РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Б.М. БАГАЕВ
Е.Д. КАРЕПОВА
В.В. ШАЙДУРОВ

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В ПЯТИ ЧАСТЯХ

Часть 2

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор *В.П. Ильин*

НОВОСИБИРСК
"НАУКА"
2001

УДК 517.9
ББК 22.19
Б14

Багаев Б.М., Карепова Е.Д., Шайдуров В.В. Сеточные методы решения задач с пограничным слоем: В 5 ч. – Новосибирск: Наука, 2001. – Ч. 2. – 224 с.
ISBN 5 – 02 – 031678 – 4.
ISBN 5 – 02 – 031554 – 2.

В монографии на примере сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка задач типа конвекции-диффузии рассмотрено несколько численных методов, специально ориентированных на разрешение пограничного слоя и обладающих такой же точностью и устойчивостью, как в задачах с гладкими решениями, без пограничного слоя.

Предложено несколько подходов для преодоления плохой аппроксимации или неустойчивости дискретного аналога: схемы экспоненциальной подгонки, сгущающиеся (адаптирующиеся) сетки, введение искусственной вязкости и др.

Изложенный материал представляет собой простую алгоритмическую и теоретическую иллюстрации к последующим частям, где эти же подходы будут использованы для более сложных задач.

Книга адресована специалистам по вычислительной и прикладной математике, студентам, аспирантам.

Табл. 5. Ил. 7. Библиогр.: 178 назв.

Рецензенты
доктор физико-математических наук, профессор *В.М. Белолипецкий*
доктор физико-математических наук, профессор *Е.А. Новиков*
доктор технических наук, профессор *В.А. Охорзин*

Утверждено к печати Ученым советом
Института вычислительного моделирования СО РАН

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Сибирского отделения Российской академии наук,
Красноярского краевого научного фонда

ТП–00–II–№ 117

ISBN 5 – 02 – 031678 – 4
ISBN 5 – 02 – 031554 – 2

Предисловие

Настоящая монография посвящена численным методам решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, часто называемых *сингулярно возмущенными уравнениями.* Они обладают большой прикладной значимостью как элементы математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химии, биологии, технике. Некоторые сведения по асимптотическому анализу влияния малых параметров восходят к Л. Эйлеру, а предварительные попытки прямого анализа таких уравнений начались уже в XIX в. Однако первый импульс для начала современного нарастающего исследовательского и прикладного интереса дали работы А.Н. Тихонова в 1940-х годах.

Систематическое изучение *численных* методов для сингулярно возмущенных задач началось несколько позднее, в конце 1960-х годов. Использование *стандартных* методов конечных разностей и позднее конечных элементов для решения таких задач оказалось малоэффективным или невозможным ввиду плохой точности или неустойчивости дискретных аналогов. Для преодоления этих неприятных эффектов в литературе предложено множество подходов: схемы экспоненциальной подгонки, сгущающиеся сетки, введение искусственной вязкости, специальные конечные элементы и многое другое.

Эта книга является второй частью большой монографии, в которой на примере сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для задач типа конвекции-диффузии проанализировано несколько численных методов, специально ориентированных на разрешение пограничного слоя и обладающих точностью и устойчивостью, сопоставимыми с регулярными задачами без пограничного слоя. Из большого числа методов отобраны те, которые допускают конструктивные обобщения на многомерные задачи эллиптического и параболического типов.

Изложенные методы тщательно обоснованы, поэтому материал книги представляет собой простую алгоритмическую и теоретическую иллюстрации к последующим частям монографии, где эти же подходы будут использованы для более сложных задач.

В этой, второй, части исследуемые объекты – обыкновенные дифференциальные уравнения – дают возможность детально теоретически проанализировать рассматриваемые методы. В последующих частях основной акцент делается на описание основных разновидностей и свойств используемых конструкций, а также на сопоставление их эффективности в разных типах задач.

В третьей и четвертой частях предполагается изложение численных методов для эллиптических сингулярно возмущенных уравнений второго порядка без конвективных слагаемых и с ними соответственно.

В пятую часть будут вынесены численные методы решения параболических сингулярно возмущенных уравнений.

Материал монографии вошел в курс лекций, которые читаются на протяжении нескольких лет в Сибирской аэрокосмической академии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярском государственном техническом и Красноярском государственном университетах.

Авторы надеются, что книга будет полезна для специалистов по теории сингулярных возмущений и ее приложениям, а также для аспирантов и студентов, обучающихся по вычислительной и прикладной математике.

Написание этой и последующих частей монографии стало возможным благодаря многолетней финансовой и организационной поддержке нескольких учреждений: математических факультетов Университета Отто-фон-Герике в Магдебурге и Технического университета в Дрездене, технического факультета Университета Эрлангена—Нюрнберга, Фонда Фольксвагена (VWStiftung), Российского фонда фундаментальных исследований. Авторы благодарны им за предоставленные возможности участвовать в международных конференциях, работать в прекрасных библиотеках в Германии и обсуждать затрагиваемые вопросы с коллегами из многих стран. Авторы признательны также многим ученым, беседы с которыми способствовали улучшению материала: В.Б. Андрееву, И.П. Боглаеву, Р. Вулановичу, В.П. Ильину, В.Д. Лисейкину, Э. О'Риордану, Х.-Г. Роосу, У. Рюде, М. Стайнсу, Г. Стояну, Л. Тобиске, Г.И. Шишкину и др. Авторы благодарны А.И. Соловьевой за подготовку рукописи к изданию. Особая признательность выражается Красноярскому краевому научному фонду за поддержку самой публикации этой книги.

Б. Багаев, Е. Карепова, В. Шайдуров

Введение

Описание многих реальных процессов в физике, химии, технике с помощью математических моделей содержит различные параметры. Иногда среди них имеются малые параметры, для которых естественно проследить влияние на описание процесса с целью упрощения модели, когда эти параметры полагаются равными нулю. В терминах дифференциальных уравнений малые параметры часто появляются в виде множителей перед некоторыми слагаемыми, и вопрос о влиянии сводится к изучению зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметров.

Зависимость от параметра, скажем $\varepsilon \geq 0$, можно разделить на регулярное и сингулярное возмущения. Первое характеризуется малым изменением решения при варьировании параметра $\varepsilon \geq 0$ в малой окрестности нуля. Второй тип возмущения вызывает существенные изменения решения несмотря на малые вариации ε. В этой монографии мы остановимся на сингулярно возмущенных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных. Существенная разница между решением u_ε исходной (возмущенной) задачи с такими уравнениями и решением v вырожденной (невозмущенной) задачи обусловлена невозможностью выполнения всех исходных краевых условий для решения v. Часть из них оказывается излишней и приводит к появлению в решении u_ε наряду с гладкой составляющей u_{sm} также составляющей u_{bl}, быстро меняющейся в небольшой окрестности границы или ее части, которая называется *пограничным слоем.* Поэтому иногда такие задачи называются задачами *с краевым эффектом*, или *с пограничным слоем.* Как видно из названия нашей монографии, мы воспользовались последним термином.

В этой книге мы остановимся на линейных и квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с малым параметром при старших производных типа диффузии-конвекции. Для уравнений второго порядка объектом детального исследования взята задача

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{0.1}$$

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = d_0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = d_1, \tag{0.2}$$

с гладкими функциями $a(x) > 0$, $b(x) \geq 0$, $f(x)$, малым параметром $\varepsilon \in (0,1]$ и положительными константами α_i, β_i, $\alpha_i + \beta_i > 0$.

При $\varepsilon = 0$ приходим к вырожденной задаче, которая имеет единственное решение $v_0(x)$:

$$L_0 v_0 \equiv a(x){v_0}' + b(x)v_0 = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{0.3}$$

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = d_0. \tag{0.4}$$

На большей части отрезка $[0,\, 1]$ оба решения $u(x)$ и $v_0(x)$ довольно близки. Рассогласование возникает в точке $x = 1$, где, как правило, второе граничное условие из (0.2) не выполняется для v_0. Из-за этого у $u(x)$ вблизи $x = 1$ появляется пограничный слой с производной решения порядка ε^{-1}. Поэтому стандартные методы конечных разностей или конечных элементов на равномерных сетках дают неудовлетворительную точность для задачи (0.1) – (0.2) ввиду огромной погрешности аппроксимации внутри пограничного слоя.

По поводу изложения материала отметим один важный момент. С помощью буквы c с индексом или без него мы будем обозначать константы, не зависящие от аргумента x, малого параметра ε и шага сетки h, а также величин и функций, вынесенных иногда рядом с этой константой в правой части неравенства. Внутри одного раздела одинаковые индексы указывают на одинаковые константы. Но в другом разделе нумерация констант начинается сначала и константы с одним и тем же индексом в разных разделах различны.

Упомянутая независимость констант c от ε имеет принципиальное значение и поэтому детально отслеживается на протяжении всей монографии. Именно для обеспечения независимости от ε констант c в оценках точности существенно усложняются доказательства.

Для иллюстрации приведем две записи оценок точности, традиционных в монографиях по методу конечных разностей:

$$\|u^h - u\|_{\infty,\,\bar{\omega}_h} \le c\,h^2, \tag{0.5}$$

$$\|u^h - u\|_{\infty,\,\bar{\omega}_h} \le c\,h^2 \|u\|_{4,\,\infty,\,[0,1]}. \tag{0.6}$$

Поскольку основной задачей подавляющего большинства таких монографий является доказательство сходимости приближенного решения u^h к точному решению u на сетке $\bar{\omega}_h$ при стремлении шага h к нулю, то приведенные оценки (0.5), (0.6) на вид вполне оптимистичны с учетом оговоренной или подразумеваемой независимости константы c от h. Но в оценке (0.5) не отмечена обычно имеющаяся зависимость константы c от решения или коэффициентов задачи, так что ее форма записи в наших обозначениях должна иметь вид $c(\varepsilon, u)$. Как это часто бывает, в наших задачах $c(\varepsilon, u) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. В таком случае при $\varepsilon << 1$ приходится выбирать h чрезвычайно малым для достижения сколько-нибудь приемлемой точности. В свою очередь, малый шаг h приводит к чрезмерно большим вычислительным затратам в одномерных задачах и нереальным затратам в многомерных задачах.

В оценке (0.6) также предполагается зависимость константы c от коэффициентов задачи, в которые входит ε. Поэтому для наших уравнений данную оценку следовало бы писать с константой $c(\varepsilon)$ обычно с теми же последствиями для точности при малых ε. В той редкой ситуации, когда удается доказать независимость c от ε, полезность оценки (0.6) не возрастает. Как выяснится в разд. 1.1, норма $\|u\|_{4,\,\infty,\,[0,1]}$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к бесконечности, и мы вновь возвращаемся к чрезмерно малым h для достижения сколько-нибудь приемлемой точности при $\varepsilon << 1$.

Перейдем к содержанию книги.

Глава 1 посвящена аналитическим свойствам решения уравнения второго порядка типа конвекции-диффузии. Сначала выяснены дифференциальные свойства решения и в явном виде выписаны функции пограничного слоя, дающие наибольший вклад в рост производных вблизи $x = 1$. Строго обоснованы оценки производных решения и погрешности асимптотических разложений.

В гл. 2 изучаются разностные методы для задачи (0.1) – (0.2). В разд. 2.1 анализируются схемы направленных разностей, известные в зарубежной литературе как *upwind-scheme*, без выделения функций типа пограничного слоя. Приведены теоремы о сходимости приближенного решения к точному в равномерной норме, которые подтверждают, что эти оценки не являются равномерными по малому параметру. Более того, рассмотрен пример, в котором шаг разностной сетки h пропорционален малому параметру ε. В этом случае схема направленных разностей не сходится равномерно по шагу разностной сетки h, а схема с центральными разностями имеет решение пилообразного характера.

В разд. 2.2 на равномерной сетке ω_h обосновывается метод аддитивного выделения особенностей, т.е. с учетом асимптотического разложения функция типа пограничного слоя переносится в правую часть системы (0.1) – (0.2). С учетом знака коэффициента $a(x)$ строится разностная схема с направленными разностями первого порядка аппроксимации на гладких решениях. Полученная система линейных алгебраических уравнений образует M-матрицу и имеет диагональное преобладание.

Раздел 2.3 посвящен схемам с экспоненциальной подгонкой. При их построении различные авторы применяли разнообразные модификации схемы, получившей название схемы Ильина–Аллена–Саусвелла благодаря двум основополагающим работам [28, 69]. Ее можно записать следующим образом:

$$L^h u = -(\varepsilon\sigma(q))u_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} + a u_{\overset{\circ}{x}\overset{\vee}{x}} + bu = f, \quad x \in \omega_h, \tag{0.7}$$

$$u_0 = d_0, \quad u_N = d_1, \tag{0.8}$$

где $\sigma(q) = q \coth(q)$ является подгоночным коэффициентом от параметра $q = 0.5\ b_i h/\varepsilon$. Данная схема имеет первый порядок точности в равномерной норме, характерный для различных модификаций, рассмотренных в работах Т.М. Эль-Мистикави и М. Верле [95], К. Нижима [151], Р.Б. Келлога и А. Цзаня [131], К.В. Емельянова [27], Г.И. Шишкина [69], А.И. Задорина и А.В. Игнатьева [29] и др.

В разд. 2.4 изучаются схемы высокого порядка точности. Описаны два подхода: метод HODIE и учет коррекции ошибки разностных схем. Метод HODIE основан на аппроксимациях коэффицентов исходной задачи d полиномиальными приближениями $\bar{d}$ с оценкой $\|d - \bar{d}\|_\infty \le ch^{k+1}$. Второй подход основывается на итерационном алгоритме, с помощью которого повышается точность разностных схем.

Разд. 2.5 основан на обсуждении разностных схем на неравномерных сетках, сгущающихся в окрестности пограничного слоя. Основополагающие идеи в этом направлении изложены в работах Н.С. Бахвалова [6], Г.И. Шишкина [68, 69], В.Д. Лисейкина [42, 43], Р. Вулановича [174], Е. Гартланда [106, 107] и др. Сетки, сгущающиеся по логарифмическому закону, получили название сеток Бахвалова. Сетки, равномерные в различных подобластях, но с существенно отличающимися шагами, разработаны Г.И. Шишкиным. Р. Вуланович предложил выбирать порождающую функцию в виде $\mu(t) = Ct/(q - t)$, параметры которой C, q выбираются из условия непрерывности порождающей функции. Е. Гартланд и В.Д. Лисейкин предложили локально строить квазиравномерные сетки, так что можно получить схемы более высоких порядков точности.

Раздел 2.6 посвящен повышению точности приближенных решений на основе экстраполяции Ричардсона. Ее суть состоит в решении одной и той же разностной схемы первого порядка точности с разным числом узлов и последующей линейной комбинации этих решений, предоставляющей результат более высокого порядка точности. Здесь обоснован третий порядок для схемы направленных разностей на сетке с достаточно гладкой порождающей функцией.

В гл. 3 для задачи (0.1) – (0.2) изучается конечноэлементный подход. В разд. 3.1 рассмотрены два варианта постановки задачи: методы Бубнова – Галеркина и Петрова – Галеркина соответственно с совпадающими и разными пространствами допустимых и тестирующих функций. В первом случае используется лемма Лакса – Мильграма, хорошо зарекомендовавшая себя в задачах с самосопряженным оператором. Здесь этот подход приводит к неоптимальным оценкам. Для обоснования метода Петрова – Галеркина используется подход И. Бабушки. Он более подходит для анализа нашей задачи с большой кососимметрической частью и, к тому же, применим для оценок погрешности в различных нормах.

В разд. 3.2 снова изучается гладкость решения, на этот раз в соболевских пространствах обобщенных функций. Следует отметить введение положительной весовой функции, которая позволяет сделать билинейную форму знакоопределенной.

Раздел 3.3 посвящен методу аддитивного выделения особенности. В структуру приближенного решения дополнительно к стандартным кусочно-линейным базисным функциям включается функция типа пограничного слоя с весом, являющимся дополнительным неизвестным системы линейных алгебраических уравнений. Ее матрица помимо трехдиагональной структуры ненулевых элементов приобретает окаймляющие строку и столбец. Стандартный метод прогонки становится неприменим, но его некоторая модификация тоже дает экономичный алгоритм (в смысле линейной зависимости числа арифметических операций от количества неизвестных).

В разд. 3.4 описано применение несимметричных конечных элементов. В методе Петрова – Галеркина используются разные пространства допустимых и тестирующих функций. Комбинация с некоторыми весами линейных и квадратичных элементов дает семейство схем с улучшенной обусловленностью и возможностью подгонки коэффициентов. Перспективное направление связано с построением пространства допустимых функций $\varphi_i(x)$ в виде L-сплайнов, удовлетворяющих локальным краевым задачам вида

$$-\varepsilon\varphi_i'' + a_i\varphi_i' = 0 \quad \text{на } (x_{i-1}, x_i),$$

$$-\varepsilon\varphi_i'' + a_{i+1}\varphi_i' = 0 \quad \text{на } (x_i, x_{i+1}),$$

$$\varphi_i''(x_{i\pm1}) = 0, \quad \varphi_i(x_i) = 1.$$

Для описанных схем приведены оценки сходимости в равномерной сеточной норме и среднеквадратичной ε-норме.

Раздел 3.5 посвящен относительно новому приему, связанному со специальной аппроксимацией квадратурных формул для учета гладкой и погранслойной составляющих. Система линейных алгебраических уравнений образует M-матрицу. Доказаны оценки сходимости как в ε-норме, так и в равномерной с первым порядком точности.

В разд. 3.6 рассмотрены методы дискретизации на неравномерных сетках, сгущающихся в окрестности пограничного слоя на основе *априорной информации*. Так же как и для разностных схем, основные идеи в этом направлении заложены в работах Н.С. Бахвалова, Г.И. Шишкина, В.Д. Лисейкина, Р. Вулановича, Е. Гартланда и др.

Особое место занимают адаптивные сетки и адаптивные методы, описанные в разд. 3.7. Основополагающими работами в этом направлении явились статьи И. Бабушки и В. Рейнбольдта [77], [78], в которых были предложены функционалы (эстиматоры), явно оценивающие точность приближенного решения по его значениям в узлах сетки. На основе последовательной минимизации этих функционалов с учетом *апостериорной информации* вырабатываются алгоритмы построения триангуляции для устойчивых дискретных аналогов метода конечных элементов.

В разд. 3.8 рассмотрен метод конечных объемов, который в литературе известен как интегроинтерполяционный. Подбором различных аппроксимаций интегралов получают различные семейства разностных схем. В одном случае получается центральная разностная схема, в другом – метод направленных разностей, для которых оценки скорости сходимости хорошо известны. Метод вершин продолжает технику метода конечных объемов, правда, интегралы определяются на других интервалах. Получаются четырехточечные аппроксимации, подобные схеме Гущина–Щенникова. Для кусочно-линейных элементов в дискретной энергетической норме приведена оценка сходимости приближенного решения к точному с первым порядком.

Глава 4 связана с продолжением исследования дискретных аналогов для некоторых постановок, позволяющих расширять область применения уже рассмотренных методов.

В разд. 4.1 исследовались квазилинейные уравнения. Сначала рассмотрен случай со слабонелинейной правой частью. Изучены вопросы разрешимости задачи и установлено, что этот случай принципиально не отличается от линейного, включая оценки производных и явный экспоненциальный вид функций пограничного слоя. Это открывает дорогу применению рассмотренных ранее методов дискретизации. Доказана сильная монотонность интегральной постановки задачи, являющаяся аналогом положительной определенности билинейной формы, которая линейна лишь по одному аргументу в этой постановке. Кратко обсуждено уравнение со слабонелинейным коэффициентом у конвективного слагаемого. Отмечено принципиальное отличие от предыдущего случая, состоящее в нелинейности уравнений для функций пограничного слоя. Их решения уже не выписываются в явном виде, что исключает применение методов подгонки, основанных на явной форме функций пограничного слоя. Тем не менее, остаются справедливыми оценки производных решения, являющиеся основой построения и анализа схем на сгущающихся сетках и триангуляциях.

В разд. 4.2 изучена корректная задача с интегродифференциальным оператором. Проведена тесная аналогия с ранее изученным линейным случаем дифференциального оператора и в качестве примера рассмотрено применение подхода Г.И. Шишкина для построения равномерно сходящейся схемы с направленными разностями и составной квадратурной формулой трапеций.

Раздел 4.3 посвящен исследованию поведения решения при наличии точек возврата – нулей коэффициента при конвективном слагаемом. В зависимости от положения этих точек на границе или внутри области, а также знаков коэффициентов рассмотрено несколько различных ситуаций появления или отсутствия пограничных слоев, а также оценок производных решения.

В разд. 4.4 приведены вспомогательные сведения по обратной монотонности матриц и достаточные признаки для ее достижения.

В списке литературы приведены лишь работы, результаты которых использованы при изложении материала, поэтому за его пределами оказалось большое число публикаций по широкому кругу затронутых вопросов. Мы будем расширять этот список в последующих частях монографии.

Оглавление