Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «КРАСНОЯРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН

ГРНТИ 30.17.15

УТВЕРЖДАЮ Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

№ (ЦИТИС) АААА-А18-118011890025-2

ИНВ № 0727/2017

_____Волков Н.В. ______201___г.

ОТЧЕТ

О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА

<u>«КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ</u> <u>ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИХ</u> <u>ОБЪЕКТОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ»</u>

(промежуточный)

Номер проекта в ИСГЗ 0356-2016-0727

Приоритетное направление: Индустрия наносистем

Программа ФНИ (номер и наименование): <u>III.22 Механика жидкости, газа и плазмы, многофазных и неидеальных сред, механика горения, детонации и взрыва</u>

Протокол Ученого совета _____

№_____ от «__» _____ 201__ г.

Руководитель проекта

д.ф.-м.н., профессор

В.К. Андреев

"___" ____ 2017 г.

Красноярск, 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы		
д.фм.н., профессор	(подпись,дата)	- В.К. Андреев
Исполнители:		
г.н.с., д.фм.н.	(подпись,дата)	В.М. Белолипецкии
в.н.с., д.фм.н.	(подпись,дата)	О.В. Капцов
в.н.с., д.фм.н.	(подпись,дата)	В.И. Сенашов
с.н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	В.Б. Бекежанова
с.н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	С.Н. Генова
с.н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	Л.А. Компаниец
с.н.с., д.фм.н.	(подпись,дата)	А.А. Родионов
с.н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	И.В. Степанова
н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	М.В. Ефимова
н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	Ю.В. Шанько
н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	А.В. Шмидт
н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	- Т.В. Якубайлик

н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	Е.П. Магденко
н.с., к.фм.н.	(подпись,дата)	Е.Н. Черемных
Старший инженер	(подпись,дата)	Н.Ф. Ильина
Нормоконтролер	(подпись,дата)	А.В. Вяткин

Отчёт 30 с., 16 рис., 2 прил.

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТЕРМОДИФФУЗИЯ, ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОСТЬ, МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ СРЕДЫ, ТОНКИЕ ПЛЁНКИ, КРИЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Объектом исследования являются природные и технологические процессы, в которых присутствуют свободные границы или поверхности раздела.

Цель проводимых научных работ – математическое и численное моделирование задач механики с поверхностями раздела в неклассических моделях механики: построение точных решений, анализ устойчивости, разработка вычислительных алгоритмов и комплексов программ.

В результате исследований за отчётный период построены на основе метода симметрий и развитой техники изучения совместности дифференциальных систем новые точные решения уравнений жидких сред (идеальной жидкости и газа, конвекции, термодиффузии, турбулентного следа); дан анализ устойчивости как положений равновесия, так и стационарных течений с учётом влияния термокапиллярных сил; разработаны комплексы программ расчётов конвективных течений с поверхностями раздела, стратифицированных течений в солёных озёрах. Все результаты являются новыми.

Основные характеристики: точные решения содержат физические параметры и могут являться тестовыми; результаты верификации разработанных программ показывают их высокую эффективность при численных расчётах конкретных практически важных задач; результаты по устойчивости позволяют определить области параметров сред, для которых течение физически может быть реализовано.

4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
1 Разработка комплекса программ расчёта движений с границами раздела и их устойчивости в случае плоской и вращательной симметрии
2 Анализ переопределённой системы, описывающей специальный класс двумерных
в погранслойном приближении
3 Разработка комплекса вычислительных методов и алгоритмов для выяснения значимых
механизмов стратификации гидрофизических параметров озёр различной глубины и
солёности
Оценка влияния изменения глобального климата на вертикальную структуру вечной
мерзлоты на основе разработанных малоразмерных численных
моделей
ЗАКЛЮЧЕНИЕ
ПРИЛОЖЕНИЕ А
ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидких сред с поверхностями раздела, в частности со свободной границей, является весьма трудным и своеобразным разделом механики сплошных сред. Достаточно упомянуть классические задачи теории поверхностных и внутренних волн. В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать поведение таких сред при пониженной гравитации: получение монокристаллов методом зонной плавки, описание явлений в сварочных аппаратах и т. д. При этом существенное влияние на поведение жидкости оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации. Аналогичные задачи возникают и в земных условиях: химической технологии, легировании поверхностных охлаждения слоёв. плёночных течениях, используемых для приборов. И в нанотехнологиях. Кроме того, поверхности раздела возникают и при изучении гидрофизики озёр, водохранилищ и структуры вечной мерзлоты в условиях меняющегося климата.

Более точный учёт различных факторов, влияющих на динамику жидкости, требует привлечения новых математических моделей и постановки начально-краевых задач для них. Поэтому возникает необходимость построения нетривиальных точных решений, исследования вопросов устойчивости и разработки эффективных численных алгоритмов для этих моделей.

В связи с вышесказанным, в отчетный период проводились исследования течений жидких сред с поверхностями раздела, причём учитывалось влияние массопереноса, турбулентности.

Настоящий отчет является промежуточным по теме: «Комплексный анализ гидродинамических аспектов функционирования природных систем и технических объектов в экстремальных условиях».

6

1 Разработка комплекса программ расчёта движений с границами раздела и их устойчивости в случае плоской и вращательной симметрии.

В рамках модели Обербека – Буссинеска изучена задача о совместном течении жидкости и парогазовой смеси в миниканале с твёрдыми стенками. Среды контактируют вдоль термокапиллярной границы раздела Г, которая остаётся недеформируемой в процессе движения и допускает перенос массы за счёт испарения/конденсации. При моделировании течения в газовой фазе дополнительно учитываются эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии (эффекты Дюфура и Соре соответственно). Пар считается пассивной примесью, диффузия пара в газе и перенос тепла описываются уравнениями

$$\mathbf{v}_{g} \cdot \nabla C = \frac{1}{\operatorname{Pe}} \left(\Delta C + \alpha \Delta T_{g} \right), \quad \mathbf{v}_{g} \cdot \nabla T_{g} = \frac{\chi}{\operatorname{Pr}\operatorname{Re}} \left(\Delta T_{g} + \delta \Delta C \right).$$

Здесь $\mathbf{v}_{g} = (u_{g}, v_{g}, w_{g})$ – вектор скорости парогазовой смеси, C – функция концентрации пара, Ре – диффузионное число Пекле, α – безразмерный параметр Соре, T_{g} – температура парогазовой смеси, χ – отношение коэффициентов температуропроводности, $\chi = \chi_{g}/\chi_{l}$, Рг – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, δ – безразмерный параметр Дюфура. На границе раздела Г справедливы обычные уравнения равенства скоростей и температуры, динамическое и кинематическое условия (конвективный поток массы в последнем не учитывается), а в условии баланса энергии учитывается диффузионный перенос массы через поверхность раздела за счёт испарения:

$$T_{lx} - kT_{gx} - \partial kC_x = -\lambda M, \qquad M = -(C_x + \alpha T_{gx}), \tag{1}$$

где M – массовая скорость испарения, k – отношение коэффициентов теплопроводности, $k = k_g/k_l$. На границах канала заданы условия прилипания, для функции температуры – условия теплоизоляции, для функции концентрации пара могут быть заданы отсутствие потока пара или условие полной абсорбции пара

$$\frac{\partial C}{\partial n} + \alpha \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$
 или $C = 0$, (2)

На основе трёхмерного обобщения решения Остроумова – Бириха

$$u_{l,g} = u_{l,g}(x, y), \quad v_{l,g} = v_{l,g}(x, y), \quad w_{l,g} = w_{l,g}(x, y),$$

$$p_l = -F_l xz + q_l(x, y), \quad p_g = -F_g xz + q_g(x, y), \quad ,$$

$$T_{l,g} = -Az + \Theta_{l,g}(x, y), \quad C = Bz + \Phi(x, y),$$
(3)

где A, B – продольные градиенты температуры и концентрации, соответственно, $F_{l,g}$ – постоянные, изучено влияние гравитации и толщины жидкого слоя на структуру полей скорости и температуры в системе этанол-азот при различных граничных условиях для функции концентрации пара. Для определения характеристик скорости, температуры и концентрации трёхмерного течения исходная задача сведена к цепочке двумерных задач, требующих численного решения:

1. Задача о нахождении поперечных компонент скорости ($u_{l,g}$, $v_{l,g}$). Исходные уравнения и граничные условия переписываются в терминах «функция тока-вихрь», при этом для функции вихря ставятся условия типа условий Тома.

2. Задача о нахождении продольных компонент скорости *w*_{*l*,*g*} из соответствующих проекций уравнений импульса на ось *z*.

3. Задача о нахождении неизвестных функций $\Theta_{l,g}(x, y)$, входящих в формулы для температур $T_{l,g}$, см. (3). Уравнения теплопроводности в каждой фазе и граничные условия переписываются в терминах функций $\Theta_{l,g}$, учитывая линейную зависимость функций $T_{l,g}$ от продольной координаты *z*.

4. Задача о нахождении неизвестной функции $\Phi(x, y)$, входящей в формулу для концентрации пара в газе *C*, см. (3). Уравнение диффузии и соответствующие граничные условия переписываются в терминах функции Φ , учитывая линейную зависимость функции *C* от продольной координаты *z*.

Численные процедуры для решения полученных двумерных задач основаны на продольно-поперечной разностной схеме (метод переменных направлений). Условия непрерывности температуры и переноса тепла (1) используются для определения температуры на поверхности раздела, и, следовательно, температур в каждой фазе. Условия непрерывности тангенциальных скоростей и соответствующая проекция динамического условия на тангенциальный вектор позволяют определить значения w_i и w_g на поверхности раздела и в обеих фазах. Проекции динамического условия на вектор нормали и второй касательный вектор используются при вычислении вихря ω_1 и ω_2 .

На языке Фортран реализован авторский код для расчёта характеристик трёхмерного течения с помощью описанного численного алгоритма. Визуализация результатов проводится с помощью инструментальных средств пакета прикладных программ MathLab. Программный комплекс позволяет визуализировать трёхмерные картины течений (рисунок 1а), включая траектории частиц жидкости и парогазовой смеси (рисунок 1б), распределения температуры (рисунок 2) и концентрации (рисунок 3); распределения массовой скорости испарения по ширине канала (рисунок 4); проекции полей скорости и двумерное поле температуры в любом заданном поперечном сечении расчётной области (рисунок 5). Рассчитаны основные характеристики течений в условиях нормальной гравитации ($g_0 = 9.81 \text{ м/c}^2$) и микрогравитации для обоих типов граничных условий (2).



 Рисунок 1 - Структура поля скорости в миниканале при испарении в условиях микрогравитации g = g₀ ⋅ 10⁻² м/c², A = 100 К/м при условии полной абсорбции пара на границах канала:
 (a) – векторное поле, вид сверху со стороны продольной оси течения,
 (б) – проекции трубок тока на поперечные сечения и траектории частиц

В слабом силовом поле при умеренной тепловой нагрузке течение сохраняет симметричную двухвихревую структуру в каждом слое (рисунок 1). В земных условиях в верхнем слое вблизи межфазной границы возникают два дополнительных вихря, а в нижнем – наблюдается возвратное движение жидкости. В обеих конфигурациях в газопаровой среде формируется неустойчивая температурная стратификация с характерным тепловым валом в центральной части канала (рисунок 2). При использовании условия нулевого потока пара на твёрдых границах для течений при нормальной гравитации характерно формирование дополнительных угловых пристеночных вихрей.



Рисунок 2 - Структура полей температуры при нормальной гравитации $g = g_0 \text{ м/c}^2$, A = 100 К/м: (а) – при условии полной абсорбции пара на стенках; (б) – при условии отсутствия потока пара на стенках



Рисунок 3 - Структура полей концентрации в условиях микрогравитации $g = g_0 \cdot 10^{-2}$ м/с², A = 10 К/м: (а) – при условии полной абсорбции пара на стенках; (б) – при условии отсутствия потока пара на стенках

Для сравнения и качественной оценки характеристик режимов, возникающих при различных граничных условиях для концентрации пара, вычислялось значение массовой скорости испарения M (см. (1)). Положительные значения M соответствуют переносу массы через границу раздела за счёт испарения, отрицательные – за счёт конденсации. Оказалось, что условие отсутствия потока пара (первое условие в (2)) обеспечивает лучшее соответствие теоретических данных результатам экспериментов. Условие полной абсорбции C = 0 не позволяет описать явление пристеночной конденсации (см. рисунок 4а), наблюдаемое в экспериментах. Кроме того, при использовании условия нулевого

потока пара максимальные значения *M* достигаются в центральной части канала, что качественно соответствует тепловой картине течения – наличию теплового вала (см. рисунок 26).



Рисунок 4 - Массовая скорость испарения при микрогравитации ($g = g_0 \cdot 10^{-2}$ м/c², сплошная линия) и нормальной гравитации ($g = g_0$ м/c²), A = 100 К/м: (а) – при условии полной абсорбции пара на стенках; (б) – при условии отсутствия потока пара на стенках



Рисунок 5 - Проекции полей скорости и двумерное поле температуры в центральном поперечном сечении расчётной области в системе с толщиной жидкого слоя $h_l = 2.5$ мм при условии отсутствия потока пара, A = 300 K/м: (a) – в условиях микрогравитации, $g = g_0 \cdot 10^{-2}$ м/c²; (б) – при нормальной гравитации, $g = g_0$ м/c²

Было продолжено изучение линеаризованной задачи о малых возмущениях движения однослойной жидкости в конечном цилиндре с верхней свободной

деформируемой плоской границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Только теперь контейнер находится в поле силы тяжести. Поставленная задача исследована с помощью тау-метода для случаев, когда свободная граница деформируема и 1) возмущения монотонны; 2) возмущения немонотонны. В первом случае, когда в цилиндре находится трансформаторное масло, построены нейтральные кривые, отображающие зависимость критических чисел Марангони (Mn) от геометрии контейнера и физических параметров жидкости, см. рисунок 6 (Mn(α), где α – отношение высоты цилиндра к его радиусу).



Рисунок 6 - Нейтральная кривая в зависимости от α : s = 2, We = 10^4

Во втором случае получена зависимость мнимой части комплексного декремента от критических значений чисел. Показано, что с ростом температуры на нижнем основании цилиндра мнимая часть комплексного декремента возрастает линейно и характер зависимости не изменится при варьировании какого-либо параметра системы. Колебания во всех случаях отсутствуют.

Исследовано инвариантное решение уравнений двумерного конвективного движения в модели Обербека – Буссинеска вида

$$u = W(y,t), \quad \theta = -A(y,t)x + T(y,t), \quad p = -B(y,t)x + P(y,t).$$

Оно интерпретируется как однонаправленное движение жидкости в плоском горизонтальном слое. При этом на нижней неподвижной стенке (подложке) задано нестационарное поле температур (ранее рассматривались задачи только при стационарном его распределении). Верхняя граница может быть твёрдой стенкой, как теплоизолированной, так и нет, или свободной границей.

Кроме того, изучено движение двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела. На свободной границе и поверхности раздела поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Для функций *W*, *A*, *T*, *B*, и *P* сформулированы соответствующие начально-краевые задачи, в общем случае они оказались обратными, поскольку часть горизонтального градиента давления является искомой функцией времени. Получены априорные оценки решений и указаны достаточные условия на граничные значения температур, при которых с ростом времени движение стремится к стационарному режиму. Приведены результаты расчётов, показывающие различные способы управления движением с помощью задания (нестационарной, в том числе и разрывной) температуры на стенках.

На рисунке 7 изображён профиль безразмерных скоростей $w_j(y,t)$ для системы вода-жидкий CO₂, когда Q(t) = 0 (т. е. расход равен нулю и движение происходит только за счёт термогравитационных сил), продольный градиент температуры на нижней стенки $A_1(t)$ – разрывная функция, а на верхней – $A_2(t) = 0$. Видно, что при t = 15 жидкости покоятся, при t = 50 ($A_1(t) = -1$) профиль антисимметричен профилю при t = 30 ($A_1(t) = 1$), а при t = 70 движение затухает. Следовательно, задавая различный вид градиента температуры на стенке, можно влиять на характер течения.



Рисунок 7 - Профиль безразмерных скоростей $w_i(y,t)$

Рассмотрены уравнения нестационарного одномерного движения бинарной смеси, плотность которой зависит от температуры и концентрации по линейному закону. Предполагается, что температура θ и концентрация *c* меняются по продольной координате *x* линейно: $\theta = A(t, y)x + B(t, y)$, c = N(t, y)x + M(t, y). При подстановке этих условий в исходные уравнения и постановке граничных условий (прилипания, распределения температуры на стенках, отсутствия потока вещества) и начальных условий для всех функций получается пять отдельно решаемых задач для нахождения полей скорости, температуры и концентрации. Давление восстанавливается через найденные функции температуры и концентрации. Построено решение соответствующей стационарной задачи.

На рисунке 8 приведены поверхности для температуры (слева) и концентрации (справа), соответствующие физическим параметрам смеси вода-пропанол с концентрацией пропанола 70 %. Несмотря на то, что функция B(y) в выражении для температуры представляет собой полином седьмого порядка, поверхность $\theta(x, y)$ близка к линейной. Как видно из рисунка, максимальная концентрация достигается в середине слоя.



Рисунок 8 - Распределение температуры (слева) и концентрации (справа) для смеси вода-хлорид натрия

Течение, удовлетворяющее условию замкнутости потока, имеет три зоны разной интенсивности (рисунок 9).



Рисунок 9 - Распределение скорости в зависимости от тепловой нагрузки на верхней стенке (слева) и на нижней стенке (справа)

Исследовано влияние тепловой нагрузки (градиента температуры A(y) вдоль горизонтальной оси), приложенной на верхней и на нижней стенке канала, на функцию скорости. Слева на рисунке 9 показано изменение скорости при A = -0.035, 0, 0.035 для y = 0. Справа – при A = -0.0025, 0, 0.0025 для y = 1. Видно, что зависимость от тепловой нагрузки несимметрична. При одинаковом по модулю градиенте кривые 1 и 3 на обоих рисунках демонстрируют разную интенсивность течения.

Непосредственными расчётами показано, что скорость перемешивания не зависит от значений функции B(y) на границе слоя. Тем самым управлять конвективным процессом в данном случае можно с помощью единственного параметра: разности тепловых нагрузок на стенках канала.

2 Анализ переопределённой системы, описывающей специальный класс двумерных движений идеальной жидкости. Групповой анализ k-w модели турбулентности в погранслойном приближении

Предложен численный метод использования высших симметрий и инвариантных многообразий для поиска решений уравнений с частными производными. Рассмотрены примеры применения предложенного подхода к уравнениям Кортевега – де Фриза, sin-Гордон и sh-Гордон. Построены графики соответствующих решений.

Решена задача Л. В. Овсянникова об исследовании переопределённой системы

$$u_{t} + uu_{x} + vu_{y} + p_{x} = 0, \quad v_{t} + uv_{x} + vv_{y} + p_{y} = 0,$$

$$u_{x} + v_{y} + p_{x} = 0, \quad p_{t} + up_{x} + vp_{y} = 0.$$
(4)

Данная система описывает течения идеальной жидкости с сохранением давления вдоль траекторий, а также двумерные изотермические движения политропного газа.

Условие сохранения давления вдоль траекторий позволяет интерпретировать каждое решение рассматриваемой системы как течение жидкости со свободной границей, в качестве которой можно выбрать любую из изобар.

Систему (4) можно записать в лагранжевых координатах следующим образом:

$$z_{\xi} = i z_{tt}, \quad \overline{z}_{\eta} = -\frac{z_{\eta} \overline{z}_{tt} + 2}{z_{tt}}, \tag{5}$$

где комплекснозначная функция $z(\xi, \eta) = x + iy, \ \eta = p.$

Доказана теорема, в которой утверждается, что все решения системы (5) являются решениями одной из трёх систем A, B, C. B систему A входят уравнения (5) и $z_{u\eta} = 0, z_{ut} = 0.$ Система B включает уравнения (2) и $z_{ut} = iNz_u, z_{u\eta} = iNz_\eta - iN^{-2}N_\eta z_u$, где $N(\eta)$ – произвольная гладкая функция. Система C состоит из уравнений (5) и

$$z_{tutt} = 2inz_{ttt} + (n^2 + m)z_{tt}, \qquad z_{t\eta} = \frac{z_{\eta}}{z_{tt}} - \frac{2i[z_{tt}^2 - 2inz_{tt}z_{ttt} - (n^2 + m)z_{tt}^2]}{z_{tt}(iz_{tt}\overline{z}_{ttt} - i\overline{z}_{tt}z_{ttt} - 2nz_{tt}\overline{z}_{tt})},$$

где *п* и *m* – константы.

Каждая из трёх систем полностью проинтегрирована. Среди найденных решений можно отметить: аналог волн Гёрстнера для движения жидкости в отсутствие тяжести, так называемые птолемеевские течения (рисунок 10), пульсирующее кольцо жидкости со свободными границами.



Рисунок 10 - Изобары (красный) и траектория выбранной частицы (синий) для одного из птолемеевских течений

Показано, что заданная в лагранжевых координатах линия $\eta = \text{const}$ будет являться движущейся твёрдой стенкой при выполнении условия

$$\kappa_t \left(\frac{\kappa_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \right)_{\xi} - \kappa_{\xi} \left(\frac{\kappa_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \right)_t = 0,$$

где кривизна

$$\kappa = \frac{x_{\xi} y_{\xi\xi} - y_{\xi} x_{\xi\xi}}{(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)^{3/2}},$$

и условия, что либо $\kappa_{\xi} \neq 0$, либо $\kappa_{\xi} = \kappa_t = 0$.

Изучена задача о течении в дальнем турбулентном следе за телом на основе *k*- ω модели. Известно, что классическая версия *k*- ω модели обладает неудовлетворительными

прогностическими свойствами применительно к задачам свободной турбулентности и в основном используется для расчёта пристенных турбулентных течений. Поэтому для описания течения в дальнем турбулентном следе привлекалась модификация классической версии *k-* ω модели, предложенная в монографии Wilcox D. C. (2006)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^s k}{\omega} \frac{\partial U_1}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma^* \frac{y^s k}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{k}{\omega} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 - \beta^* k \omega,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{y^s k}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 + \sigma_D \omega^{-1} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

Искомыми функциями модели являются: $U_1(x, y)$ – дефект продольной осреднённой компоненты скорости, k(x, y) – кинетическая энергия турбулентности и $\omega(x, y)$ – удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. В плоском случае s = 0 и s = 1 для осесимметричного случая. Эмпирические постоянные модели имеют следующие значения: $\sigma = 0.5$, $\sigma = 0.6$, $\beta = 0.0708$, $\sigma = 0.09$, $\gamma = 0.52$,

$$\sigma_{\scriptscriptstyle D} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \leq 0, \\ 0.125, \text{ если } \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} > 0. \end{cases}$$

Выполнен теоретико-групповой анализ исследуемой модели. Получена автомодельная редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Установленные законы вырождения течения согласуются с известными экспериментальными данными и результатами моделирования. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно методом стрельбы. Процедуру решения осложняло то обстоятельство, что коэффициенты системы имеют особенности. Использовалось асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. На рисунке 11 приведены результаты сопоставления расчётов для плоского турбулентного следа, полученных методом стрельбы, с экспериментальными данными, представленными в статье Wygnanski I., Champagne F., Marasli B. (1986). Имеющееся отличие по касательному рейнольдсову напряжению, по всей видимости, свидетельствует о том, что для моделирования течения следует привлекать более сложные модели турбулентности, включающие дифференциальные уравнения переноса на компоненты тензора рейнольдсовых напряжений.



Рисунок 11 - Профили дефекта осреднённой продольной компоненты скорости U_1 , нормального рейнольдсова напряжения $\langle u'u' \rangle$, касательного рейнольдсова напряжения $\langle u'v' \rangle$ и удельной диссипации энергии турбулентности W (t – автомодельная переменная, u(0) – осевое значение дефекта осреднённой продольной компоненты скорости)

Рассматриваются уравнения диффузии в общем виде

$$\boldsymbol{u}_{t}^{a} = F^{ab}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{ii}^{b} + G^{a}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u})$$

$$\tag{6}$$

где $u = (u_1, ..., u_m)$ – неизвестные функции, t, $x = (x_1, ..., x_n)$ – независимые переменные, индексы a, b = 1, ..., m, i, j = 1, ..., n; нижним индексом у функции u обозначается производная по соответствующей переменной x_i . Предполагается, что $\exists a, b : F^{ab} \neq 0$. Отметим, что система (6) описывает широкий класс диффузионных уравнений. Так, например, при m = n = 1 $F^{11} = \kappa(u^1)$ (коэффициент теплопроводности), $G^1 = (\partial \kappa / \partial u^1)(u_{x_1}^1)^2$ получаем хорошо известное одномерное уравнение нелинейной теплопроводности.

Ставится задача отыскать невырожденные точечные преобразования

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{H} = T(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathcal{H} = X(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad J = \left| \frac{\partial(T, X, U)}{\partial(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right| \neq 0, \tag{7}$$

переводящие класс уравнений (6) в эквивалентный класс

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{\tilde{i}}^{a} = \tilde{F}^{ab}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{u}})\tilde{\boldsymbol{u}}_{\tilde{i}\tilde{i}}^{b} + \tilde{G}^{a}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{u}}).$$
(8)

При решении данной задачи были доказаны две теоремы.

Теорема 1. Для любого невырожденного преобразования (7), переводящего класс уравнений диффузии (6) в эквивалентный класс (8), выполнено T = T(t).

Теорема 2. Для любого невырожденного преобразования (7), переводящего класс уравнений диффузии (6) в эквивалентный класс (8), при $n \ge 2$ выполнено X = X(t, x). При n = 1 для сохранения этого свойства необходимо потребовать дополнительно, чтобы функции F^{ab} не зависели от ∇u , т. е. $F^{ab}_{u_i^c} = 0$.

Преобразования ϕ помогают сократить громоздкие расчёты при построении системы определяющих уравнений при исследовании систем вида (6) методами группового анализа. Если в системе (6) m = 2, n = 3, $u^1 = \theta$, $u^2 = c$ (θ – температура, c – концентрация одного из компонентов бинарной смеси), матрица коэффициентов при старших производных и функция *G* имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} \chi & D^{\delta} \\ D^{\theta} & D \end{pmatrix}, \qquad G^{a} = F_{u^{d}}^{ab} u_{i}^{b} u_{i}^{d},$$

где χ и D – коэффициенты температуропроводности и диффузии, D^{δ} и D^{θ} – параметры, отвечающие за влияние эффектов Дюфура и Соре, соответственно. По параметру d предполагается суммирование. Все коэффициенты считаются функциями параметров состояния. Уравнения (6) с выписанными функциями представляют собой модель тепломассопереноса с учётом перекрестных эффектов Соре и Дюфура, зависящих от температуры и концентрации. При решении задачи групповой классификации полученных уравнений относительно четырёх коэффициентов переноса следует строить инфинитезимальный оператор и его первое и второе продолжения. Благодаря теоремам 1 и 2, можно сразу считать, что в описываемом операторе коэффициент при ∂_i зависит только от времени, а коэффициенты при $\partial_{x'}(i=1,2,3)$ не зависят от θ и c. Это значительно упрощает выкладки и позволяет вывести определяющие уравнения, решение

которых при произвольных классифицируемых параметрах даёт основную алгебру операторов

$$L_0 = \left\langle \partial_t, \partial_{x^i}, 2t\partial_t + \sum_{i=1}^3 x^i \partial_{x^i}, x^j \partial_{x^j} - x^i \partial_{x^j} \right\rangle, \ i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j.$$

Для определения спецификаций коэффициентов переноса и операторов, расширяющих основную алгебру L₀, получено 18 классифицирующих уравнений, решение которых планируется строить в дальнейшем исследовании.

Получено описание семейства двупорожденных подгрупп в группах Шункова. На основе их строения получены две характеризации групп Шункова:

Теорема 1. Пусть G – группа Шункова без элементов третьего порядка. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то группа G также имеет почти слойно конечную периодическую часть.

Теорема 2. Пусть G – группа Шункова без подгрупп вида PSL₂(q). Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то группа G также имеет почти слойно конечную периодическую часть.

Найдена оценка снизу множества 12-апериодических слов в алфавите из двух букв: число f(n) таких слов длины п больше чем 1,99901766ⁿ (верхняя оценка 2ⁿ).

3 Разработка комплекса вычислительных методов и алгоритмов для выяснения значимых механизмов стратификации гидрофизических параметров озёр различной глубины и солёности.

В стратифицированном озере выделяют верхний (эпилимнион) и глубинный (гиполимнион) слои, в которых градиенты плотности малы. Между ними располагается слой воды (металимнион), в пределах которого градиент плотности велик. Плотностная стратификация зависит от вертикальных градиентов температуры и солёности воды. В период отсутствия ледяного покрова вертикальное перемешивание стратифицированного озера осуществляется вертикальным турбулентным обменом и ветровыми течениями. В зимний период в солёных озерах при образовании льда в результате кристаллизации воды высвобождается соль. Формируется неустойчивая плотностная стратификация, приводящая к интенсивной вертикальной циркуляции и образованию слоя конвективного перемешивания.

Общее описание озёр юга Сибири. Озеро Шира (54.25.10 с. ш., 90.13.48 в. д.) расположено в северной части республики Хакасия. Озеро имеет эллиптическую форму 9.35×5.3 км, площадь водной поверхности 35.9 км², средняя глубина 11.2 м, максимальная глубина 24 м. Оно является бессточным, основное поступление осуществляется рекой Сон. В озеро поступают бытовые стоки за счёт водопотребления поселка Жемчужный. Средняя солёность в эпилимнионе в период летней стратификации составляет около 15 г/л, а в гиполимнионе – около 19 г/л.

Озеро Шунет расположено в 8 км к юго-востоку от озера Шира. Это небольшое озеро имеет овальную (1.2х0.4 км) форму, площадь водной поверхности 0.47 км², максимальная глубина около 6.2 м. Оно бессточное. Минерализация в эпилимнионе колеблется в пределах 17-20 г/л, в гиполимнионе линейно нарастает с глубиной и у дна достигает 70 г/л.

Озеро Учум расположено на юге Сибири (Красноярский край, Россия). Это небольшое бессточное озеро имеет овальную (1.5×4 км) форму, максимальная глубина не превышает 7.9 м (2015 г.). Минерализация в эпилимнионе составляет около 24 г/л, в гиполимнионе – около 34 г/л. Имеются данные измерений вертикальных распределений температуры и солёности воды. Термическая вертикальная структура характеризуется ярко выраженной сезонной перестройкой, что обусловлено годовым циклом теплообмена между атмосферой и поверхностью озера. В отличие от озера Шира (глубиной более 20 м), в котором температура воды в придонном слое зимой изменяется мало (менее 0.5 градуса), в озере Учум температура придонного слоя зимой изменяется на несколько градусов.

Весной за счёт таяния льда формируется тонкий поверхностный слой малой солёности. В процессе ветрового перемешивания солёность в верхнем слое возрастает. В весенний и летний периоды из-за прогревания верхнего слоя воды плотностная стратификация увеличивается. Осенью происходит охлаждение водоёма, перед ледоставом температура воды мало изменяется по глубине и плотностная стратификация, в основном, определяется градиентом солёности.

Многие солёные озера относятся к меромиктическим, в которых в течение как минимум одного года водная толща не перемешивается до дна. Изменения температуры и солёности воды в стратифицированных озерах, главным образом, происходят в двух измерениях – вертикальном и временном, в горизонтальных направлениях изменения малы. Поэтому для исследования динамики вертикальной гидрофизической структуры стратифицированного озера можно использовать горизонтально однородную модель.

21

Одномерная модель для периода отсутствия ледяного покрова основывается на решении одномерных в вертикальном направлении уравнений диффузии относительно температуры и солёности воды.

В солёных озёрах при образовании льда в результате кристаллизации воды высвобождается соль, формируется неустойчивая плотностная стратификация, приводящая к интенсивной вертикальной циркуляции и образованию слоя конвективного перемешивания. Для определения толщины ледяного покрова и толщины слоя конвективного перемешивания применяются упрощённые модели. Для неглубоких озёр (Шунет, Учум) предложен способ определения температуры воды в придонном слое в предположении, что температура воды в этом слое не изменяется по глубине, но изменяется по времени.

По разработанной компьютерной модели выполнены расчёты вертикальных распределений температуры и солёности воды в озёрах Шира, Шунет и Учум. На рисунках 12-14 приведены результаты расчётов (сплошные линии) и данные натурных измерений (точки). Теоретические результаты согласуются с натурными данными в различные сезоны. Метеоданные взяты с сервера «Погода России» – архив погоды – Шира (http://meteo.infospace.ru/).



Рисунок 12 - Распределение температуры и солёности воды в о. Шунет



Рисунок 13 - Распределение температуры и солёности воды в о. Учум

Рассчитанное положение нижней границы слоя конвективного перемешивания в озере Учум $\xi_k = 5.45$ м близко к реальному 5.64 м. Измеренная толщина ледяного покрова 11 марта 2016 г – 72 см, рассчитанная – 72.35 см. Толщина льда в озере Шира, измеренная в марте 2015 г., равна 92 см, рассчитанная – 94.5 см. Показано, что сильное ветровое воздействие осенью 2014 г. в сочетании с достаточно толстым льдом зимой 2015 г. явились причиной смены режима перемешивания в данном водоёме с меромиктического (неполное перемешивание) на голомиктический (полное перемешивание).



Рисунок 14 - Распределение температуры и солёности воды в о. Шира

Предложенную простую математическую модель можно применять для прогноза многолетней динамики вертикальной термохалинной структуры солёного озера при гипотетических сценариях метеоусловий, вызванных глобальными изменениями климата (слишком тёплые или холодные сезоны, ураганные ветры и т. п.).

Оценка влияния изменения глобального климата на вертикальную структуру вечной мерзлоты на основе разработанных малоразмерных численных моделей

Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мёрзлых и талых слоёв. Рассматриваются территории, на которых имеются озёра или болота. Выделяются следующие слои в вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты: талый грунт, мёрзлый грунт, вода, лёд, снег. Предлагается упрощенный численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоёв [Belolipetskii Victor M., Genova Svetlana N. A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016, 9(2), 158-165].

Разработанные малоразмерные численные модели применялись для исследования вертикальной структуры вечной мерзлоты на острове Самойловский. Выполнено сравнение результатов расчётов с имеющимися данными натурных измерений. Проведены численные эксперименты для нескольких сценариев изменения глобального климата. Глобальное потепление вызывает изменение температурного режима грунтов, увеличивает глубину протаивания в местах распространения многолетнемёрзлых пород. Рассмотрены варианты глобального потепления с повышением среднесуточной температуры воздуха на 2 и 4 0 С. При потеплении на 2⁰ максимальная толщина сезонноталого слоя увеличивается на 10 см, при потеплении на 4⁰ – на 30 см. В первом варианте талый слой зимой полностью замерзает. Возрастают интервалы времени существования талого грунта. Однако при потеплении на 4⁰ талый слой зимой полностью не замерзает, образуется талый слой грунта (талик) между слоем сезонного промерзания и верхней границей многолетнемерзлых пород. На рисунке 15 приведены результаты расчётов глубины протаивания для различных вариантов.



Рисунок 15 - Глубина протаивания грунта для разных сценариев метеоданных

Полученные для озера Шира данные длительных измерений вектора горизонтальной скорости вдоль всего столба жидкости обрабатывались с использованием метода главных компонент. Разложение на модальные компоненты позволяет выделить репрезентативные моды и дать им физическую интерпретацию. На рисунке 16 – накопленная доля энергии и главная компонента течения, измеренная прибором ADCP600 в период 17/06/2014 – 30/07/2014.



Рисунок 16 - Накопленная доля энергии в зависимости от номера моды; годограф первой моды (главной компоненты) течения

Структура главной компоненты аналогична спирали Экмана стационарного течения однородной жидкости. Вторая и последующие моды по своей структуре аналогичны динамическим модам, характеризующим внутренние волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За период выполнения проекта получены следующие результаты

1. Построены точные решения уравнений конвекции жидких сред, в частности и с поверхностями раздела; полностью проинтегрирована система уравнений движения идеальной жидкости, когда давление постоянно вдоль траекторий; задача о течении в дальнем турбулентном следе за телом сведена к системе ОДУ и решена численными методами. Установлены достаточные условия устойчивости стационарных однонаправленных двухслойных течений в плоских слоях и состояний покоя в конечном цилиндре со свободной верхней границей.

2. На языке Фортран реализован авторский код для расчёта характеристик трёхмерного стационарного течения с поверхностью раздела. Программный комплекс позволяет визуализировать трёхмерные картины течений. На его основе изучена задача о совместном течении жидкости и парогазовой смеси в миниканале с твёрдыми стенками. При этом учитываются эффекты Дюфура и Соре.

3. Разработаны малоразмерные численные модели определения значимых механизмов неглубоких стратифицированных озёр и водохранилищ. По созданным компьютерным моделям выполнены расчёты вертикальных распределений температуры и солёности воды озёрах Шира, Шунет и Учум юга Красноярского края, а также вертикальной структуры вечной мерзлоты на острове Самойловский.

Планы работ по проекту выполнены полностью на высоком научном уровне. Это подтверждается публикациями в высокорейтинговых журналах и выступлениями на конференциях разного уровня по теме проекта.

Результаты могут быть использованы при совершенствовании жидкостных технологий (термостабилизации приборов и систем жизнеобеспечения на борту МКС), нанесении тонких покрытий, оценке скоростей движения жидкости в наноканалах; при моделировании однонаправленных течений в океанах, расчётах конвекции в озёрах и водохранилищах; при верификации программных комплексов расчётов сложных течений, определении турбулентных следов и их характеристик вдали от препятствий.

26

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Научные публикации в журналах, индексируемых в российских и международных информационно-аналитических системах научного цитирования

- Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Rezanova E.B., Shefer I.A. Stability of two-layer fluid flows with evaporation at the interface // Fluid Dynamics, 2017. – Vo.52, Iss.2 – P. 189-200 DOI 10.1134/S001546281702003X
- Kompaniets L.A., Volodko O.S., Gavrilova L.V. Analysis of vertical distribution of speed in lake shira on the basis of data processing of long-Term measurements in summer period // CEUR Workshop Proceedings, 2017. – Vol.2033. – P.202-206. DOI: 2-s2.0-85040258418
- 3. Chesnokov A., Liapidevskii V., Stepanova I. Roll waves structure in two-layer Hele–Shaw flows // Wave Motion, 2017. Vol.73. P.1-10. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2017.05.001
- Shaydurov V., Zhang S., Karepova E. Conservative difference schemes for the computation of mean-field equilibria // AIP Conference Proceedings. – V. 1895. – P. 20004. – DOI: 10.1063/1.5007358
- Andreev V. On the inverse problem of a creeping motion in thin layers // CEUR Workshop Proceedings, 2017. – Vol. 1839. – P.258-270 DOI: 2-s2.0-85020491780
- Belolipetskii V.M., Degermendzhi A.G., Genova S.N., Rogozin D.Y. Change in the circulation regime in the stratified saline Lake Shira (Siberia, Republic of Khakassia) // Doklady Earth Sciences, 2017. Vol.474, Is.2 P. 649-652 DOI: 10.1134/S1028334X17060010
- D. Y. Rogozin, M. O. Tarnovsky, V. M. Belolipetskii, V. V. Zykov, E. S. Zadereev, A. P. Tolomeev, A. V. Drobotov, Y. V. Barkhatov, N. A. Gaevsky, T. B. Gorbaneva, A. A. Kolmakova, A. G. Degermendzhi Disturbance of meromixis in saline Lake Shira (Siberia, Russia): Possible reasons and ecosystem response // Limnologica, 2017. Vol. 66 P. 12-23. DOI 10.1016/j.limno.2017.06.004
- Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Study of the convective fluid flows with evaporation on the basis of the exact solution in a three-dimensional infinite channel // Journal of Physics: Conference Series, 2017. – Vol.899, Is.3. – Art. 32006. DOI 10.1088/1742-6596/899/3/032006
- Volodko O., Kompaniets L., Gavrilova L. Analysis of the velocity profile in lake Shira in summer using principal component analysis // SGEM2017 Conference Proceedings, 2017. – V. 17, № 31. – P. 831-838. DOI: 10.5593/sgem2017/31/S15.105

- Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation // Journal of Physics: Conference Series, 2017. – Vol. 894, Is.1. – Art. 12023. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012023
- Stepanova I.V. On some group properties of heat and mass transfer equations // Journal of Physics: Conference Series, 2017. – Vol.894, Is.1. – Art. 12090. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012090
- Dementyeva E., Karepova E., Shaidurov V. The semi-Lagrangian method for the Navier-Stokes problem for an incompressible fluid // AIP Conference Proceedings. – V. 1895. – P. 110001. DOI: 10.1063/1.5007407
- Novikov A.E., Novikov E.A., Rybkov M.V. An algorithm of variable structure based on three-stage explicit-implicit methods // Siberian electronic mathematical reports-sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya, 2017. – Vol. 14. – P. 433-442. DOI: 10.17377/semi.2017.14.036
- Korobko A.V., Korobko A.A., Yakubaylik T.V. Information modeling of temporal spatial data for ecological monitoring of the krasnoyarsk reservoir // CEUR Workshop Proceedings, 2017. – Vol. 2033. – P.319-323. DOI: 2-s2.0-85040246401
- 15. Andreev V.K. Influence of the interfacial internal energy on the thermocapillary steady flow
 // Journal of Siberian Federal University Mathematics and Physics, 2017. Vol. 10, Is. 4. –
 P. 537-547. DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-4-537-547
- 16. А.В. Лапко, В.А. Лапко Непараметрический коллектив линейных аппроксимаций в задаче восстановления стохастических зависимостей // Информатика и системы управления. – Благовещенск: Амурский государственный университет, 2017. – № 2. – С. 64-71. DOI: 10.22250/isu.2017.52.64-71
- 17. Senashov V.I. Characterizations of the Groups with Almost Layer-Finite Periodic Parts // Ukrainian Mathematical Journal, 2017. Vol.69, Is.7. P. 1123-1131.
- Andreev V. K., Cheremnykh E. N. The unidirectional motion of two heat-conducting liquids in a flat channel // Journal of Physics: Conference Series, 2017. – Vol. 894, Is.1. – Art. 012106. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012106
- Chesnokov A.A., Yu Liapidevskii V., Stepanova I.V. Kinematic-wave model of viscous fingers with mixing layer // Journal of Physics: Conference Series, 2017. – Vol. 894, Is.1. – Art. 12107. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012107
- Ю.В. Шанько Решение задачи Л. В. Овсянникова о двумерных изотермических движениях политропного газа // Прикладная механика и техническая физика, 2017. – № 6. – С.3-15. DOI: 10.15372/PMTF20170601

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Содержание работы	Планируемый результат выполнения работы	
1 Разработка комплекса программ расчёта	1. Комплекс программ расчёта движений с	
движений с границами раздела и их	границами раздела в случае плоской и	
устойчивости в случае плоской и	врашательной симметрии	
вращательной симметрии.		
2 Анализ переопределённой системы,	2 Решение задачи Овсянникова о течениях	
описывающей специальный класс	идеальной жидкости с сохранением	
двумерных движений идеальной жидкости.	давления вдоль траекторий. Нахождение	
Групповой анализ <i>k-</i> ω модели	алгебры симметрии k - ω модели	
турбулентности в погранслойном	турбулентности и термодиффузии.	
приближении.	Построение автомодельных решений.	
3 Разработка комплекса вычислительных	3. Комплекс вычислительных методов и	
методов и алгоритмов для выяснения	алгоритмов исследования гидрофизических	
значимых механизмов стратификации	процессов в озёрах. Оценка влияния	
гидрофизических параметров озёр	изменения глобального климата на	
различной глубины и солёности. Оценка	вертикальную структуру вечной мерзлоты.	
влияния изменения глобального климата на		
вертикальную структуру вечной мерзлоты		
на основе разработанных малоразмерных		
численных моделей.		

Выписка из плана научно-исследовательской работы на 2017 год