-представлении отличается от традиционного используемого способа задания и обусловлен свойствами симметрии. В этом случае матрица Мюллера, описывающая линейное

преобразование вектора Стокса падающего излучения в вектор Стокса рассеянного излучения, в СР-представлении выражается через элементы амплитудной матрицы:

$$I_{p-\hat{p}}^s(\mathbf{n}_s) = \frac{1}{r^2} \sum_{q\hat{q}} C_{pq}(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_i) C_{\hat{p}\hat{q}}^*(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_i) I_{q-\hat{q}}^i(\mathbf{n}_i), \quad p, \hat{p}, q, \hat{q} = -1, +1,$$

где  $r$  – расстояние до точки наблюдения, знак нижнего индекса  $I_{p-\hat{p}}$  совпадает со знаком  $p$ ,  $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_s$  – направления падающего и рассеянного излучений,  $C_{pq}$  – элементы амплитудной матрицы рассеяния в СР-представлении имеют вид (Paramonov L., 1995):

$$C_{pq} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^n t_{nn'} A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i) d_{pm}^n(\theta_s) d_{qm'}^{n'}(\theta_i) T_{mnm'n'}^{(pq)},$$

$$T_{mnm'n'}^{(pq)} = T_{mnm'n'}^{11} + q T_{mnm'n'}^{12} + p T_{mnm'n'}^{21} + pq T_{mnm'n'}^{22}, \quad (1)$$

$$A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i) = (-1)^{m+m'} e^{i(m\varphi_s - m'\varphi_i)},$$

$$t_{nn'} = i^{n-n'-1} \sqrt{(2n'+1)(2n+1)}, \quad p, q = -1, 1,$$

где  $d_{mm'}^n(\theta)$  – функции Вигнера,  $(\theta_s, \varphi_s)$ ,  $(\theta_i, \varphi_i)$  – направления падающего и рассеянного излучений, соответственно,  $T_{mnm'n'}^{ij}$  – элементы T-матрицы.

Факторизация в выражениях (1) по параметрам падающего и рассеянного излучений в СР-представлении является основой для разработки эффективных аналитических методов, связанных с ориентационным усреднением и оценкой потоков рассеянного излучения.

**Во второй главе** рассматривается рассеяние света монодисперсным ансамблем частиц, обладающим симметрией вращения относительно направления падающего излучения.

В параграфе 2.1 вводятся лабораторная система координат ( $L$ ) таким образом, чтобы направление падающего излучения совпадало с положительным направлением оси  $Z$ , а также система координат ( $P$ ), связанная с частицей. Элементы амплитудной матрицы рассеяния одиночной частицы в лабораторной системе координат имеют вид:

$$C_{pq} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{mp}^n(\theta_s) e^{im\varphi_s} e^{i(q-m)\alpha} B_{mn}^{(pq)}(\beta, \gamma), \quad p, q = -1, +1, \quad (2)$$

$$B_{mn}^{(pq)}(\beta, \gamma) = \sum_{n'=1}^{\infty} t_{nn'} \sum_{m_1=-n}^n \sum_{m_2=-n'}^n T_{m_1 n m_2 n'}^{(pq)}(P) d_{m m_1}^n(\beta) d_{m' m_2}^{n'}(\beta) e^{i(m_2 - m_1)\gamma},$$



где  $T_{m_1 n m_2 n'}^{(pq)}(P)$  – линейная комбинация элементов Т-матрицы в системе координат частицы ( $P$ ),  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы Эйлера, которые описывают вращение системы координат ( $L \rightarrow P$ ) относительно подвижных осей  $Z, Y, Z$ .

В параграфе 2.2 рассматривается матрица рассеяния монодисперсного ансамбля независимых частиц с функцией плотности:

$$p(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{4\pi^2} p(\beta),$$

что соответствует вращательной симметрии рассеивающей среды относительно направления падающего излучения. В этом случае усредненная по ансамблю матрица рассеяния имеет вид:

$$\langle C_{pq} C_{\hat{p}\hat{q}}^* \rangle = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} p(\alpha\beta\gamma) C_{pq}(\alpha\beta\gamma) C_{\hat{p}\hat{q}}^*(\alpha\beta\gamma), \quad p, q, \hat{p}, \hat{q} = -1, 1.$$

Используя свойства ортогональности тригонометрических функций, а также (2), элементы матрицы рассеяния могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \langle C_{pq} C_{\hat{p}\hat{q}}^* \rangle &= \sum_{n, \hat{n}=1}^{\infty} \sum_{m=-\min(n, \hat{n}-q+\hat{q})}^{\min(n, \hat{n}+q-\hat{q})} d_{pm}^n(\theta_s) d_{\hat{p}\hat{m}}^{\hat{n}}(\theta_s) [(2n+1)(2\hat{n}+1)]^{1/2} D_{m\hat{m}\hat{n}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})}, \\ D_{m\hat{m}\hat{n}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})} &= \langle B_{mn}^{(pq)} B_{\hat{m}\hat{n}}^{(\hat{p}\hat{q})*} \rangle, \quad \hat{m} = m + \hat{q} - q, \\ B_{mn}^{(pq)}(\beta, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{n'} i^{n'-n} (2n'+1)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{m_1=-n}^n \sum_{m_2=-n'}^{n'} T_{m_1 n m_2 n'}^{(pq)}(P) d_{mm_1}^n(\beta) d_{qm_2}^{n'}(\beta) e^{i(m_2-m_1)\gamma}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\langle \rangle$  означают ориентационное усреднение по углам  $\beta, \gamma$ .

Для ансамблей частиц с функцией плотности по ориентациям вида  $p(\alpha\beta\gamma) = 1/4\pi^2 \delta(\cos\beta - \cos\beta_0)$  для элементов матрицы  $D_{m\hat{m}\hat{n}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})}$  ориентационное усреднение проводится аналитически.

Воспользовавшись формулой умножения для функций Вигнера и соотношениями для коэффициентов Клебша-Гордона, получим разложение элементов матрицы рассеяния в ряды по функциям Вигнера:

$$\langle C_{pq} C_{\hat{p}\hat{q}}^* \rangle = \sum_{n_1=\max(|p-\hat{p}|, |q-\hat{q}|)}^{\infty} g_{p-\hat{p}q-\hat{q}}^{n_1} d_{p-\hat{p}q-\hat{q}}^{n_1}(\theta_s), \quad (4)$$

$$g_{p-\hat{p}q-\hat{q}}^{n_1} = (2n_1 + 1) \sum_{\hat{n}=1}^{\infty} \sum_{n=\max(1,|\hat{n}-n_1|)}^{\hat{n}+n_1} \left( \frac{2\hat{n}+1}{2n+1} \right)^{1/2} C_{\hat{n}\hat{p}n_1 p-\hat{p}}^{np} \times \quad (5)$$

$$\times \sum_{m=\max(-n, -\hat{n}+q-\hat{q})}^{\min(n, \hat{n}+q-\hat{q})} D_{mnm+\hat{q}-q\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})} C_{\hat{n}m+\hat{q}-qn_1 q-\hat{q}}^{nm}$$

где  $\theta_s$  – угол рассеяния,  $C_{n_1 m_1 n_2 m_2}^{nm}$  – коэффициенты Клебша-Гордона (Варшалович Д. и др., 1975).

В 2.2.2-2.2.5 для монодисперсного ансамбля хаотически ориентированных частиц с функцией плотности:

$$p(\alpha\beta\gamma) = 1/8\pi^2$$

получены аналитические выражения элементов матрицы  $D_{mnm+\hat{q}-q\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})}$  и коэффициентов разложения (5):

- частицы без осевой симметрии (3D частицы) –

$$D_{m\hat{m}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})} = \sum_{n_1=|m-q|}^{\infty} (2n_1 + 1) \sum_{\Delta m=-n_1}^{n_1} B_{mn\Delta mn_1}^{(pq)} B_{\hat{m}\hat{n}\Delta mn_1}^{(\hat{p}\hat{q})*}, \quad \hat{m} = m + \hat{q} - q, \quad (6)$$

$$B_{mn\Delta mn_1}^{(pq)} = \sum_{n'=\max(1,|n-n_1|)}^{n+n_1} C_{nmn_1 q-m}^{n'q} A_{\Delta mn n' n_1}^{(pq)}$$

- осесимметричные частицы (2D частицы) –

$$D_{m\hat{m}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})} = \sum_{n_1=|m-q|}^{\infty} (2n_1 + 1) B_{mnn_1}^{(pq)} B_{\hat{m}\hat{n}n_1}^{(\hat{p}\hat{q})*}, \quad (7)$$

$$B_{mnn_1}^{(pq)} = \sum_{n'=\max(1,|n-n_1|)}^{n+n_1} C_{nmn_1 q-m}^{n'q} A_{0mn n' n_1}^{(pq)}$$

- сферические частицы (1D частицы) –

$$D_{m\hat{m}\hat{n}}^{(pq\hat{p}\hat{q})} = \delta_{mq} \delta_{\hat{m}\hat{q}} B_n^{(pq)} B_{\hat{n}}^{(\hat{p}\hat{q})*}, \quad (8)$$

$$B_n^{(pq)} = \frac{1}{2} (2n+1)^{1/2} (a_n + pq b_n),$$

где

$$A_{\Delta mn n' n_1}^{(pq)} = \frac{1}{2} i^{n'-n-1} \frac{1}{(2n'+1)^{1/2}} \sum_{m_1=-\min(n, n'+\Delta m)}^{\min(n, n'-\Delta m)} C_{nm_1 n_1 \Delta m}^{n' m_1 + \Delta m} T_{m_1 n m_1 + \Delta m n'}^{(pq)}(P),$$

$a_n, b_n$  – коэффициенты Ми (Bohren C., and Huffman D., 1983).

При численной реализации алгоритма для осесимметричных частиц используются свойства симметрии Т-матрицы:

$$T_{mnm'n'}^{(pq)} = \delta_{mm'} T_{mnm'n'}^{(pq)}, \quad T_{mnm'n'}^{(pq)} = T_{-mnm'n'}^{(-p-q)},$$

$$B_{mnm'n_1}^{(pq)} = B_{-mnm'n_1}^{(-p-q)}, \quad A_{nm'n_1}^{(pq)} = (-1)^{n+n'+n_1} A_{nm'n_1}^{(-p-q)},$$

$$A_{nm'n_1}^{(pq)} = \frac{i^{n'-n}}{(2n'+1)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{2} T^1 C_{n'0n_10}^{n0} + \sum_{m_1=1}^{\min(n,n')} C_{n'm_1n_10}^{nm_1} T^2 \right], n+n'+n_1 - \text{четное},$$

$$A_{nm'n_1}^{(pq)} = \frac{i^{n'-n}}{(2n'+1)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{2} T^2 C_{n'0n_10}^{n0} + \sum_{m_1=1}^{\min(n,n')} C_{n'm_1n_10}^{nm_1} T^1 \right], n+n'+n_1 - \text{нечетное},$$

$$T^1 = (T_{m_1nm_1n'}^{11} + pqT_{m_1nm_1n'}^{22}), \quad T^2 = (qT_{m_1nm_1n'}^{12} + pT_{m_1nm_1n'}^{21}), \quad p, q = -1, +1.$$

Полученное разложение (4) заменяет трудоемкую процедуру численного усреднения матрицы рассеяния по ориентациям частиц ансамбля процедурой суммирования рядов (4)–(8). При известных коэффициентах разложения элементы матрицы рассеяния могут быть оценены согласно (4) при минимальных вычислительных затратах для произвольного угла рассеяния.

Коэффициенты (4) являются компактным и удобным способом хранения информации об оптических характеристиках ансамбля частиц и вычисленные однажды могут многократно использоваться при решении задач однократного и многократного рассеяния.

Следует отметить, что аналогичные формулы коэффициентов ряда (3) были получены для сферических частиц (Domke H., 1975, Бугаенко О., 1976) и хаотически ориентированных осесимметричных частиц (Mishchenko M., 1991).

В параграфе 2.3 с использованием метода Т-матриц получены формулы для потока рассеянного частицей излучения в произвольном коническом телесном угле с осью в лабораторной системе координат  $(\mathcal{Q}, \phi)$  и линейным углом конического телесного угла  $2\mathcal{Q}_0$ :

$$\Phi = \sum_{p,q,\hat{q}=-1,+1} \langle C_{pq} C_{p\hat{q}}^* \rangle I_{q-\hat{q}}^i,$$

$$\langle C_{pq} C_{p\hat{q}}^* \rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{n,\hat{n}=1}^{\infty} \sum_{m=-\min(n,\hat{n})}^{\min(n,\hat{n})} B_{mn}^{(pq)}(\mathcal{Q}) B_{m\hat{n}}^{(p\hat{q})^*}(\mathcal{Q}) \times$$

$$\times \sum_{n_1=|n-\hat{n}|}^{n+\hat{n}} (-1)^{p+m} C_{np\hat{n}-p}^{n_1 0} C_{nm\hat{n}-m}^{n_1 0} \langle d_{00}^{n_1}(\theta_s) \rangle,$$

$$\langle d_{00}^n(\theta_s) \rangle = \int_0^{\vartheta_0} d_{00}^n(\theta_s) \sin \theta_s d\theta_s = \begin{cases} 1 - \cos \vartheta_0, & n = 0, \\ -\frac{\sin \vartheta_0}{\sqrt{n(n+1)}} d_{01}^n(\vartheta_0), & n > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$B_{mn}^{(pq)}(\vartheta) = \sum_{n'=1}^{\infty} t_{nn'} A_{mnn'}^{(pq)}(\vartheta), \quad A_{mnn'}^{(pq)}(\vartheta) = \sum_{m'=-n'}^{n'} d_{qm'}^{n'}(\vartheta) T_{mnm'n'}^{(pq)}(S),$$

где  $T_{mnm'n'}^{(pq)}(S)$  – линейная комбинация элементов Т-матрицы в системе координат приемника ( $S$ ),  $I_{q-\hat{q}}^i$  – элементы вектора Стокса падающего излучения в СР-представлении относительно плоскости  $\varphi = \phi$  лабораторной системы координат.

В параграфе 2.4 излагается методика расчета оптических характеристик, особенности численной реализации.

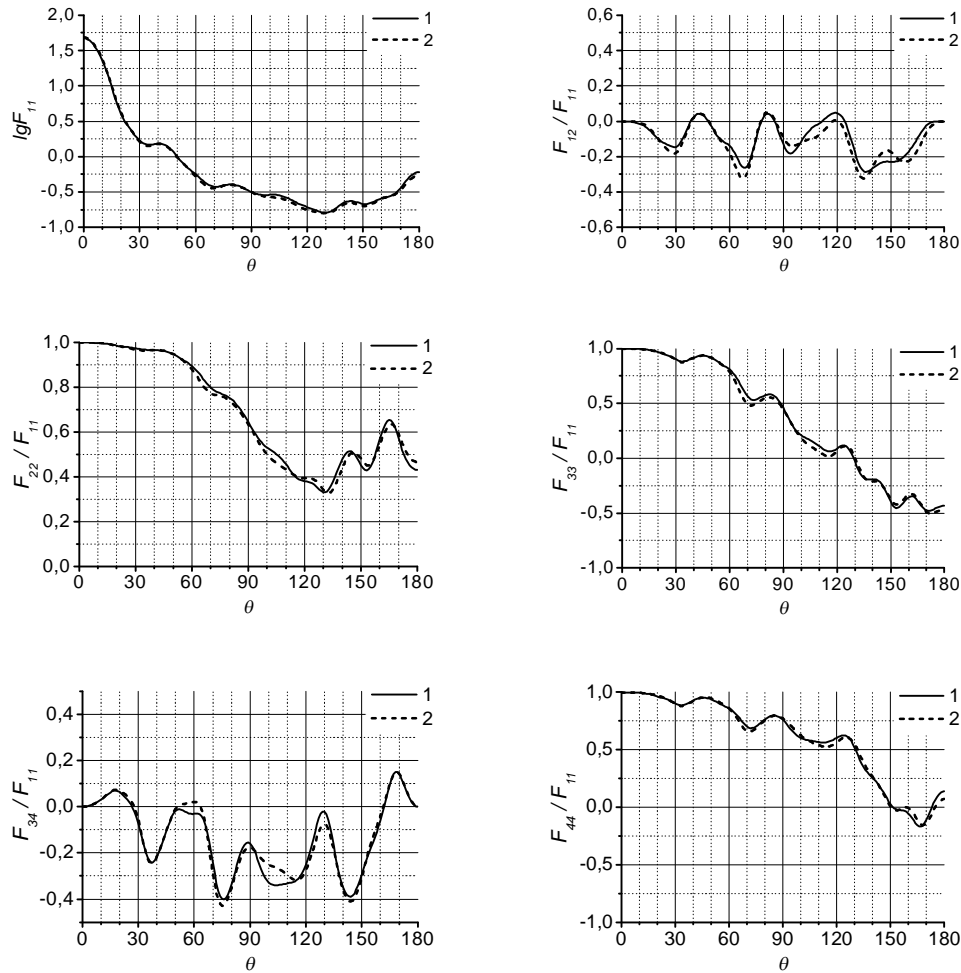


Рис. 1. Угловая зависимость элементов матрицы рассеяния хаотически ориентированных вытянутых гексагональных (1) и круговых (2) цилиндров,  $\rho = kL = 20$ ,  $k$  – волновое число, относительный показатель преломления  $m_r = 1.34$ .

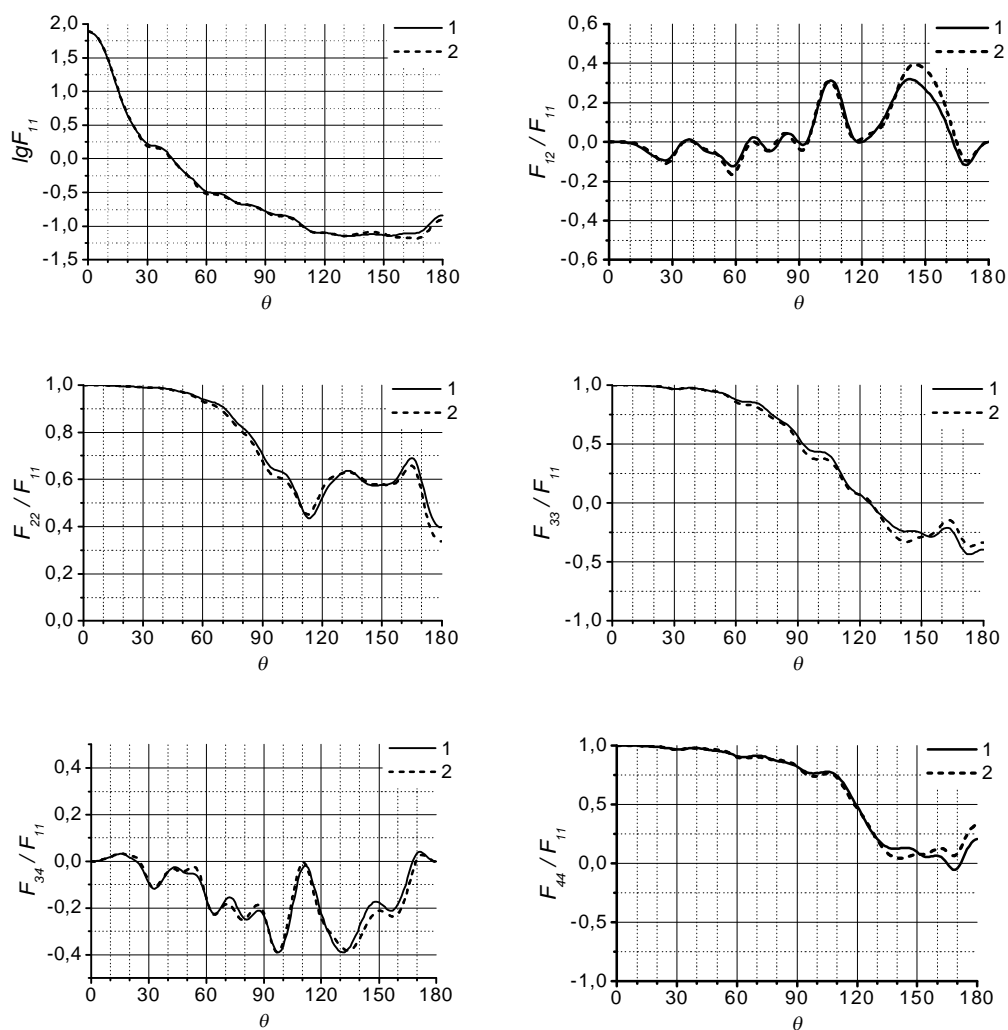


Рис. 2. То же, что на рисунке 1,  $\rho = 24$ ,  $m_r = 1.5$ .

В параграфе 2.5 приводятся результаты расчетов с использованием разработанного комплекса программ. Корректность полученных формул подтверждается совпадением шести значащих цифр результатов расчетов коэффициентов разложения (4) с известными результатами (Mishchenko M., 1991) для сфероидальных частиц, а также совпадением результатов расчетов оптических характеристик для хаотически ориентированных суперэллипсоидов (Wriedt T., 2005) и гексагональных ледяных цилиндров (Baran A. et al., 2001).

На рисунках 1–2 приводятся результаты расчетов угловой зависимости элементов матрицы рассеяния для хаотически ориентированных вытянутых гексагональных и круговых цилиндров равного объема с отношением высоты цилиндра ( $L$ ) к диаметру окружности ( $d$ ), описанной вокруг основания –  $\varepsilon = L/d = 2$ . Отмеченные ансамбли частиц (рис. 1–2) имеют близкие значения элементов матрицы рассеяния, что позволяет в ряде случаев оценивать

оптические характеристики гексагональных цилиндров с помощью круговых цилиндров.

Проведен сравнительный анализ эффективности по времени численной реализации разработанного аналитического алгоритма с результатами работы (Baran A. et al., 2001), где расчеты были выполнены для хаотически ориентированных гексагональных цилиндров с использованием метода Т-матриц и FDTD (finite-difference time-domain) метода (табл. 1).

Время расчета (сек.) оптических характеристик хаотически ориентированных гексагональных цилиндров с относительным показателем преломления

$$m_r = 1,30778 + i 0,166667 \cdot 10^{-7} \text{ и } \varepsilon = 1.$$

Таблица 1.

$\rho = kL$	1	2	3
5	1,25	91,45	3960,0
10	3,66	691,31	48600,0
15	26,96	6978,91	180000,0
20	91,57	20241,95	433800,0

1 – метод Т-матриц с использованием аналитического алгоритма усреднения, расчеты выполнены на Intel Celeron Mobile 1.3 GHz;

2 – метод Т-матриц (Baran A., et al., 2001), расчеты выполнены на DEC VAX Alpha 600-MHz;

3 – FDTD метод (Baran A., et al., 2001), расчеты выполнены на SGI Octane 300-MHz.

**В третьей главе** проводится оптическая классификация ансамблей несферических частиц, в том числе ориентированных, по микроструктурным параметрам. Определены классы эквивалентности, в пределах которых элементы матрицы рассеяния имеют близкие значения.

В параграфе 3.1 формулируется гипотеза:

***Изотропные ансамбли частиц одной формы с равными тремя моментами распределения –  $\langle S \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\langle V^2 \rangle$  (средними по ансамблю площадью поверхности, объемом и квадратом объема) имеют близкие значения элементов матрицы рассеяния.***

В соответствии с гипотезой все множество ансамблей разбивается на классы эквивалентности, определяемые равенством микроструктурных параметров.

Основанием для формулировки рабочей гипотезы является доказанная в приближении Релея-Ганса-Дебая (РГД) оптическая эквивалентность пяти различных ансамблей оптически «мягких» частиц с равными тремя моментами распределения  $\langle S \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\langle V^2 \rangle$  (Парамонов Л., 1995, 2003):

1) хаотически ориентированные эллипсоидальные частицы с полуосями  $a, b, c$ ;

2) три различных (за счет перестановок  $a, b, c$ ) ансамбля полидисперсных хаотически ориентированных сфероидальных частиц с функцией плотности:

$$\rho(\hat{a}) = \frac{2a^2b^2}{\pi} \frac{\hat{a}^{-3}}{\sqrt{(b^2 - \hat{a}^2)(\hat{a}^2 - a^2)}}, \quad (10)$$

где  $\hat{a}, \hat{a}, c$  – размер полуосей сфероидальной частицы;

3) полидисперсные сферические частицы с весовой функцией, инвариантной относительно перестановок  $a, b, c$ :

$$\rho_{eq}(r) = \Theta(c-r)\Theta(r-a) \frac{2a^2b^2c^2}{\pi r^5} \int_a^{\min(r,b)} d\hat{a} \frac{\hat{a}}{\sqrt{-(b^2 - \hat{a}^2)(a^2 - \hat{a}^2)(c^2 - \hat{a}^2)(r^2 - \hat{a}^2)}}, \quad (11)$$

здесь  $\Theta(x)$  – функция Хевисайда,  $a < b < c$ .

Отметим, что в диссертационной работе (Абдулкин В., 2004) проведена оптическая классификация изотропных ансамблей эллипсоидальных частиц, где в качестве критерия были использованы коэффициенты рассеяния, поглощения и ослабления ансамблей частиц.

В параграфах 3.2–3.3 исследуется область принятия рабочей гипотезы, формулируются необходимые условия проведения оптической классификации. В качестве критерия используются поляризационные характеристики – элементы матрицы рассеяния.

Необходимым условием оптической классификации является свойства симметрии матрицы рассеяния: для хаотически ориентированных несферических частиц, имеющих плоскость симметрии, матрица рассеяния имеет 6 независимых элементов, для сферических частиц – 4.

Для оптически «мягких»  $|m_r - 1| \ll 1$  хаотически ориентированных эллипсоидальных частиц незначительное различие элементов матрицы рассеяния –  $F_{11}$  и  $F_{22}$  уменьшает число независимых элементов матрицы рассеяния до четырех, как и у сферических частиц, что является необходимым условием отнесения к одному классу эквивалентности изотропных ансамблей эллипсоидальных, сфероидальных и сферических частиц.

На рисунке 3 представлена угловая зависимость элементов матрицы рассеяния для шести ансамблей с равными моментами распределения  $\langle S \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\langle V^2 \rangle$ : 1) хаотически ориентированных эллипсоидальных частиц с соотношением полуосей 1:2:3,  $\rho = kc = 15$ ,  $m_r = 1.05$ , 2) – 4) полидисперсных хаотически ориентированных вытянутых, вытянутых и сжатых, сжатых сфероидальных частиц соответственно с распределением (10), 5) – 6) полидисперсных ансамблей сферических частиц с распределением (11) и степенным распределением типа Юнге ( $\nu = 5$ ) соответственно.

Для отмеченных ансамблей частиц (рис. 3) индикатрисы рассеяния практически совпадают, в то же время дифференциация по форме частиц возможна с помощью элемента  $F_{43}$ , как наиболее чувствительного к изменению формы биологических клеток и их внутренней структуры (Bickel W., 1973).

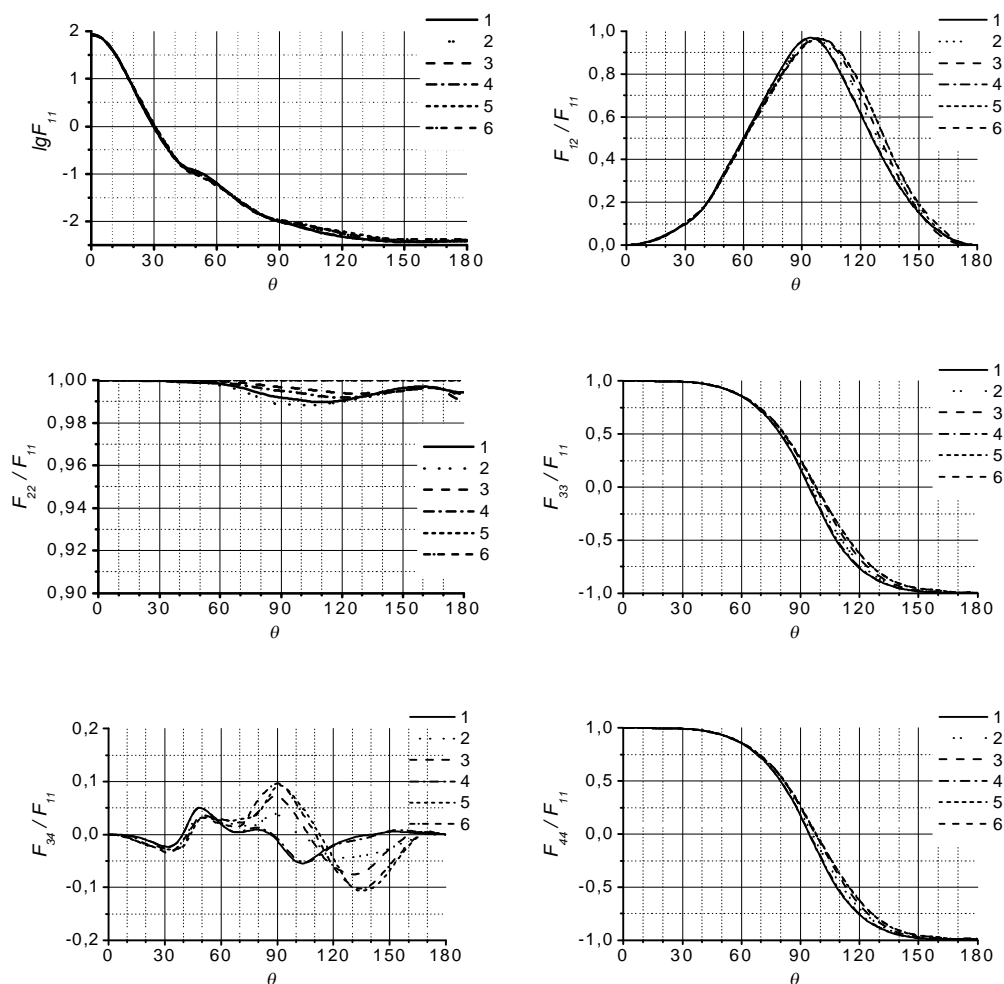


Рис. 3. Угловая зависимость элементов матрицы рассеяния эквивалентных ансамблей (см. пояснения в тексте).



С увеличением показателя преломления (ледяные кристаллы, аэрозоли минерального происхождения) свойства симметрии матрицы рассеяния не позволяют отнести к одному классу эквивалентности ансамбли частиц сферической и несферической форм, необходимо добавить условие – форма частиц в пределах класса эквивалентности одинакова.

В 3.3.3 приводится угловая зависимость элементов матрицы рассеяния полидисперсных ансамблей хаотически ориентированных а) цилиндрических, б) сфероидальных, в) «чебышевских» частиц с различной функцией плотности распределения по размерам, принадлежащих одному классу эквивалентности. Показано, что в пределах класса эквивалентности элементы матрицы рассеяния имеют близкие значения.

Также показано, что оптическая классификация возможна и для ансамблей ориентированных частиц, если отношение эквивалентности дополнить условием – ансамбли частиц одинаковой формы имеют одинаковую ориентационную структуру.

Следует отметить, что подобная классификация была проведена для сферических частиц (Hansen J., and Travis L., 1974) и хаотически ориентированных сфероидальных частиц (Mishchenko M., 1994), где отношение эквивалентности задается равенством параметров  $\langle S \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\langle S^2 \rangle$ .

Оптическая классификация ансамблей несферических частиц по микроструктурным параметрам позволяет свести решение ряда обратных задач в области принятия гипотезы к решению на классах эквивалентности, а оптические характеристики любого представителя класса эквивалентности использовать как оценку оптических характеристик класса в целом.

**В четвертой главе** рассматривается задача определения параметров ориентационной структуры осесимметричных частиц по данным обратного рассеяния.

Для горизонтально ориентированных монодисперсных осесимметричных частиц, используя свойства симметрии матрицы обратного рассеяния, получены оценки параметров однозначно определяющих вклад ориентационной структуры в матрицу обратного рассеяния.

Предлагается алгоритм оценки параметров трехмерной ориентационной структуры ансамбля частиц. Ориентационная структура ансамбля частиц задается ориентационным эллипсоидом – функция плотности ориентационного распределения прямо пропорциональна длине радиуса вектора с концом на поверхности эллипсоида, что может соответствовать действию двух ортогонально направленных ориентирующих факторов.

В параграфе 4.1 вводится система координат, связанная с направлением падающего излучения ( $L_{inc}$ ), приводятся расчетные формулы элементов амплитудной матрицы обратного рассеяния одиночной частицы в терминах элементов Т-матриц:

$$C_{pq}(\vartheta\beta\alpha) = \frac{i}{2} \sum_{n,n'=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{m_3=-\min(n,n')}^{\min(n,n')} T_{m_3nn'}^{(pq)}(P) \cdot B_{n'm_3}^{(q)}(\vartheta\beta\alpha) \cdot B_{nm_3}^{(-p)*}(\vartheta\beta\alpha),$$

$$B_{nm}^{(p)}(\vartheta\beta\alpha) = i^n (2n+1)^{1/2} \sum_{m_1=-n}^n d_{m_1p}^n(\vartheta) d_{m_1m}^n(\beta) e^{im_1\alpha}, \quad p, q = -1, +1,$$

где  $\alpha, \beta, \vartheta$  – углы Эйлера, определяющие вращение системы координат ( $L \rightarrow P$ ),  $\vartheta$  – угол между осью  $Z$  лабораторной системы координат и направлением падающего излучения (*угол наклонного падения*). Плоскостью рассеяния является плоскость, содержащая ось  $Z$  лабораторной системы координат и направление падающего излучения.

Для ансамбля частиц с функцией плотности распределения по ориентациям  $p = p(\alpha, \beta)$  используется численное усреднение по ориентациям:

$$\langle C_{pq} C_{\hat{p}\hat{q}}^* \rangle = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta d\beta p(\alpha\beta) C_{pq}(\vartheta\beta\alpha) C_{\hat{p}\hat{q}}^*(\vartheta\beta\alpha), \quad p, q, \hat{p}, \hat{q} = -1, 1.$$

При численной реализации используются свойства симметрии:

$$B_{mn}^{(p)}(\alpha\beta\vartheta) = (-1)^{n+m+p} B_{-mn}^{(-p)*}(\alpha\beta\vartheta),$$

$$B_{mn}^{(p)}(2\pi - \alpha \beta \vartheta) = (-1)^n B_{mn}^{(p)*}(\alpha\beta\vartheta).$$

В параграфе 4.2 рассматривается обратное рассеяние монодисперсным ансамблем осесимметричных частиц с функцией плотности по ориентациям вида  $p(\alpha\beta\gamma) = \delta\left(\cos\beta - \cos\frac{\pi}{2}\right)p(\alpha)$  (горизонтально ориентированные частицы).

В 4.2.1 показано, что при перпендикулярном падении ( $\vartheta=0$ ) влияние ориентационной структуры монодисперсных горизонтально ориентированных осесимметричных частиц на обратное рассеяние однозначно определяется параметрами ориентационной структуры –  $\langle \cos 2\alpha \rangle$ ,  $\langle \cos 4\alpha \rangle$  ( $\langle \rangle$  – ориентационное усреднение с функцией плотности  $p(\alpha)$ ). Используя свойства симметрии матрицы обратного рассеяния и теорему обратного рассеяния (van de Hulst Н., 1957), получены оценки параметров ориентационной структуры по данным измеренной матрицы обратного рассеяния:

$$\langle \cos 2\alpha \rangle^2 = \frac{1}{\cos^2 2\vartheta} \frac{\langle F_{12} \rangle^2 + \langle F_{34} \rangle^2}{\langle F_{11} \rangle^2 - \langle F_{44} \rangle^2}, \quad (12)$$

$$\langle \cos 4\alpha \rangle = \frac{1}{\cos 4\vartheta} \frac{\langle F_{22} \rangle + \langle F_{33} \rangle}{\langle F_{11} \rangle + \langle F_{44} \rangle}. \quad (13)$$

Параметрами (12) – (13) исчерпывается информация, которую можно получить об ориентационной функции плотности распределения по данным обратного рассеяния. В том случае, когда функция является двухпараметрической, она однозначно определяется по найденным (измеренным) параметрам. Для однопараметрической функции один из параметров может служить критерием адекватности выбора вида функции  $p(\alpha)$ . Приводится связь полученных формул с ранее известными результатами (Лопатин В. и др., 1988; Рахимов Р., Ромашов Д., 1993; Кауль Б., 2003).

В 4.2.2 показано, что при наклонном падении ( $\vartheta > 0$ ) начинают играть более высокие моменты ориентационной структуры ансамбля частиц и зависимость матрицы рассеяния одиночной частицы от полярного угла, что делает задачу определения микроструктуры ансамбля многопараметрической. В этом случае при оценке ориентационной структуры ансамбля по формулам (12) – (13) (или их аналогам) необходимо учитывать угол наклонного падения, иначе это приводит к завышению степени ориентации вдоль направления, перпендикулярного направлению падающего излучения (рис. 4).

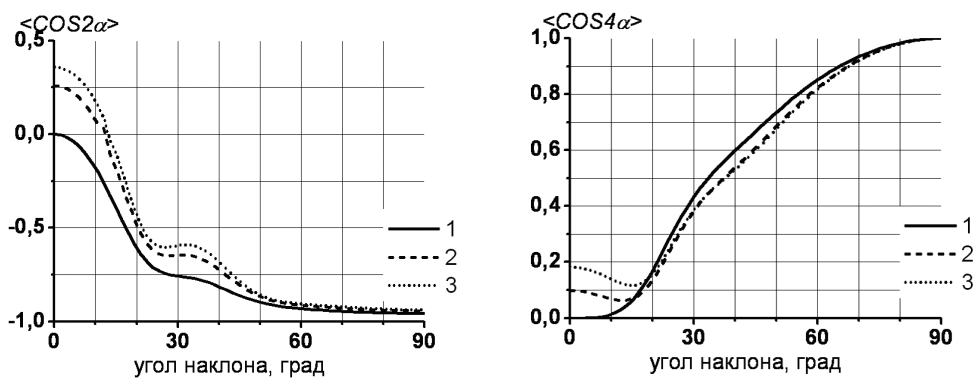


Рис. 4. Зависимость параметров (12) – (13) от угла наклонного падения  $\vartheta$  для вытянутых сфероидальных частиц с  $m_r = 1.5 + i0.005$ ,  $\rho_{\max} = 5$ , соотношением полюсей  $\varepsilon = 5$  и ориентационной структурой вида

$$p(\alpha\beta) \propto \delta(\cos \beta - \cos \frac{\pi}{2}) / \sqrt{1 - (e^2 - 1) \cos^2 \alpha}, \quad 1) e=1; 2) e=1/3; 3) e=1/5.$$

В параграфе 4.3 рассматривается трехмерный случай ориентационной структуры ансамбля, которая зависит от полярного и от азимутального углов.

Рассматривается монодисперсный ансамбль частиц известной формы, размера и показателя преломления. Ориентационная структура ансамбля отождествляется с эллипсоидом, где значения функции плотности  $p(\alpha\beta\gamma)$  прямо пропорциональны длине радиуса вектора с концом на поверхности эллипсоида:

$$p(\alpha\beta\gamma) \propto \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + a^2c^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha + a^2b^2 \cos^2 \beta}}$$

здесь  $a, b, c$  – длины полуосей ориентационного эллипсоида.

Ориентационный эллипсоид определяются двумя параметрами  $e_1 = b/a$ ,  $e_2 = c/a$ , характеризующими горизонтальный и вертикальный ориентирующие факторы.

В 4.3.1 показано, что параметр  $e_1$  может быть оценен, следуя методике определения параметров ориентационной структуры горизонтально ориентированных частиц для  $\vartheta = 0$ . В то же время измеренные (рассчитанные) величины (12) – (13) практически не зависят от  $e_2$ .

В 4.3.2 показано, что приращение величин (12) – (13) при изменении угла наклонного падения сильно зависит от параметра  $e_2$  и в то же время практически не зависит от  $e_1$ .

Эти два факта могут быть использованы для оценки параметров ориентационного эллипсоида по одной из величин (12) – (13), измеренных при различных углах наклонного падения. Значение же другой величины может быть использовано для оценки адекватности применения эллипсоидальной ориентационной модели.

В ряде случаев для оценки параметров  $e_1$ ,  $e_2$  удобнее пользоваться соответствующими таблицами. Для этого вводятся новые параметры –  $R_1 = \langle \cos 2\alpha \rangle_{0^\circ}$ ,  $R_2 = \langle \cos 2\alpha \rangle_{30^\circ} - \langle \cos 2\alpha \rangle_{0^\circ}$ , где  $\langle \cos 2\alpha \rangle_\vartheta$  – параметр (12), рассчитанный по матрице обратного рассеяния при угле наклонного падения  $\vartheta$ .

Зависимость параметров  $e_1$ ,  $e_2$  от  $R_1$ ,  $R_2$  для вытянутых сфероидальных частиц с  $\rho_{\max} = 15$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $m_r = 1.313$ .

Таблица 2.

$R_2 \backslash R_1$		$e_1$						$R_2 \backslash R_1$		$e_2$					
		0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20			0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20
0,00		1,00	1,22	1,50	1,86	2,35	3,07	0,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,02		1,00	1,23	1,53	1,94	2,52	3,41	0,02		0,70	0,71	0,71	0,71	0,71	0,72
0,04		1,00	1,25	1,57	2,04	2,73	3,96	0,04		0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,54
0,06		1,00	1,26	1,63	2,16	3,06	4,80	0,06		0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43
0,08		1,00	1,29	1,69	2,34	3,50	5,00	0,08		0,32	0,33	0,34	0,34	0,34	0,36
0,10		1,00	1,31	1,78	2,59	4,22	5,00	0,10		0,26	0,26	0,27	0,27	0,28	0,30

Следует отметить, что калиброванные (заданного размера, формы) частицы подобно методам электростатики для определения силы действия электростатического поля могут служить «пробным зарядом» для оценки влияния и силы действия ориентирующих факторов – геофизических полей по данным обратного рассеяния.

**В Приложении** приводятся расчетные формулы и рассматриваются свойства функций Вигнера, сферических функций Бесселя, Ханкеля и коэффициентов Клебша-Гордона.

**В Заключение** приведены основные результаты работы, которые можно сформулировать следующим образом.

1. Получено аналитическое разложение элементов матрицы рассеяния хаотически ориентированных несферических 3D частиц в ряды по обобщенным сферическим функциям (в терминах элементов T-матрицы), исключающее трудоемкую процедуру численного интегрирования по трем углам Эйлера. Коэффициенты являются компактным и удобным способом хранения информации об оптических характеристиках частиц и могут быть многократно использованы в задачах однократного и многократного рассеяния.

2. На основе аналитических алгоритмов ориентационного усреднения разработан комплекс эффективных программ с использованием метода T-матриц для расчета оптических характеристик ансамблей 3D частиц – угловой зависимости элементов матрицы рассеяния, коэффициентов ослабления, рассеяния, поглощения, потоков рассеянного излучения. Для гексагональных цилиндров разработанный алгоритм по времени численной реализации на два порядка эффективнее существующих аналогов.

3. Определены необходимые условия и проведена оптическая классификация ансамблей несферических частиц, в том числе ориентированных, позволяющая свести решение ряда обратных задач к решению на классах эквивалентности.

4. Разработана и численно реализована методика оценки параметров ориентационной структуры частиц по данным обратного рассеяния, позволяющая оценивать влияние ориентирующих частицы факторов – геофизических полей.

#### СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Шмидт В.А.* Алгоритм расчета элементов матрицы рассеяния хаотически ориентированных осесимметричных частиц // Информатика и информационные технологии: тез. докл. межвузовской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / Под ред. Е.А. Вейсова, Ю.А.Шитова. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003. – С. 36-40.

2. *Paramonov L.E., Schmidt V.A.* Scattering matrix of randomly oriented ellipsoidal particles // X Joint International Symposium “Atmospheric and Ocean Optics. Atmospheric Physics”. – Tomsk: Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 2003. – P. 100-101.

3. *Paramonov L.E., Schmidt V.A.* T-matrix approach and angular momentum theory in light-scattering problems. Light scattering into solid angles // X Joint International Symposium “Atmospheric and Ocean Optics. Atmospheric Physics”. – Tomsk: Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 2003. – P. 103-104.

4. *Парамонов Л.Е., Шмидт В.А.* К вопросу интерпретации спектров ослабления и поглощения изотропных ансамблей несферических частиц в условиях однократного рассеяния // Материалы Всероссийской научно-технической конференции “Ультрадисперсные порошки, наноструктуры, материалы: получение, свойства, применения”. – Красноярск: КГТУ, 2003. – С. 53.

5. *Шмидт В.А.* Поляризационные характеристики хаотически ориентированных осесимметрических частиц // Тезисы докладов X Рабочей группы “Аэрозоли Сибири”. – Томск: Институт оптики атмосферы, 2003. – С. 8.

6. *Шмидт В.А., Парамонов Л.Е.* Фурье разложение элементов матрицы рассеяния хаотически ориентированных несферических частиц // Вопросы математического анализа. Вып. 7. – Красноярск: КГТУ, 2003. – С. 154-164.

7. *Пармонов Л.Е., Шмидт В.А.* Оптическая классификация изотропных ансамблей «мягких» эллипсоидальных частиц // Оптика атмосферы и океана. – 2004. – Т. 17. – № 5-6. – С. 521-525.

8. *Пармонов Л.Е., Хромечек Е.Б., Абдулкин В.В., Шмидт В.А.* К решению обратных задач на классах эквивалентности // Оптика атмосферы и океана. – 2004. – Т. 17. – № 5-6. – С. 508-512.

9. *Paramonov L.E., Schmidt V.A.* Linear backscattering depolarization ratio for nonspherical particles // XI Joint International Symposium “Atmospheric and Ocean Optics. Atmospheric Physics”. – Tomsk: Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 2004. – P. 112.

10. *Пармонов Л.Е., Шмидт В.А.* К вопросу математического обеспечения нефелометров и спектрофотометров // Математическое моделирование и численные методы. Вып. 37 – Красноярск: КГТУ, 2005. – С. 159-168.

11. *Шмидт В.А.* Коэффициенты разложения элементов матрицы рассеяния хаотически ориентированных частиц, не обладающих осевой симметрией // Электронный журнал «Исследовано в России», 2005. – Т. 8. – С. 1005-1009. <http://zhurnal.gpi.ru/articles/2005/097.pdf>

12. *Пармонов Л.Е., Шмидт В.А., Черкасова Г.В.* Аналитические алгоритмы усреднения в задачах дифракции света несферическими частицами // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 10. – Спец. выпуск. – С. 100-108.

13. *Paramonov L.E., Schmidt V.A.* Estimation of the orientation structure of axially symmetric particles from backscattering data // 9-th International Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements, and Applications. Book of abstracts. – St. Petersburg, 2006. – P. 215-217.

ЛП № 04943 от 02.03.99.  
Подписано в печать 17.11.2006.  
Формат бумаги 60x80x1/16.  
Усл. печ. л. 1,1. Тираж 100 экз. Заказ №23.  
Отпечатано на ризографе ИВМ СО РАН.  
660036, Красноярск, Академгородок.