

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.958:536.25
N гос. регистрации 01201356263

УТВЕРЖДЕН
Протоколом заседания
Ученого совета
от 20 января 2016 г. № 1/2016

Председатель Ученого совета
член-корреспондент РАН
_____ В. В. Шайдуров
" ___ " _____ 2016 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

БАЗОВЫЙ ПРОЕКТ Ш.22.4.3 "МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД"
ПРОГРАММЫ СО РАН Ш.22.4 "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ
ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД". № ГОС. РЕГИСТРАЦИИ 01201356263
(промежуточный)

Руководитель темы
д.ф.-м.н., профессор

_____ В.К. Андреев
" ___ " _____ 2016 г.

Красноярск 2016

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы д.ф.-м.н., профессор	_____	В.К. Андреев
	(подпись, дата)	
Исполнители: г.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.М. Белолипецкий
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	О.В. Капцов
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	И.И. Рыжков
	(подпись, дата)	
в.н.с., д.ф.-м.н.	_____	В.И. Сенашов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	В.Б. Бекежанова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	С.Н. Генова
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	Л.А. Компаниец
	(подпись, дата)	
с.н.с., д.ф.-м.н.	_____	А.А. Родионов
	(подпись, дата)	
с.н.с., к.ф.-м.н.	_____	И.В. Степанова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	М.В. Ефимова
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Ю.В. Шанько
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	А.В. Шмидт
	(подпись, дата)	
н.с., к.ф.-м.н.	_____	Т.В. Якубайлик
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	Е.П. Магденко
	(подпись, дата)	
м.н.с.	_____	Е.Н. Черемных
	(подпись, дата)	
Старший инженер	_____	Н.Ф. Ильина
	(подпись, дата)	

Инженер

(подпись, дата)

С.В. Козлова

Нормоконтролер

(подпись, дата)

А.В. Вяткин

РЕФЕРАТ

Отчёт 33 с., 17 рис., 1 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФфуЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ СРЕДЫ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач механики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

В результате исследований за отчётный 2015 год построены на основе метода симметрий новые точные решения уравнений жидких сред (идеальной жидкости, бинарных смесей и конвекции); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных и термоконцентрационных сил; разработаны комплексы программ расчётов устойчивости конвективных течений с поверхностями раздела и стратифицированных течений в солёных озёрах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми для широкого класса жидких сред; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано.

Степень внедрения – результаты опубликованы или приняты в печать в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Построение методом симметрий и обобщённых функционально-инвариантных решений точных структур уравнений: идеальной жидкости, бинарных смесей и конвекции. Анализ полей скоростей, температур и концентраций.....	7
2 Расчёт течений с поверхностями раздела и анализ их устойчивости.....	13
3 Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных озёрах. Вывод критериев смены режимов вертикального перемешивания в стратифицированных водоёмах.....	27
4 Разработка малоразмерных численных моделей исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты, основанных на решении одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых слоёв и аннулированием существующих.....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	30
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	31

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом механики сплошных сред. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных слоёв, плёночных течениях, используемых для охлаждения приборов, и в нанотехнологиях.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

1 Построение методом симметрий и обобщённых функционально-инвариантных решений точных структур уравнений: идеальной жидкости, бинарных смесей и конвекции. Анализ полей скоростей, температур и концентраций

Для трёх классов двумерных движений вязкой жидкости (в плоском слое с твёрдыми стенками, одной свободной границей, границей раздела) при малых числах Рейнольдса решены соответствующие обратные начально-краевые задачи. Доказаны априорные оценки решений, которые показывают экспоненциальное убывание полей скоростей и градиента давления с ростом времени.

Рассматриваются решения уравнений двумерных движений вязкой жидкости, инвариантные относительно трёхмерной подалгебры Ли $\langle \partial_x, \partial_u + t\partial_x, \partial_p \rangle$. Все такие решения являются частично инвариантными ранга два и дефекта два. Их анализ сводится к изучению свойств решений нелинейного интегродифференциального уравнения

$$w_t - w_y \int_0^y w(z, t) dz + w^2 = w_{yy} + f(t). \quad (1)$$

Для указанного решения (точнее для уравнения (1)) ставятся три задачи:

- 1) движение жидкости в плоском слое с твёрдыми стенками.
- 2) движение в плоском слое с твёрдой стенкой и свободной границей.
- 3) движение двух несмешивающихся жидкостей с общей поверхностью в слое с твёрдыми стенками.

Все поставленные задачи являются обратными, поскольку функция $f(t)$ определяется вместе с решением $w(y, t)$.

Для ползущих движений (малые числа Рейнольдса) задачи становятся линейными, причём в случае 1 и 2 их решения находятся в виде рядов Фурье по специальным базисам. Для задачи 3 таких решений нет. Доказываются априорные оценки типа

$$|w_j(y, t)|, |f_j(t)| \leq c_j \exp(-\delta t/2)$$

с положительными постоянными c_j и δ_j ($j = 1, 2$). Решение построено с помощью преобразования Лапласа, и приведены расчёты для конкретных жидкостей.

Построено точное решение уравнений свободной конвекции, описывающее совместное стационарное течение жидкости и парогазовой смеси с учётом испарения через поверхность раздела. За счёт изменения интенсивности, характера тепловой нагрузки на стенках канала и толщин слоёв жидкости и смеси возможны три различных физически реализуемых вида решений.

Изучено точное решение уравнений свободной конвекции, построенное в рамках приближения Обербека – Буссинеска. Оно обобщает известное решение Остроумова – Бириха на случай совместного течения жидкости и парогазовой смеси при испарении через поверхность раздела, когда в газовой фазе дополнительно учитывается эффект Дюфура. Пар считается пассивной примесью, диффузия пара в газе описывается уравнением, которое является следствием закона Фика. На внешних твёрдых стенках канала задаётся линейное распределение температуры по продольной координате и условия прилипания, на поверхности раздела – классические условия непрерывности поля температур, скорости, тангенциальных и касательных напряжений. Эффект испарения учитывается только в энергетическом условии на поверхности жидкость – парогазовая смесь ($y = 0$):

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \delta k_2 \frac{\partial C_s}{\partial y} = -LM,$$

где δ – коэффициент Дюфура, C_s – концентрация пара, L – теплота испарения, M – массовая скорость испарения. При этом дополнительно учитывается диффузионный поток массы, а конвективный перенос массы не рассматривается. Для однозначной определённости решения задаётся расход парогазовой смеси R .

Структура решения диктует связи на значения параметров задачи. Так, это решение может описывать двухслойные течения в канале, на стенках которого прикладывается тепловая нагрузка различной интенсивности. Если задать произвольные продольные градиенты температуры A_1, A_2 на внешних границах канала, то градиент температуры A на поверхности раздела будет определяться из соотношения

$$A \left(1 + \frac{h_2 k_1}{h_1 k_2} \right) = A_2 + A_1 \frac{h_2 k_1}{h_1 k_2},$$

где h_j, k_j – толщины и теплопроводности сред, соответственно, $j = 1, 2$.

Решение позволяет изучить влияние параметров на характеристики формирующихся в системе течений. Оказалось, что за счёт изменений интенсивности и характера тепловой нагрузки на стенках канала и толщин рабочих сред можно управлять течениями. Так, можно получить течения с пуазейлевским, чисто термокапиллярным и смешанным профилем скорости (рисунок 1). В первом случае течения имеют структуру,

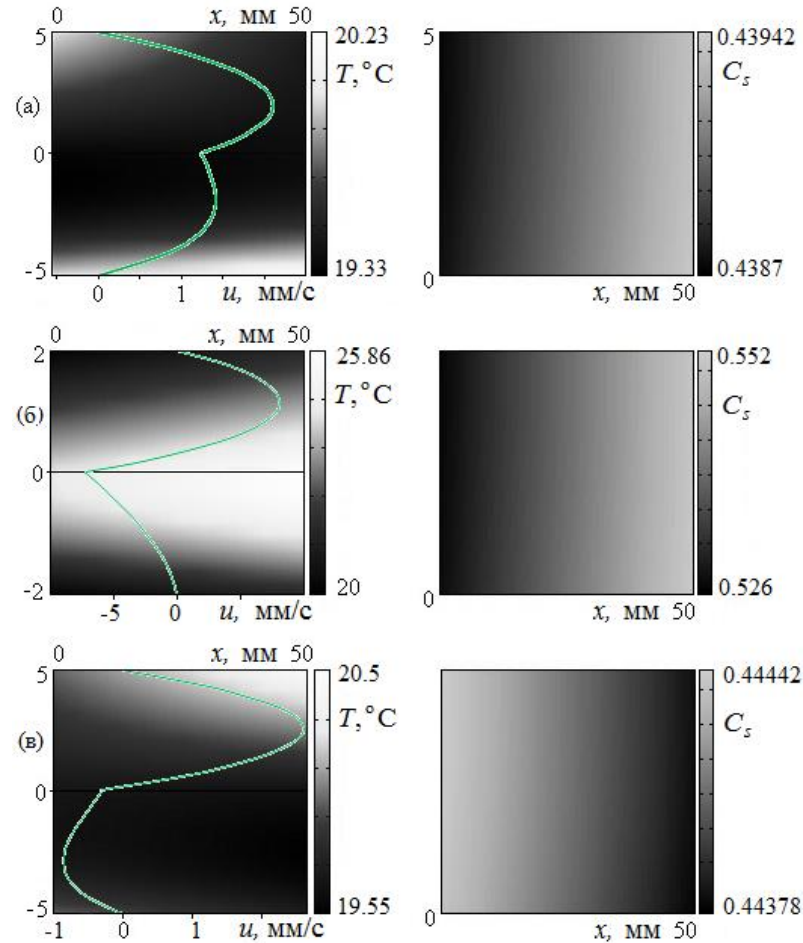


Рисунок 1 – Распределение скорости u (сплошная линия), температуры T и концентрации C_s при $R=9.6 \cdot 10^{-6}$ кг/(м·с): а) – $h_1=h_2=5$ мм, $A_1=5$ К/м, $A_2=-10$ К/м, $A=0.8058$ К/м, $M=1.350657 \cdot 10^{-7}$ кг/(м²·с); б) – $h_1=h_2=2$ мм, $A_1=A_2=A=30$ К/м, $M=5.028480 \cdot 10^{-6}$ кг/(м²·с); в) – $h_1=h_2=5$ мм, $A_1=-5$ К/м, $A_2=10$ К/м, $A=-0.8058$ К/м, $M=-1.350657 \cdot 10^{-7}$ кг/(м²·с)

близкую к пуазейлевскому распределению в каждом слое (рисунок 1.а). Второй режим – чисто термокапиллярный – характеризуется полностью возвратным течением в жидкости и возникает под действием термокапиллярного эффекта (рисунок 1.б). Течения со смешанным профилем скорости характеризуются «расслоением» скорости вблизи поверхности раздела или существованием областей с возвратным течением

в пристеночной области (рисунок 1.в). Кроме того, по знаку величины M определяется тип явлений массопереноса: при $M > 0$ в системе происходит испарение, при $M < 0$ – конденсация.

Для уравнений конвекции бинарной смеси модели Обербека – Буссинеска полностью решён вопрос об однонаправленных течениях в плоских каналах. Оказалось, что профиль горизонтальной скорости есть решение обыкновенного дифференциального уравнения 5-го порядка по поперечной к потоку координате. Предложены различные постановки физически содержательных краевых задач и подробно изучено течение водного раствора хлорида натрия, соответствующего составу морской воды.

Рассматриваются уравнения однонаправленных стационарных течений бинарных смесей. Условия существования таких течений накладывают ограничения на уравнения состояния смеси и представления решений. В случае модели Обербека – Буссинеска анализ условий совместности проведён полностью. Полученное многопараметрическое семейство решений суть решения ОДУ пятого порядка

$$w^{(v)} - \frac{g(a_0x + a_1)w}{\nu} = 0,$$

где $w(x)$ – горизонтальная компонента вектора скорости, a_0, a_1 – произвольные постоянные. В случае $a_0 = a_1 = 0$ скорость записывается в виде полинома четвёртого порядка от x , температура и концентрация – полиномы седьмой степени от x , от продольной координаты z зависят линейно. Когда $a_0 > 0$, решение представляется суммой пяти гипергеометрических функций. Особый интерес среди описываемых классов решений вызывает случай $a_0 = 0, a_1 > 0$, соответствующий квадратичной зависимости температуры и концентрации от продольной координаты. Скорость течения представляется формулой в виде комбинации экспонент и тригонометрических функций. Температура и концентрация при известной скорости находятся непосредственным интегрированием исходных уравнений. Для полученного решения уравнений термодиффузии предложены различные постановки краевых задач, описывающие движения между твёрдыми стенками с заданной температурой на них, течения между двумя теплоизолированными стенками, течения в слое с недеформируемой свободной границей. Подробно изучено движение водного раствора хлорида натрия при концентрации последнего 28.5 промилле, что соответствует химическому составу морской

воды. Предполагается, что на нижней стенке задана температура $\theta|_{x=0} = f_0 z^2 + f_1$, верхняя стенка теплоизолирована. Физические параметры, используемые для расчёта, приведены в таблице 1. На рисунке 2 изображены профили скорости $w(x)$ в зависимости от

Таблица 1 – Физические параметры раствора NaCl – вода

$\rho_0, \text{кг/м}^3$	$\nu, \text{м}^2/\text{с}$	$\beta_1, 1/\text{К}$	β_2	$\chi, \text{м}^2/\text{с}$	$D, \text{м}^2/\text{с}$	$D^\theta, \text{м}^2/(\text{Кс})$
1020.32	$1277 \cdot 10^{-9}$	$1742 \cdot 10^{-7}$	$-76 \cdot 10^{-5}$	$106 \cdot 10^{-9}$	$6106 \cdot 10^{-12}$	$-172 \cdot 10^{-17}$

постоянной f_0 из граничного условия, которая при фиксированном z задаёт тепловой поток на стенке. Увеличение параметра f_0 ведёт к интенсификации перемешивания и

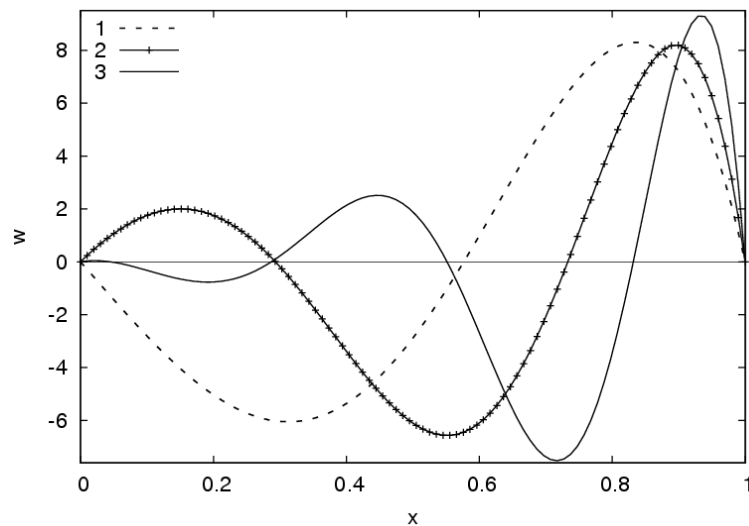


Рисунок 2 – Профили скорости течения водного раствора хлорида натрия в зависимости от теплового потока

смене направлений течения. Кривая 1 построена для $f_0 = 0.0001$, и течение имеет две зоны; кривые 2 и 3 соответствуют значениям $f_0 = 0.001$, $f_0 = 0.01$. При этих параметрах происходит более частая смена зон прямого и возвратного течения. Поскольку коэффициент D^θ здесь отрицательный, то наблюдается нормальная термодиффузия: более тяжелый хлорид натрия стремится в менее нагретую область, скорость возле менее нагретой стенки $x = 1$ больше, чем в остальном слое.

Построены новые решения трёхмерных уравнений неоднородной акустики на основе синтеза метода Рикье, теории базисов Грёбнера и элементов алгебраической

геометрии. Проведено основанное на теоретико-групповом анализе исследование вырождения течения в круглой затопленной турбулентной струе.

Предложен новый подход к исследованию совместности уравнений с частными производными. Этот подход является синтезом метода Рикье, теории базисов Грёбнера и элементов алгебраической геометрии. В качестве приложений рассмотрены системы, включающие волновое уравнение и уравнение синус-Гордона. Построены новые решения трёхмерных нестационарных уравнений неоднородной акустики.

Проведено основанное на теоретико-групповом анализе исследование автомодельности вырождения течения в круглой затопленной турбулентной струе. Математическая модель включает дифференциальные уравнения на продольную и поперечную осреднённую компоненту скорости, скорость диссипации энергии турбулентности, переноса нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений и слабобалансовые аппроксимации Роди для касательных напряжений. Результаты расчётов согласуются с известными экспериментальными данными и результатами,

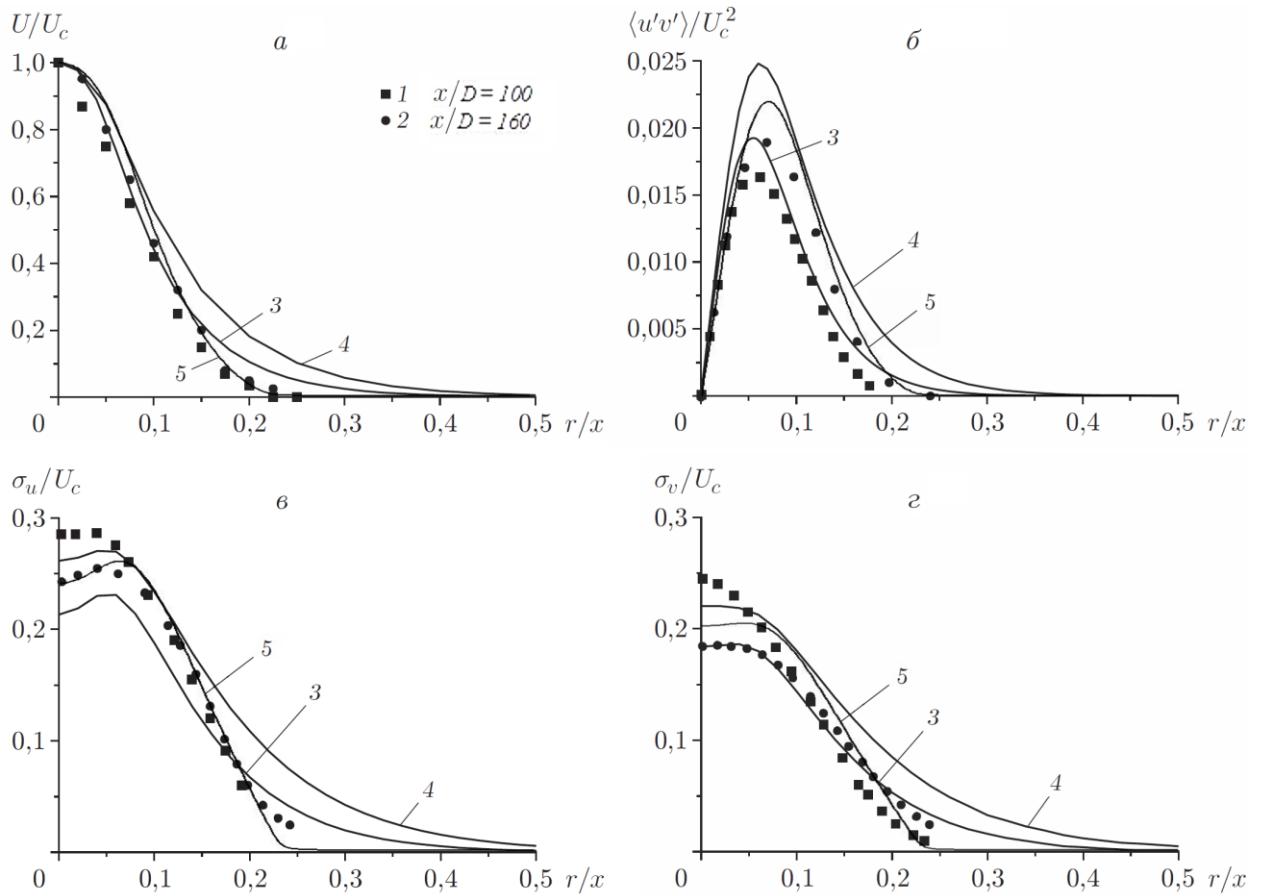


Рисунок 3 – Нормированные профили осреднённой продольной компоненты скорости U (а), касательного рейнольдсова напряжения $\langle u'v' \rangle$ (б) и интенсивностей σ_u , σ_v турбулентных флуктуаций компонент скорости (в, г)

полученными путём непосредственного численного интегрирования дифференциальных уравнений исходной математической модели. В расчётах использовался модифицированный набор эмпирических постоянных для улучшения прогностических свойств модели в случае круглой турбулентной струи. Применение данного подхода обусловлено существованием известной аномалии плоской/круглой турбулентной струи при расчётах, основанных на использовании стандартной k-epsilon модели. Сопоставление результатов расчётов (кривые 5) продольной компоненты скорости осреднённого движения U , касательного рейнольдсова напряжения $\langle u'v' \rangle$ и интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной $\left(\sigma_u = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}\right)$ и поперечной $\left(\sigma_v = \sqrt{\langle v'^2 \rangle}\right)$ компонент скорости с имеющимися экспериментальными данными (символы 1 и 2, соответственно) и результатами численного моделирования с начальными условиями, соответствующими экспериментальным данным (кривые 3, 4), представлено на рисунке 3.

2 Расчёт течений с поверхностями раздела и анализ их устойчивости

Исследовано решение типа Хименца для двухслойного движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе с неподвижной твёрдой стенкой и границей раздела. Найдено стационарное решение и методами априорных оценок доказано, что с ростом времени нестационарное движение стремится к данному стационарному состоянию. Аналогичная задача решена и для движения в плоском слое.

Исследовано решение типа Хименца, описывающее двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе с неподвижной твёрдой стенкой. Движение осесимметрическое, и в цилиндрической системе координат r, φ, z вектор скорости, давление и температура представимы в виде

$$u_j = (u_j(r, t), 0, w_j(r, t)z), \quad \frac{1}{\rho_j} p_{jz} = h_j(t)z, \quad \theta_j = a_j(r, t)z^2 + b_j(r, t), \quad j = 1, 2.$$

Граница раздела $r = R_1 < R$ ($r = R$ – твёрдая стенка) фиксирована и недеформируема и на ней поверхностное натяжение линейно зависит от температуры $\sigma = \sigma^0 - \kappa\theta_1$. Для малых чисел Марангони задача сведена к линейным сопряжённым задачам для отыскания функций $w_j(r, t)$, $a_j(r, t)$, $b_j(r, t)$. Эти задачи относятся к классу обратных, поскольку

градиенты давлений вдоль оси z – функции $h_j(t)$ – суть искомые функции. Получены следующие результаты:

- 1) найдено стационарное решение задачи $w_j^s(r)$, $a_j^s(r)$, $b_j^s(r)$, h_j^s ;
- 2) установлены априорные оценки решения в равномерной метрике для любого конечного момента времени;
- 3) доказано, что с ростом времени, если на твёрдой стенке температура стабилизируется со временем: $|a_2(R,t) - a_2^s(R)| \leq c_1 e^{-\gamma t}$, $|b_2(R,t) - b_2^s(R)| \leq c_2 e^{-\gamma t}$, то решение выходит на стационарный режим;
- 4) решение нестационарной задачи получено в виде квадратур сложной структуры в изображениях по Лапласу.

На рисунках 4, 5 представлены результаты численного обращения преобразования Лапласа, когда

$$a_2(R, \tau) = \sin(10^{-3} \tau), \quad a_2(R, \tau) = 1 + \exp(10^{-3} \tau) \sin(10^{-3} \tau), \quad \tau = R^2 t / \nu_1.$$

В первом случае $a_2(R, \tau)$ не имеет предела при $\tau \rightarrow \infty$ и решение с ростом времени не сходится к стационарному; во втором – решение выходит на стационарный режим и при $\tau \approx 400$ кривая 3 практически сливается с кривой 4.

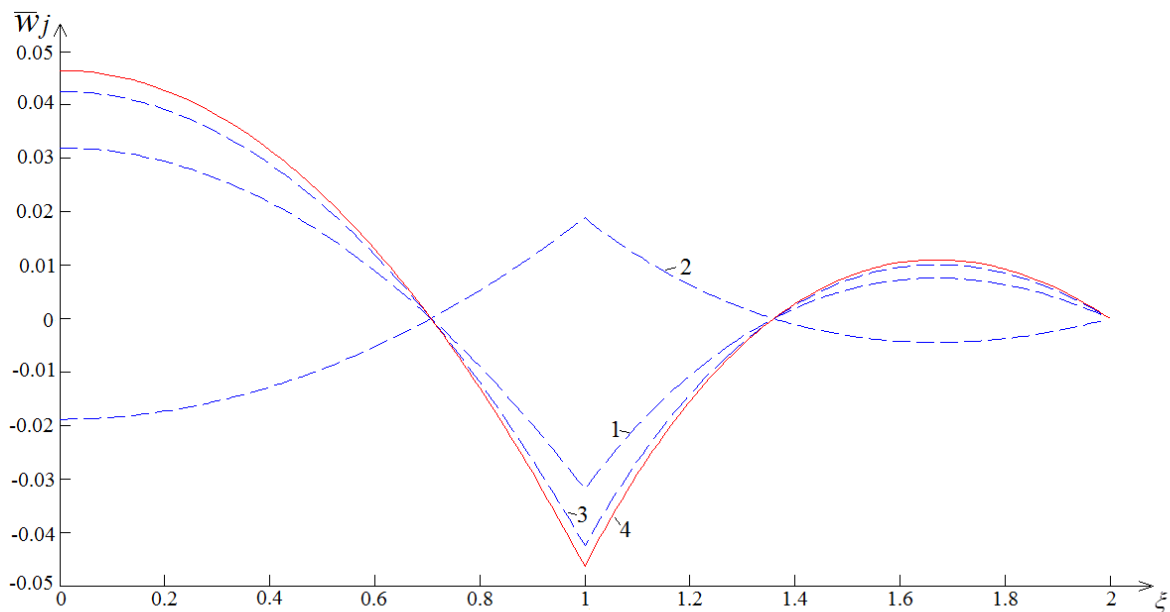


Рисунок 4 – График функции $a_2(R, \tau) = \sin(10^{-3} \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$

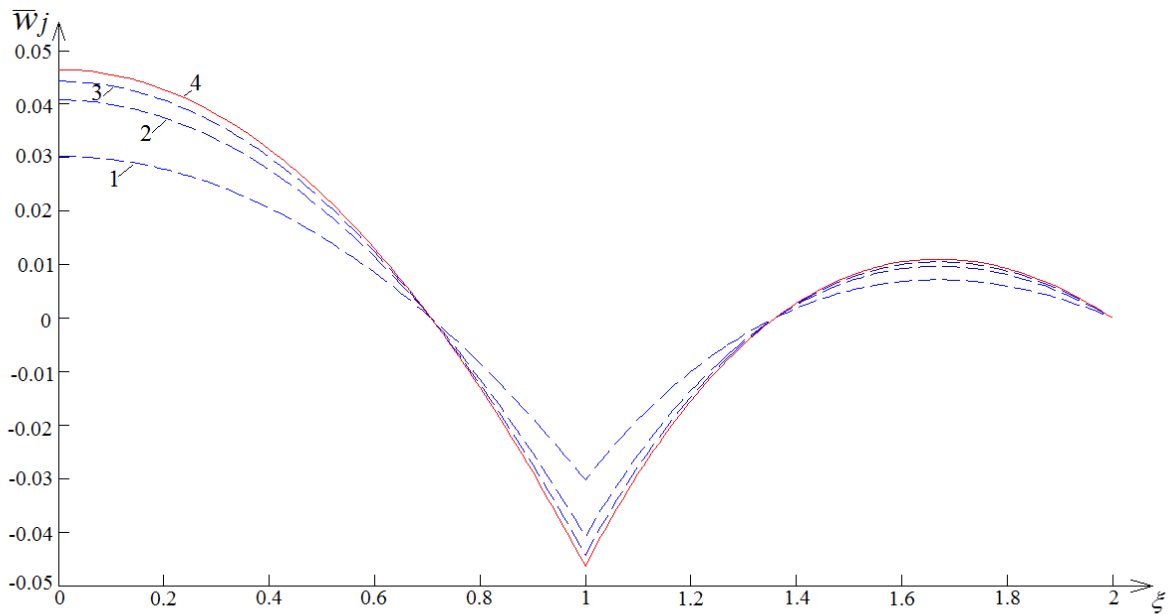


Рисунок 5 – График функции $a_2(R, \tau) = 1 + \exp(10^{-3} \tau) \sin(10^{-3} \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$

Численными методами решена задача об устойчивости стационарного двухслойного течения в плоском канале при различных тепловых нагрузках на его стенках. Вычисления показали, что в системе возможно формирование как монотонных, так и колебательных режимов.

Исследуется устойчивость решения уравнений свободной конвекции из п. 2.3.1 (б) при различной тепловой нагрузке на стенках канала, когда продольные градиенты температуры A_1, A_2 различны. В этом случае метод нормальных волн не годится и применяется численный метод решения пространственно-временной задачи в терминах «функция тока – завихренность». Эволюция системы исследуется на основе уравнений для нестационарных возмущений с квазиволновым числом q , периодических по продольной координате. Задача дополняется начальными условиями, причём амплитуды начальных возмущений пропорциональны 1-10 % значений соответствующих осреднённых характеристик течения (для описания величины начальных возмущений вводится параметр $\gamma \in [0.01; 0.1]$).

Вычисления показывают, что в системе возможно формирование как монотонных, так и колебательных режимов. Возмущения могут нарастать или затухать в зависимости от величины начальных возмущений, расхода газа R и температурных градиентов A_1, A_2, A . Кроме того, в зависимости от величины q , интенсивности и типа внешних воздействий неустойчивость может быть обусловлена термокапиллярным (рисунок 6) или гидродинамическим (рисунок 7) механизмами.

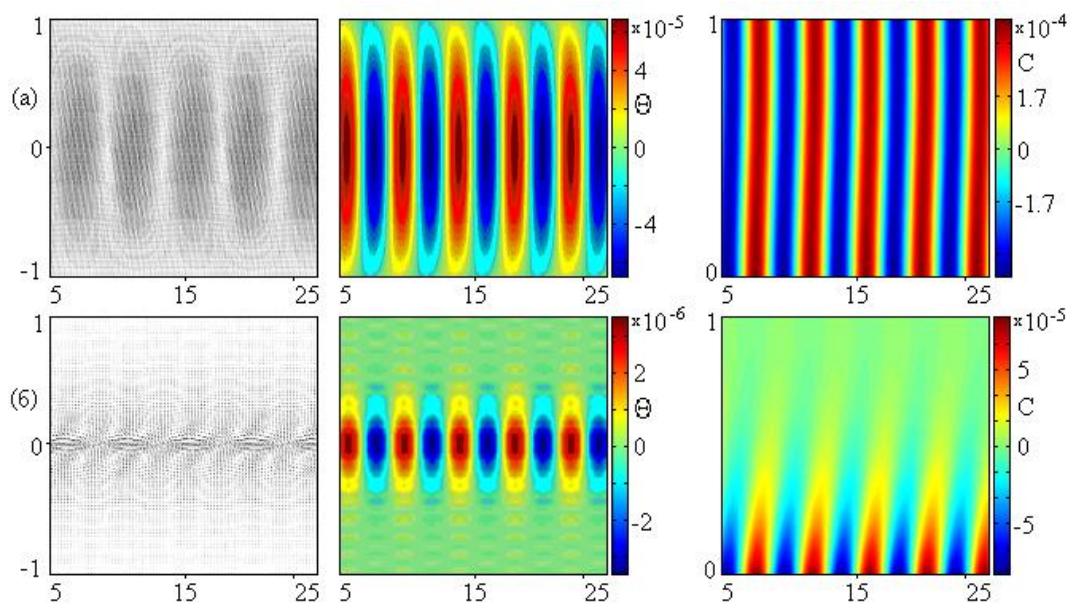


Рисунок 6 – Монотонно затухающие возмущения (слева направо) скорости, температуры и концентрации, $h_1 = h_2 = 5$ мм, $R = 9.6 \cdot 10^{-6}$ кг/(м·с), $h_1 = h_2 = 5$ мм, $A_1 = 5$ К/м, $A_2 = -10$ К/м, $q = 5$, $\gamma = 0.07$: а) $t = 0.5$ с; б) $t = 2.5$ с

Быстрое монотонное затухание возмущений наблюдается даже при больших начальных возмущениях, только если R и $A > 0$ достаточно малы. Возникающие поперечные валы полностью определяют поле концентрации, порождая концентрационные «валы». С ростом времени возмущения разрушаются, и тепловые и концентрационные «валы» перерождаются в тепловые и концентрационные пятна, при этом возмущения скорости локализуются вблизи границы раздела, рис. 6. Там же представлены характерные затухающие возмущения скорости, температуры и концентрации термокапиллярного типа.

В случае, когда температурные градиенты остаются малыми, увеличение расхода парогазовой смеси приводит к неустойчивым режимам. При $A < 0$ действие термокапиллярного эффекта и сдвиговых напряжений сонаправлено, что приводит к формированию нарастающих гидродинамических возмущений, тогда как возмущения температуры и концентрации медленно затухают. Таким образом, при больших расходах R наиболее опасными являются гидродинамические возмущения, при этом в системе наблюдается неустойчивость гидродинамического типа, поскольку термокапиллярные силы подавляются сдвиговыми напряжениями. Следует отметить, что только для течений с чисто термокапиллярным профилем скорости в указанном случае можно добиться стабилизации основного течения и только при малых начальных возмущениях, когда γ мало.

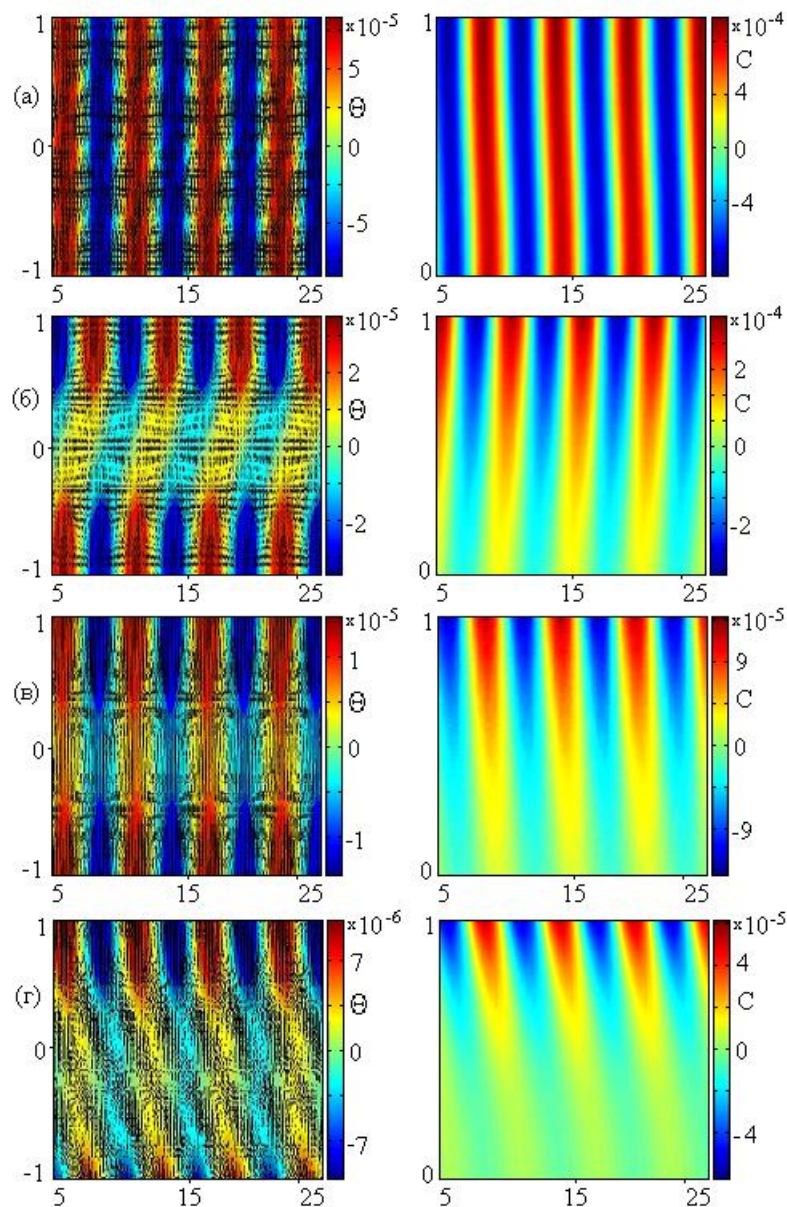


Рисунок 7 – Колебательная неустойчивость, нарастающие возмущения скорости и затухающие возмущения температуры и концентрации, $h_1 = h_2 = 5$ мм, $R = 2.4 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с), $h_1 = h_2 = 5$ мм, $A_1 = -20$ К/м, $A_2 = 50$ К/м, $q = 3$, $\gamma = 0.08$: а) $t = 0.5$ с, б) $t = 1.5$ с, в) $t = 5$ с, г) $t = 9$ с

Увеличение температурных градиентов и расходов газа приводит к формированию колебательных режимов. Нарастание или затухание возмущений определяется характером начальных возмущений – при достаточно малых γ возмущения затухают. При колебательных режимах с ростом времени крупные вихри разрушаются в несколько малых, затем малые сливаются в большие, но размеры таких «пульсирующих» вихрей уменьшаются (при устойчивых режимах) и увеличиваются (при неустойчивых, рис. 7). При этом поле концентраций отвечает на такие осцилляции вихрей – концентрационные «пятна» сносятся по потоку или против потока.

С ростом квазиволнового числа q размер возникающих конвективных и концентрационных структур изменяется: крупномасштабных структуры (вихри, тепловые и концентрационные «валы») трансформируются в мелкомасштабные. Следует отметить, что при больших расходах газа R увеличение q приводит к формированию высокочастотных колебаний, а при малых – наблюдается переход от возмущений гидродинамического типа к термокапиллярным.

Для уравнений микроконвекции исследовано точное инвариантное решение. Структура решения позволяет выделить три различных семейства течений. Исследована устойчивость всех течений по линейному приближению: доказана устойчивость относительно спиральных возмущений; установлено существование затухающих колебательных режимов и описаны физические механизмы неустойчивостей.

Изучено точное инвариантное решение уравнений микроконвекции

$$\mathbf{w} = (u_0, v(x), 0), \quad \theta = \theta(x), \quad q = (\varphi - g)y + r, \quad (4)$$

описывающее стационарное течение жидкости в вертикальном канале с твёрдыми стенками в небуссинесковских условиях. В (4) \mathbf{w} , q – модифицированные вектор скорости и давление, соответственно, $\theta(x)$ – температура. Предложена классификация типов течений в зависимости от значений постоянной u_0 , вида функции температуры $\theta(x)$ и используемых граничных условий для $\theta(x)$. Структура решения позволяет выделить три различных семейства, которые допускают различную физическую интерпретацию и описывают три класса течений:

- 1) течение 1 – конвекция в слое с проницаемыми стенками ($u_0 \neq 0$) с линейным распределением температуры. На стенках могут быть заданы условия Дирихле и Неймана, однако вид решения диктует ограничения на значения потоков тепла при использовании условий Неймана;
- 2) течение 2 – изотермическое течение ($\theta(x) = \text{const}$) в слое с непроницаемыми стенками ($u_0 = 0$), возникающее под действием градиента давления. Формально на стенках могут быть заданы оба класса граничных условий, однако структура решения такова, что возникают следующие ограничения: при использовании условий первого рода

- значения температур на стенках канала должны быть равны; при использовании условий второго рода – потоки тепла на стенках канала должны быть равны 0;
- 3) течение 3 – конвекция в слое с проницаемыми стенками ($u_0 \neq 0$) с экспоненциальным распределением температуры. На стенках могут быть заданы только граничные условия первого рода.

Исследована линейная устойчивость всех полученных классов течений относительно малых нормальных пространственных возмущений

$$(\mathbf{W}, T, Q) = (\mathbf{W}(x), T(x), Q(x)) \times \exp[i(\alpha_1 y + \alpha_2 z - C\tau)].$$

Удаётся построить преобразование

$$\tilde{Z} = i\alpha_1 V + i\alpha_2 W, \tilde{U} = i\alpha U, \tilde{T} = i\alpha T, \tilde{Q} = i\alpha Q, \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

которое является аналогом преобразования Сквайра и позволяет перейти от задачи об устойчивости относительно трёхмерных возмущений к соответствующей двумерной задаче с дополнительным параметром λ , характеризующим конфигурацию волны возмущения.

В результате решения полученной спектральной задачи доказана устойчивость течений относительно «спиральных» возмущений (случай $\lambda = 0$). Для изотермического течения получено аналитическое представление собственного числа

$$C_n = -i \left(\frac{\pi^2 n^2}{4} + \alpha^2 \right) (1 + \varepsilon \theta_1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

гарантирующее абсолютную устойчивость, и спектр характеристических возмущений температуры $T_n = \sin(\pi n(\zeta + 1)/2)$. Здесь ε – параметр Буссинеска, $\theta_1 = \text{const}$ – известная температура, ζ – безразмерная пространственная переменная. Для неизотермических течений не обнаружено областей неустойчивости относительно «спиральных» возмущений в расчётном диапазоне $10^{-3} \leq \alpha \leq 10$ и $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 0.1$, а устойчивость относительно коротковолновых «спиральных» возмущений удаётся доказать аналитически.

При использовании граничных условий первого рода для неизотермических течений расплавов кремния установлено существование характеристических возмущений типа гидротепловых валов, тепловых валов или «пятен», при которых в канале формируются крупно- или мелкомасштабные конвективные течения (рисунок 8.а-в), а для изотермического течения – полигональных ячеек с некоторой симметрией (рисунок 8.г).

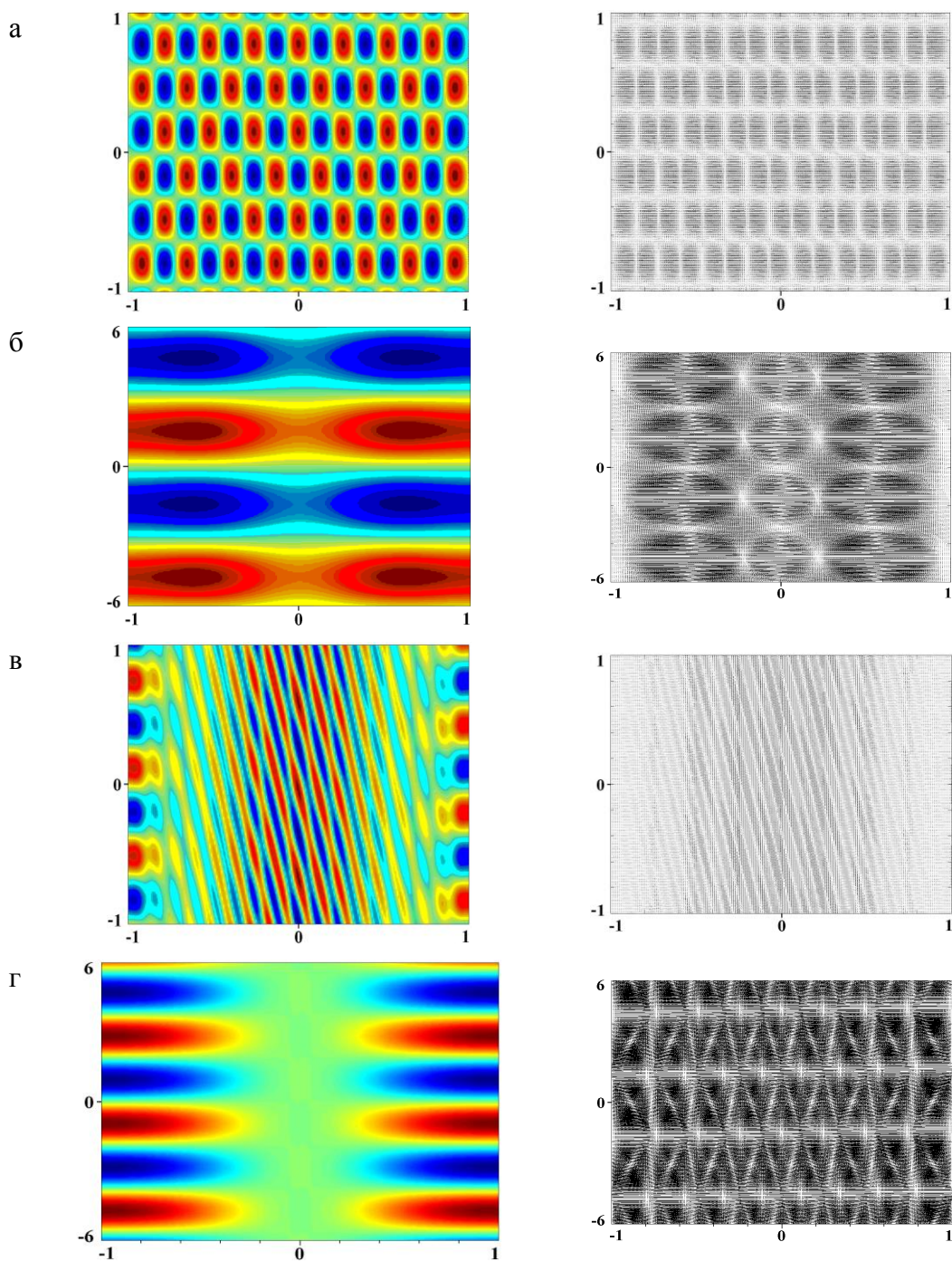


Рисунок 8 – Начальное поле возмущений скорости и температуры: а) мелкомасштабные ячейки и тепловые «пятна», б) конвективные ячейки и тепловые валы, в) гидротепловые валы, г) полигональные ячейки с диагональной и осевой симметрией

Изучено влияние параметров задачи на тип и характеристики возмущений, установлено существование затухающих колебательных режимов и описаны механизмы неустойчивости. Построены зависимости критического числа Грасгофа (рисунки 9, 10) для течений 1, 3 и числа Рейнольдса (рисунок 11) для течения 2 от параметров задачи и определены их пороговые значения. Выделенные кривые на рисунке 10

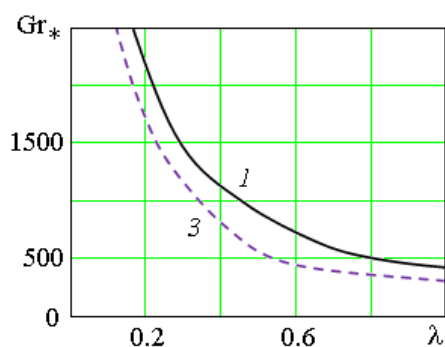


Рисунок 9 – Зависимость критического числа Грасгофа от параметра λ при $Re = 0.002$, $\varepsilon = 0.037$: кривая 1 соответствует течению 1, $\alpha_{*1} = 1.14$; 3 – течение 3, $\alpha_{*3} = 0.86$. Критические значения числа Грасгофа достигаются при $\lambda = 1$, $Gr_{*1} = 431.12$, $Gr_{*3} = 307.91$

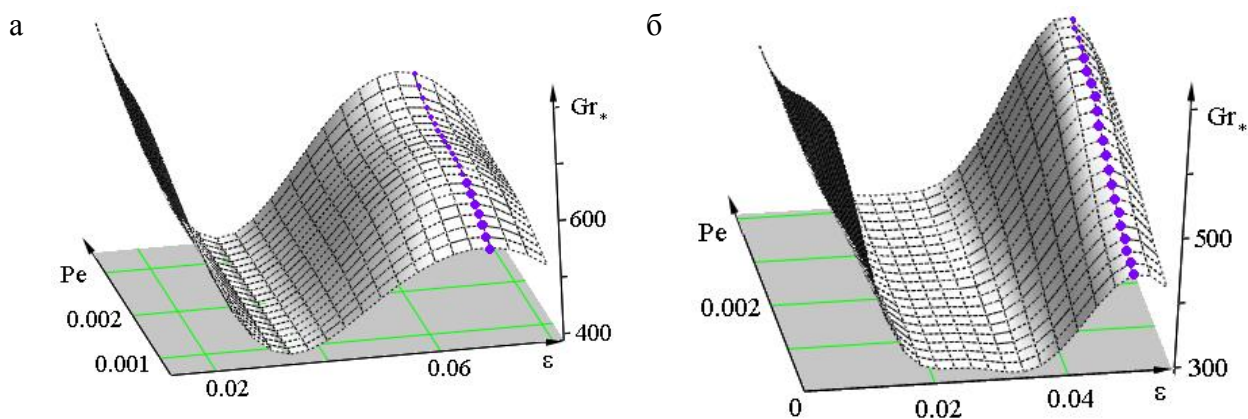


Рисунок 10 – Зависимости критического числа Грасгофа от параметра Буссинеска ε и числа Пекле Pe , характеризующего скорость поперечного продува, $\lambda = 1$: а) течение 1, $\alpha_{*1} = 1.14$; б) течение 3, $\alpha_{*3} = 0.86$

соответствуют значениям, при которых имеет место смена наиболее опасной моды с монотонной на колебательную. Следует отметить, что колебательная неустойчивость возникает при физически трудно реализуемых значениях параметра Буссинеска. Для расплава диоксида кремния значение $\varepsilon = 0.06$ соответствует разнице температур на стенках порядка 9000°C . Для изотермического течения критические характеристики

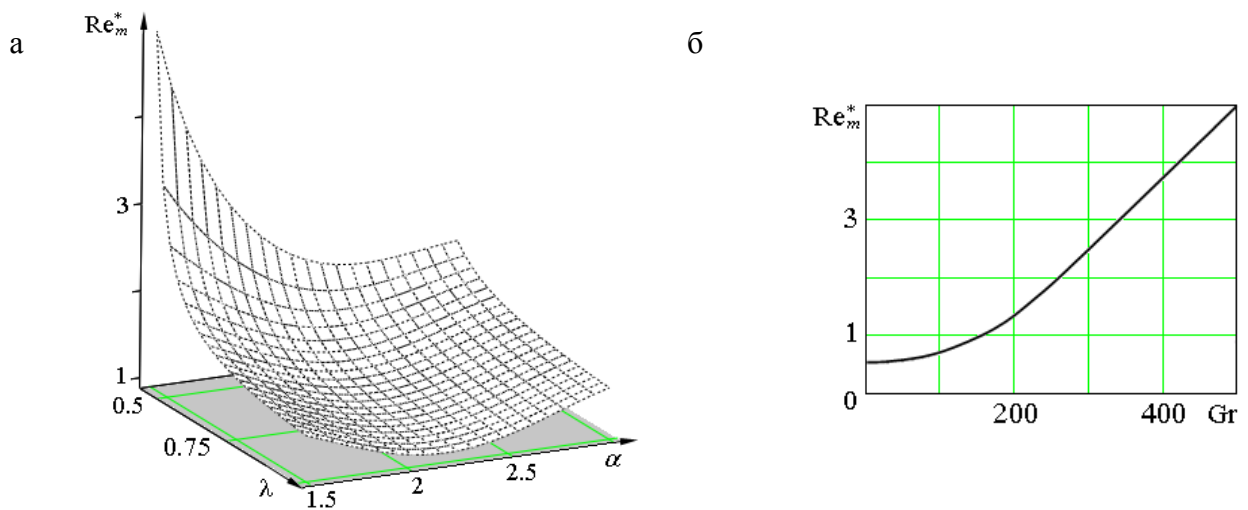


Рисунок 11 – Зависимость критического числа Рейнольдса от параметров задачи: а) $\varepsilon = 0.037$, $Gr = 185$; б) $\varepsilon = 0.037$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2.2$

практически не зависят от параметра Буссинеска ε , характеризующего тепловое расширение среды под влиянием перепада температур. Характер зависимости $Re(Gr)$ указывает на то, что критические характеристики устойчивости этого течения определяются линейными размерами (толщиной слоя) и/или интенсивностью гравитационного воздействия (рисунок 11.б).

Исследован новый класс слоистых течений в рамках уравнений длинноволновой модели течения вязкой однородной жидкости. Полученная система записана в виде законов сохранения и является гиперболической, что позволило провести её численный анализ, в частности, выявить неустойчивость Саффмана – Тейлора поверхности раздела.

Рассмотрен класс слоистых течений в рамках длинноволновой модели течения вязкой однородной жидкости в протяженных каналах. В системе координат, движущейся со временем по закону $x' = x - Ut$, $u' = u - U$, $U = \text{const}$, описываемый класс течений определяется уравнениями

$$u_{it} + [\beta u_i + (\beta - 1)Uu_{ix}] + \frac{g}{\rho_i} \sum_{j=1}^i h_{jx} + \frac{1}{\rho_i} p_{0x} = -\frac{\mu_i}{\rho_i} (u_i + U),$$

$$h_{it} + (u_i h_i)_x = 0, \quad \sum_{i=1}^N h_i = H, \quad \sum_{i=1}^N u_i h_i = HU, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $u_i(t, x)$ – скорость в каждом слое, $h_i(t, x)$ – высота слоя, ρ_i, μ_i – плотность и вязкость жидкости, $p_0(t, x)$ – давление на верхней крышке, $\beta = 6/5$.

Найдены характеристики представленной системы; доказано, что система является гиперболической при выполнении соотношения на плотность в слоях $\rho_1 \geq \rho_2$. Уравнения переписаны в виде законов сохранения, к которым применима надёжная и устойчивая схема численного интегрирования, основанная на методе Годунова. Предложены модификации исходных уравнений в случае двухслойного течения, связанные с линеаризацией полученной системы и использованием линейного закона Дарси. На основе редуцированных моделей произведён численный расчёт положения границы раздела двух жидкостей, движущихся с разными скоростями и имеющих разные физические свойства. Начальное положение границы раздела задано равенством

$$h|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x < x_0, \\ 0, & x > x_0, \end{cases}$$

и обозначено на рисунке 12 синим пунктиром. Обнаружено, что упрощённые модели правильно передают известные факты о неустойчивости границы раздела двух жидкостей при замещении более вязкой жидкости менее вязкой. Выполнено сравнение результатов

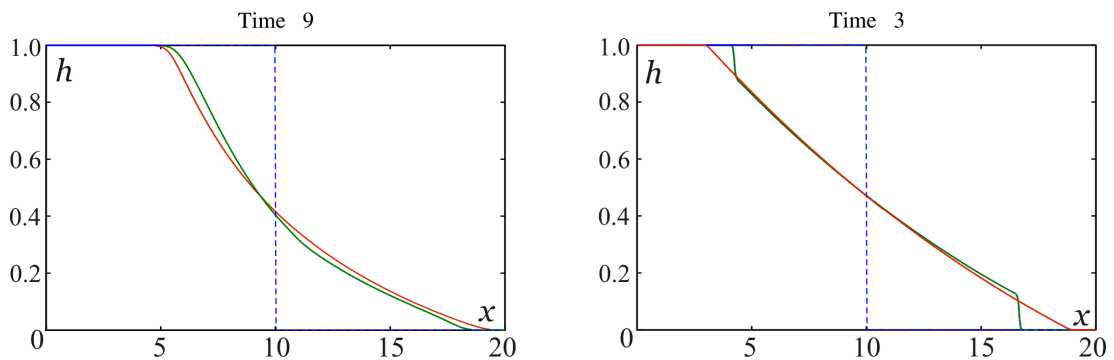


Рисунок 12 – Движение границы раздела в двухслойном течении,

$$\mu_1 = 1, \rho_1 = 1, \mu_2 = 2, \rho_2 = 0.98, \quad g = 0 \text{ (слева)}, \quad g = 980 \text{ (справа)}$$

расчёта по двум моделям. На рисунке 12 показаны изменения положения границы раздела без действия силы тяжести (слева) и под влиянием гравитации (справа). Зеленым цветом обозначены кривые, рассчитанные по линеаризованной модели, красным – по модели, основанной на законе Дарси. Обе упрощённые модели позволяют наблюдать неустойчивость Саффмана-Тейлора. Качественное поведение кривых совпадает в середине слоя, отличаясь более низкой скоростью границы раздела вблизи стенок при расчётах по линеаризованной модели.

Проведены эксперименты и их численная обработка по определению коэффициентов изотермичной диффузии Фика в тройных и бинарных системах воды, этанола и триэтиленгликоля различной концентрации.

Проведены эксперименты по определению коэффициентов изотермичной диффузии Фика в тройных и бинарных системах воды, этанола и триэтиленгликоля различной концентрации. Были использованы методы Тейлора применительно к диффузии в капиллярах и метод с отклонением лазерного луча в ячейке Сорэ. Полученные результаты позволили определить коэффициенты диффузии для различных концентраций смеси (рисунок 13).

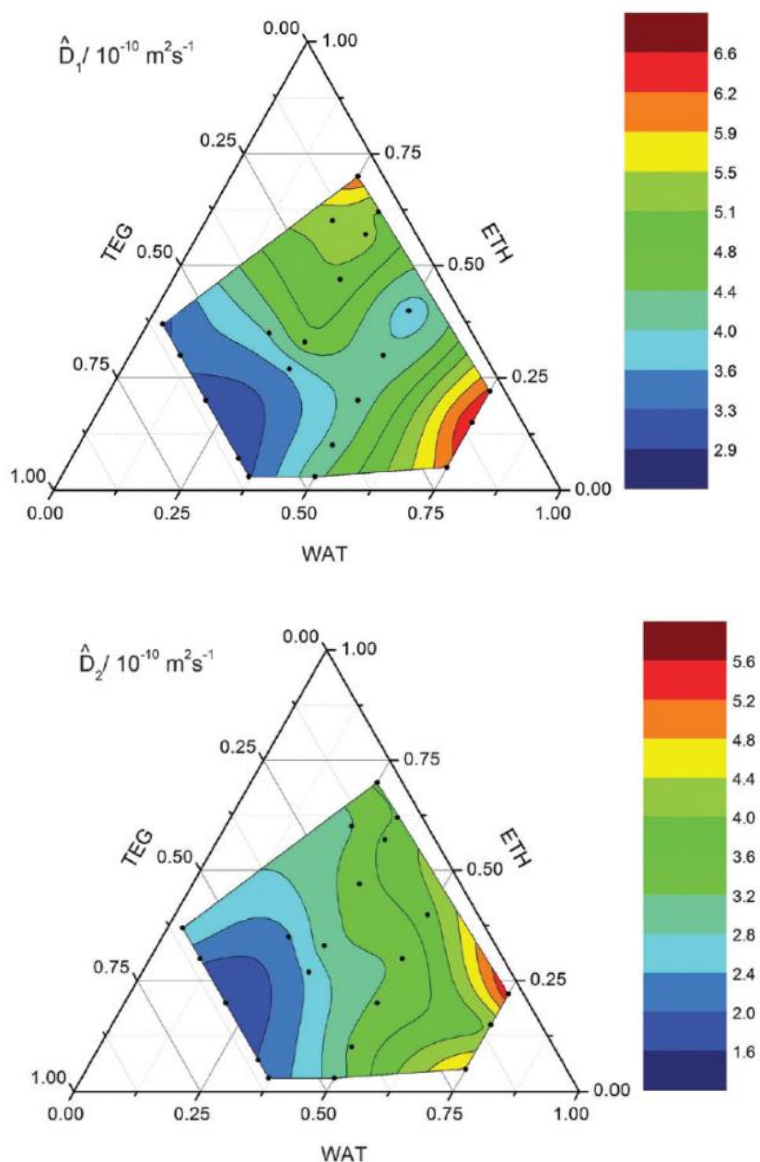


Рисунок 13 – Изолинии собственных значений коэффициентов диффузии для различных концентраций смеси

Разработана методика расчёта термодиффузионного разделения в двухфазной бинарной смеси, образующей двухслойную систему с подвижной границей. Расчёты проведены для бинарной смеси циклогексан-метанол в плоском слое с постоянной разностью температур между стенками. Построены зависимости профилей концентрации и положения межфазной границы от времени для случаев подогрева сверху/снизу.

Рассмотрена задача о термодиффузионном разделении в двухфазной бинарной смеси на примере системы циклогексан-метанол. Фазовая диаграмма данной смеси показана на рисунок 14.а. Видно, что при температуре $T_0 = 25^\circ\text{C}$ слои 1 и 2 образованы

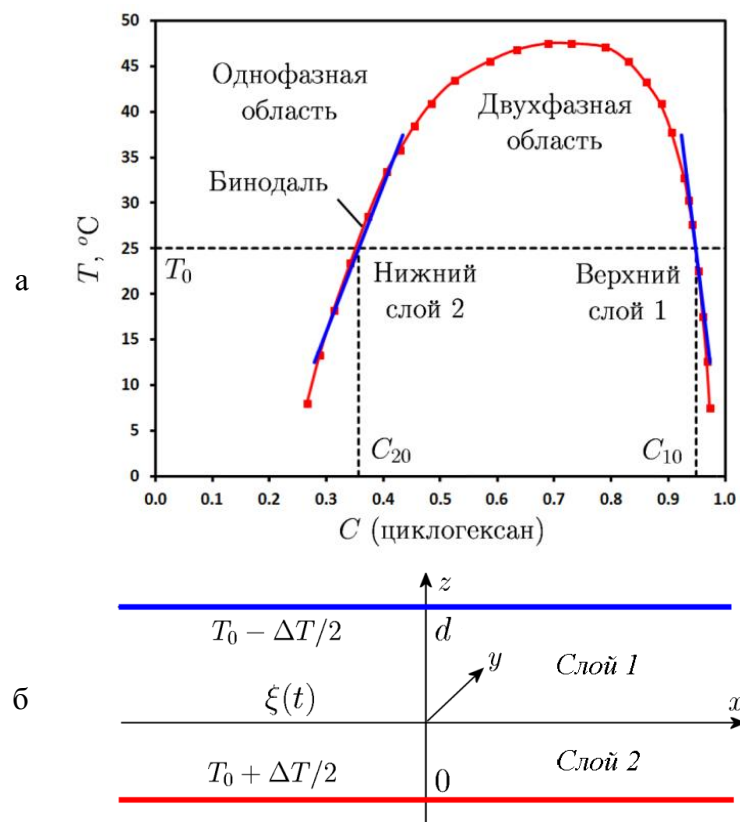


Рисунок 14 – Фазовая диаграмма смеси циклогексан-метанол (а), двухслойная система (б)

фазами с массовой долей (концентрацией) циклогексана $C_{10} = 0.95$ и $C_{20} = 0.36$ соответственно. В поле силы тяжести смесь образует двухслойную систему с менее плотной фазой в верхнем слое и более плотной – в нижнем (рисунок 14.б). При возникновении разности температур ΔT между нижней и верхней границами слоя вертикальный градиент температуры приводит к возникновению градиентов концентрации в каждом слое благодаря эффекту Соре. Со временем происходит разделение смеси, при этом начальное положение границы раздела $z = \xi(t)$ между фазами

может измениться. Выполнено численное моделирование нестационарного процесса разделения в двухфазной смеси с подвижной границей раздела. Распределение температуры T_i и концентрации C_i циклогексана в фазе i описывается системой уравнений

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} + D_{Ti} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь χ – коэффициент температуропроводности, D_i – коэффициенты диффузии, D_{Ti} – коэффициенты термодиффузии. В качестве начальных условий при $t = 0$ задаются постоянные температура и концентрации циклогексана в фазах, а также положение границы раздела; на подвижной границе раздела $z = \xi(t)$ – равенство температур, баланс тепла с учётом теплоты фазового перехода, условия фазового равновесия и баланс конвективных и диффузионных потоков массы; на твёрдых стенках $z = 0, d$ – температура и условие отсутствия диффузионного потока. Задача решалась численно в системе Ansys Fluent 14.5. Расчёты проводились для слоя толщиной $d = 10$ мм.

На рисунке 15 показана зависимость отклонения границы раздела от начального положения $h = 5$ мм для случаев подогрева снизу ($\Delta T = 25$ К) и сверху ($\Delta T = -25$ К).

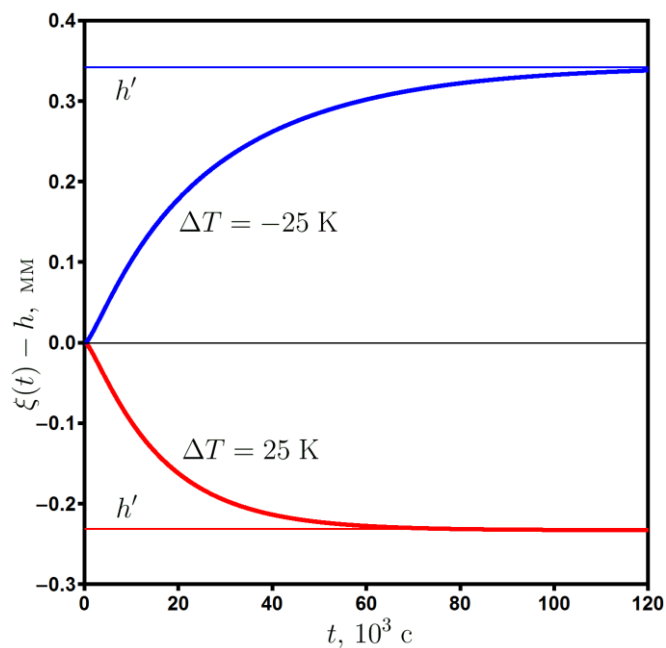


Рисунок 15 – Зависимость положения границы раздела от времени

Прямые линии соответствуют предельным значениям, вычисленным на основе точного решения, описывающего стационарное состояние с линейными профилями температуры и концентрации. Как видно, для данной системы граница смещается в сторону повышения температуры.

Временная эволюция профилей, характеризующих отклонения концентраций от средних значений, представлена на рисунке 16. Видно, что со временем в системе устанавливается стационарное состояние с линейным распределением концентрации.

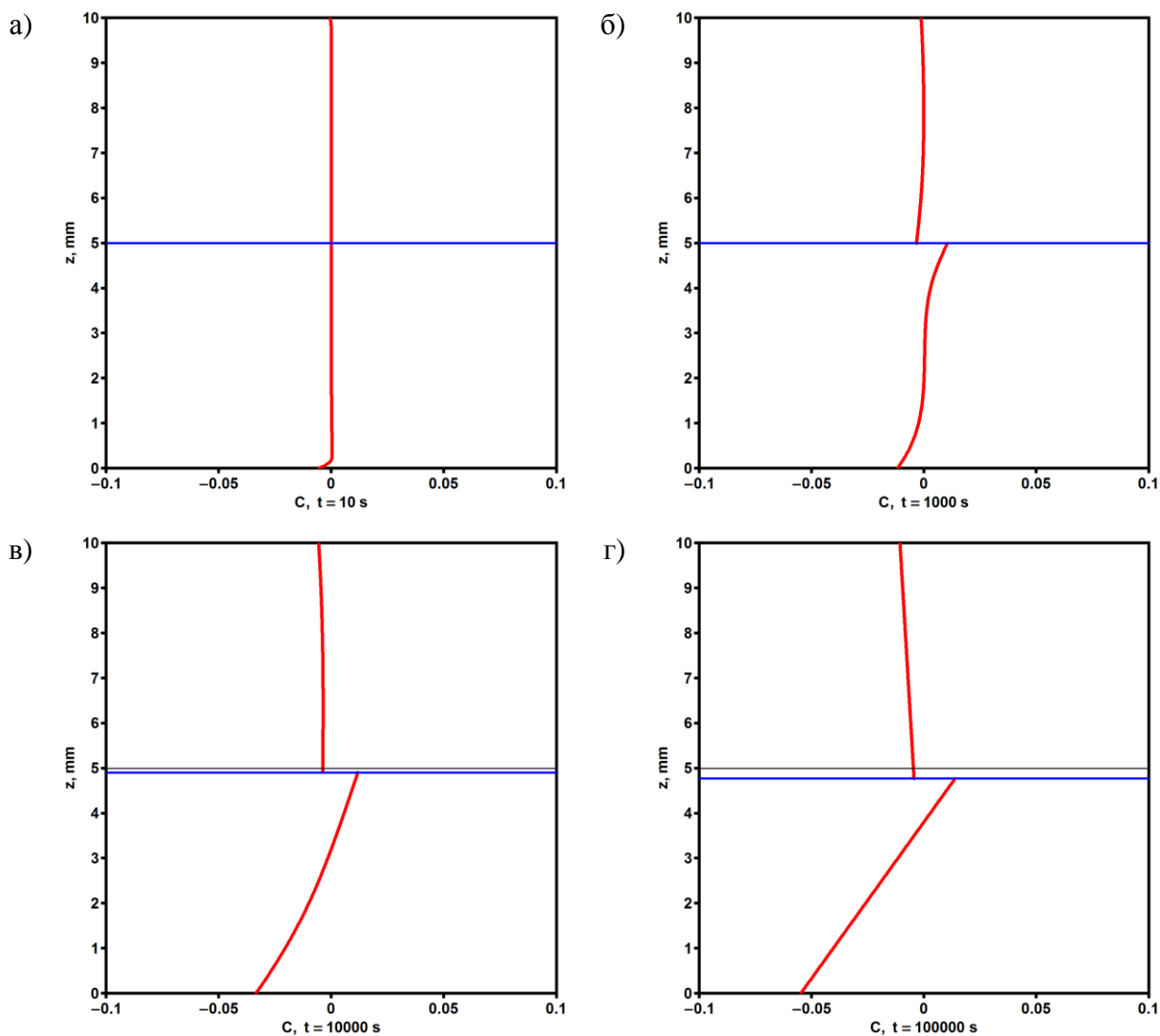


Рисунок 16 – Эволюция профилей концентрации и положения границы раздела со временем при подогреве снизу $\Delta T = 25$ К: а) $t=10$ с., б) $t=10^3$ с., в) $t=10^4$ с., г) $t=10^5$ с.

3 Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных озёрах. Вывод критериев смены режимов вертикального перемешивания в стратифицированных водоёмах

Для оценки картины ветровых течений в стратифицированных озерах (в вертикальной плоскости) применяется 2D модель. Установлено, что в зависимости от плотностной стратификации и силы ветра формируются одна или две циркуляционные зоны (в вертикальной плоскости). Получен критерий, определяющий условие смены режима ветровых течений в стратифицированных озерах. Рассмотрены условия, при которых нарушается меромиктия озера Шира.

4 Разработаны малоразмерные численные модели исследования сезонного протаивания вечной мерзлоты, основанные на решении одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых слоёв и аннулированием существующих

Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Математическая модель основана на уравнениях теплопроводности для мерзлых и талых слоёв. Рассматриваются территории, на которых имеются озёра или болота. Выделяются следующие слои в вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты: талый грунт, мёрзлый грунт, вода, лёд, снег. Предлагается упрощённый численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоёв.

Можно выделить два типа водоёмов: водоёмы, которые зимой промерзают до дна, а летом лёд тает по всей глубине и протаивают верхние слои дна («мелкие» водоёмы); б) водоёмы, которые зимой не замерзают до дна («глубокие» водоёмы). Возможны различные варианты расположения мёрзлых и талых слоёв (таблица 2).

Таблица 2. Варианты расположения мерзлых и талых слоев в болотно-озерных ландшафтах

№ варианта	Вода	Лёд (снег)	Вода	Талый грунт	Мёрзлый грунт	Талый грунт	Мёрзлый грунт	Талый грунт
1	+					+	+	+
2		+	+			+	+	+
3		+			+	+	+	+
4		+					+	+
5	+	+					+	+
6	+	+			+	+	+	+

7	+			+	+	+	+	+
8	+	+	+			+	+	+

Для «глубоких» озёр возможны три варианта:

1. слой воды, слой талого грунта, слой мёрзлого грунта, слой талого грунта;
2. слой снег - лёд, слой воды, слой талого грунта, слой мёрзлого грунта, слой талого грунта;
3. слой воды, слой льда, слой воды, слой талого грунта, слой мёрзлого грунта, слой талого грунта.

Для «мелких» водоёмов рассматриваются семь вариантов (варианты 1-7). При переходе с одного варианта на другой слои добавляются или исключаются. На рисунках 17, 18 показаны вертикальные структуры для вариантов 6, 7.

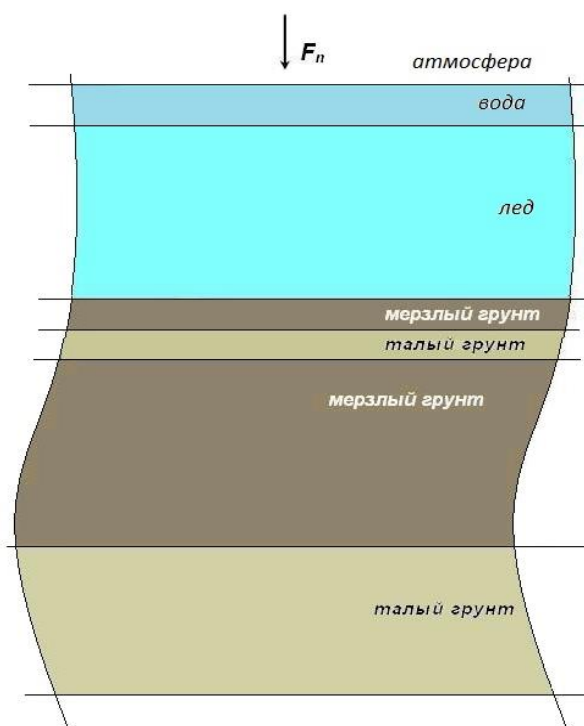


Рисунок 17 – Вертикальная структура для варианта 6

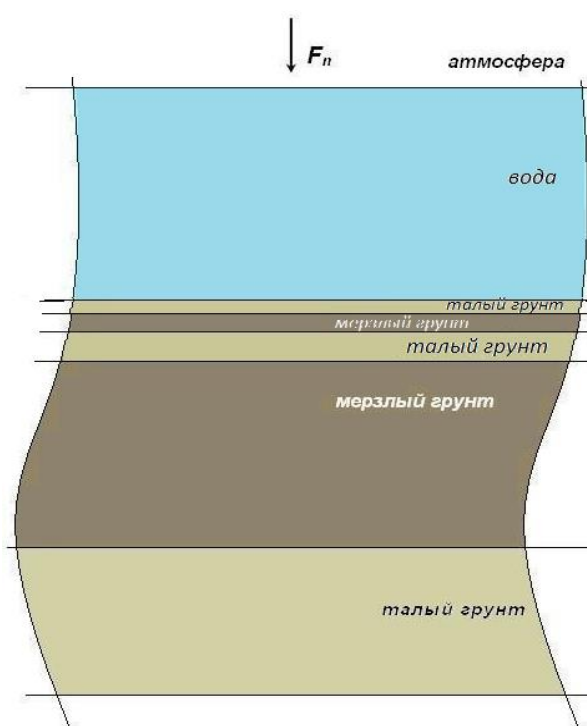


Рисунок 18 – Вертикальная структура для варианта 7

Предложенный численный алгоритм позволяет описать годовую динамику замерзания-оттаивания вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах и оценить влияние изменения климата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий (термостабилизации приборов и систем жизнеобеспечения на борту МКС), нанесении тонких покрытий, оценке скоростей движения жидкости в узких каналах с учётом смазки их стенок; при моделировании однонаправленных течений в океанах, когда необходим учёт нелинейной силы плавучести, расчётах конвекции в озёрах и водохранилищах; при верификации программных комплексов расчётов сложных течений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные публикации

1. *Andreev V. K.* The 2D Motion of Perfect Fluid with a Free Surface // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2015. – Vol. 8, № 1. – P. 3-6.
2. *Andreev V. K.* Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier-Stokes Equations // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2015. – Vol. 8, № 2. – P. 140 -147.
3. *Ryzhkov I. I., Stepanova I. V.* On thermal diffusion separation in binary mixtures with variable transport coefficients // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 86. – P. 268-276.
4. *Chesnokov A. A., Stepanova I. V.* Stability analysis of shear flows in a Hele-Shaw cell // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 26. – P. 320-328.
5. *Legros J. C., Gaponenko Y., Mialdun A., Triller T., Hammon A., Bauer C., Koehler W., Shevtsova V.* Investigation of Fickian diffusion in the ternary mixtures of water-ethanol-triethylene glycol and its binary pairs // Phys.Chem.Chem.Phys. – 2015. – Vol. 17. – P. 27713-27725.
6. *Bekezhanova V. B., Shefer I. A.* On spatial perturbations of flow in the vertical channel in microconvection model // Microgravity Science and Technology (направлена в печать).
7. *Bekezhanova V. B., Shefer I. A.* Stability of microconvective flows in vertical channel // Book of abstracts of the Sixth International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics. – Paris, 2015. – P. 138.
8. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.* Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface // Fluid Dynamics Research (направлена в печать).
9. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Rezanova E. V.* Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface // Book of abstracts of the Sixth International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics. – Paris, 2015. – P. 145.
10. *Magdenko E. P.* Axisymmetric Thermocapillary Motion in a Cylinder at Small Marangoni Number // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2015. – Vol. 8, № 3. – P. 303-311.
11. *Канцов О. В.* Локальный алгебраический анализ дифференциальных систем // Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 183, № 3. – С. 342-358.

12. *Шмидт А. В.* Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи // ПМТФ. – 2015. – Т. 56, №3. – С. 82-88.
13. *Капцов О. В., Шмидт А. В., Фомина А. В., Черных Г. Г.* Автомодельное вырождение безымпulsiveного турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 1. – С. 84-98.
14. *Капцов О. В., Шмидт А. В.* Трехмерная полуэмпирическая модель дальнего турбулентного следа // ПММ. – 2015. – Т. 79, вып. 5. – С. 653-662.
15. *Магденко Е. П.* Конвекция Марангони в конечном цилиндре // ПМТФ (принята в печать).
16. *Андреев В. К.* Об одной обратной задаче для двумерных уравнений Навье – Стокса // Тез. докл. междунар. конф. “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”. – Улан-Удэ, 2015. – С. 44-45.
17. *Андреев В. К.* Двумерное термокапиллярное движение с границей раздела // Тез. докл. VIII Междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математика, механике и физике”. – Новосибирск, 2015. – С. 75.
18. *Андреев В. К.* Об условиях существования однонаправленных течений бинарных смесей // Материалы научной конф. “Герценовские чтения – 2015”. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 12-18.
19. *Андреев В. К., Степанова И. В.* Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека – Буссинеска // МЖГ (принята в печать).
20. *Бекежанова В.Б.* О микроконвективных течениях в вертикальном канале // Сб. трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 2015. – С. 422-424.
21. *Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н.* О конечно-амплитудных возмущениях двухслойных течений с испарением // Материалы XVI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2015. – С. 23.
22. *Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н.* О конвективных режимах в двухслойной системе с испарением // Тез. докл. VIII Междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математика, механике и физике”. – Новосибирск, 2015. – С. 80.
23. *Белолипецкий В. М., Белолипецкий П. В.* О смене режимов ветровых течений в стратифицированных озерах // ПМТФ (принята в печать).
24. *Белолипецкий В. М., Генова С. Н.* Малоразмерная численная модель динамики вечной мерзлоты // Тез. докл. VIII Междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математика, механике и физике”. – Новосибирск, 2015. – С. 81.

25. Белолипецкий В. М., Генова С. Н. Численная модель динамики вечной мерзлоты в болотно-озерных ландшафтах // Труды Четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием “Фундаментальные проблемы воды и водных ресурсов”. – М.: ИВП РАН, 2015. – С. 95-97.
26. Козлова С. В., Рыжков И. И. Исследование процесса разделения многокомпонентных смесей в цилиндрической термодиффузионной колонне // Тез. докл. междунар. конф. “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”. – Улан-Удэ, 2015. – С. 150-151.
27. Магденко Е. П. Осесимметрическое термокапиллярное движение в цилиндре при малых числах Марангони // Тез. докл. междунар. конф. “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”. – Улан-Удэ, 2015. – С. 178.
28. Степанова И. В., Чесноков А. А. О смене режимов устойчивости течений вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу // Тез. докл. VIII Междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математика, механике и физике”. – Новосибирск, 2015. – С. 160.