РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На правах рукописи

Деревянко Виктор Валерьевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КАНАЛЕ ДЕТОНАЦИОННОГО МГД-ГЕНЕРАТОРА С T-СЛОЕМ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент РАН, проф.
В.В Шайдуров

Красноярск 2001

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Современный технический уровень паротурбинных энергетических установок, коэффициент полезного действия которых не превышает 40%, был, в основном, достигнут в 60-х годах. Тогда же были начаты работы по исследованию МГД-преобразования энергии, которые могли бы значительно поднять КПД преобразования тепловой энергии в электрическую. Исследования велись во многих странах мира и первоначально были направлены на создание МГД-генераторов, работающих на продуктах сгорания органических топлив с присадкой щелочных металлов для повышения электропроводности газа. Были созданы крупные исследовательские установки как в России (У-02, У-25), так и за рубежом (MARK-VII, CFFF, CDIF). Разрабатывались также взрывные, взрывомагнитные и импульсные МГД-генераторы преобразующие химическую энергию взрывчатых веществ в мощные импульсы электрической энергии [1], а также импульсные МГД-генераторы большой мощности серии «Памир», «Хибины»и др. Эти исследования дали не только большой фактический экспериментальный материал и опыт работы, но и обнаружили ряд серьезных проблем, которые были отмечены академиком А.Е Шейдлиным в работе [2]. Проблема повышения электропроводности рабочего газа была названа первоочередной.

В конце 60-х годов было открыто явление T-слоя, после чего в Новосибирске, а затем и в Красноярске, начались исследования МГД-генераторов с T-слоем. T-слой позволял повысить электропроводность на несколько порядков путем термической ионизации рабочего газа в локальной области без использования присадки щелочного металла. Был выполнен большой объем теоретических и экспериментальных исследований, которые показали принципиальную возможность организации процесса преобразования энергии с помощью T-слоя. При этом выявились особенности и недостатки генераторов с T-слоем. Это, прежде всего, проблемы устойчивости и инициирования T-

слоя, а также большие радиационные потери, обусловленные высокой температурой газа в T-слое. Дальнейшие исследования были связаны с решением этих вновь возникших трудностей. Были выполнены исследования по высокоэнтальпийным МГД-генераторам с самопоглощением излучения в T-слое [3, 4], а также начаты теоретические и экспериментальные работы по исследованию двумерной структуры и устойчивости T-слоя.

Сложность решения поставленных задач, обусловленная нестационарностью газоплазменных потоков и необходимостью учета реальных теплофизических и радиационных характеристик рабочих газов, привела к тому, что основные усилия были направлены на математическое моделирование. Возросшая мощь и доступность вычислительных машин способствовали развитию вычислительных технологий. Трудоемкий и дорогостоящий эксперимент стал рассматриваться как завершающая фаза вычислительного моделирования. В тоже время, постоянно возрастающий интерес к повышению КПД энергетических установок и необходимость создания нетрадиционных источников энергии большой мощности, использующих новые технические решения, обусловили постановку задачи данной работы.

Целью настоящей диссертационной работы являлось:

1. построение вычислительной модели детонационного МГД-генератора с T-слоем;

2. обоснование с помощью вычислительного эксперимента принципиальной возможности использования T-слоя для преобразовании энергии потока за фронтом детонационной волны;

3. изучение влияния радиационных характеристик рабочего газа на формирование структуры T-слоя;

4. численное моделирование работы детонационного МГД-генератора в импульсном режиме;

5. исследование энергетических характеристик детонационного МГД-генератора и возможности их экспериментальной проверки.

Основу диссертации составляют численные исследования работы детонационного МГД-генератора. Диссертация состоит из введения, трех глав и одного приложения.

В первой главе на основе обзора литературы рассматриваются пути создания схемы ДМГДГ, излагаются основные проблемы при создании вычислительной модели ДМГДГ, анализируются способы их решения. Осуществляется физическая и математическая постановка задачи.

Во второй главе излагается вычислительная модель ДМГДГ. Изложение начинается с описания основной системы уравнений. Далее последовательно рассматриваются математические модели энергетических процессов и уравнения состояния рабочего газа. Затем приводятся полный вычислительный алгоритм, особенности программной реализации модели и результаты тестирования.

В третьей главе представлены результаты вычислительных экспериментов. Проведены анализ характеристик ДМГДГ высокого и низкого давления и оптимизация параметров генератора. Даны оценки энергетических характеристик оптимизированного ДМГДГ. Получены оценки проницаемости T-слоя за счет процессов теплопереноса. Предложен вариант практического применения ДМГДГ, рассмотрена возможность экспериментальной проверки результатов моделирования.

В приложении приведены численные методы, алгоритмы и справочная информация.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Разработана математическая модель ДМГДГ.

2. Разработан комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов.

3. Показана принципиальная возможность использования T-слоя для преобразования энергии потока за фронтом детонационной волны.

4. Изучено влияние радиационных и теплофизических характеристик на формирование T-слоя в потоке продуктов сгорания за фронтом детонационной волны.

5. Получены энергетические характеристики ДМГДГ.

6. Получены оценки величины теплообмена T-слоя с потоком толкающего газа.

7. Показана возможность использование ДМГДГ в качестве энергетической установки на борту гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА).

В диссертации защищаются следующие основные положения.

- Вычислительная модель детонационного МГД-генератора.
- Результаты вычислительных экспериментов работы ДМГДГ высокого и низкого давления.
- Результаты анализа влияния радиационных характеристик потока рабочего газа на формирование T-слоя.
- Результаты анализа влияния параметров ДМГДГ на его энергетические характеристики.
- Количественные оценки величины теплообмена T-слоя с потоком рабочего газа.
- Расчетные данные для экспериментальной проверки вычислительной модели ДМГДГ.

Материалы диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Второй Российской Национальной конференции по теплообмену (Москва, 1998); XXXVII Международной студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 1999); Международной конференции «Математические модели и методы их исследования» (Красноярск, 1999, 2001); Конференции «Вычислительные технологии-2000» (Новосибирск, 2000); Конференции молодых ученых ИВМ СО РАН (Красноярск, 2001); Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент, практика», посвященной 80-летию академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2001); «Fifth International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows» (Польша, 2001); VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001).

По результатам исследований опубликовано 8 работ.

Работа поддержана интеграционным проектом № 3 СО РАН «Разработка и обоснование модели ГПВРД с МГД-управлением газовым потоком в камере сгорания».

Автор выражает глубокую признательность к.ф-м.н. Е.Н. Васильеву, к.ф-м.н. В.А. Деревянко, к.ф-м.н. А.Н. Кудрявцеву, к.т-н. А.Ф. Латыпову, д.ф.-м.н М.Е. Топчияну и к.ф-м.н. А.В. Троцюку за консультации и помощь в работе. Особую благодарность автор выражает научному руководителю член-корр. РАН В.В. Шайдурову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

1.1 Обзор литературы по исследованию МГД-генераторов с T-слоем

Идея работы МГД-генератора была высказана в 30-е годы XIX в. в работах М. Фарадея и Дж. Генри. Согласно закону электромагнитной индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле, наводится э.д.с. и при наличии электрической связи с нагрузкой через последнюю течет ток. В основу МГД-генератора положена идея использования ионизованного газа в качестве движущегося проводника [5, 6]. Разогретый газ проходит через МГД-генератор, при этом энергия отбирается непосредственно в виде электрической мощности и нет необходимости в ее промежуточном преобразовании. Рабочее тело в МГД-генераторе можно разогреть до более высоких температур, чем в обычных тепловых машинах, поскольку в МГД-генераторе нет движущихся частей, благодаря чему существенно снижается уровень механических напряжений. В свою очередь, повышение температуры рабочего тела приводит к повышению КПД генератора.

Интенсивные работы по созданию МГД-генераторов начались во многих странах в середине 60-х годов XX в. Основное внимание уделялось разработкам моделей со стационарным течением потока газа в канале. Было построено много довольно крупных экспериментальных установок, в том числе опытно-промышленная установка У-25 в ИВТ РАН. В процессе исследования обнаружились недостатки МГД-генераторов со стационарным течением. Основная проблема связана с невозможностью обеспечить достаточную термическую ионизацию рабочего газа при обычных температурах сгорания или в теплообменнике. Использование щелочных присадок для повышения проводимости рабочего газа создавало ряд серьезных технических проблем, связанных с регенерацией присадки и секционированием электродов.

В 1968 году группой авторов численно было открыто явление токового слоя (T-слоя) — самоподдерживающейся плазменной неустойчивости [7]. Суть явления T-слоя состоит в том, что из температурной неоднородности в потоке неэлектропроводного газа, движущегося в поперечном магнитном поле и связанного через электроды с внешней нагрузкой, при определенных условиях формируется самоподдерживающийся токовый слой, в котором устанавливается динамическое равновесие между джоулевой диссипацией и потерями энергии на радиационно-конвективный теплообмен. Сразу же была предложена схема МГД-генератора с неоднородным по проводимости потоком рабочего тела и сформировалось новое направление исследований — нестационарные МГД-генераторы с T-слоем. Первые результаты исследования возможности создания таких МГД-генераторов были представлены в работах [8, 9]. Из проведенного в [9] анализа следовало, что в случае использования «слоеного» потока рабочего тела «средняя электропроводность потока получается в несколько раз выше, чем определенная по его средней температуре».

Основные достоинства МГД-генератора с T-слоем следующие.

1. Высокая проводимость. При характерной температуре газа в T-слое 10^4 K собственная ионизация газа обеспечивает высокую электропроводность $10^3 \div 10^4$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$. При температурах $\sim 3 \cdot 10^3$ K, характерных для потока рабочего газа в МГД-генераторе без T-слоя, электропроводность на 2-3 порядка меньше. Высокая собственная электропроводность газа позволяет отказаться от введения в газ присадки щелочного метала.

2. Упрощение конструкции установки. Поскольку размеры токового слоя малы по сравнению с размером МГД-канала, эффект Холла проявляется слабо и не требуется секционирование электродов, вообще говоря, представляющее сложную техническую задачу.

3. Снижение температуры рабочего потока за счет того, что основная масса газа совершает полезную работу расширения, не будучи электропроводной.

4. Возможность генерирования переменного тока без использования инвертирующих устройств [10].

Экспериментальные исследования МГД-генераторов с T-слоем, проводившиеся в Новосибирске (ИТПМ СО РАН) [11] и в Красноярске [12] подтвердили возможность образования и существования T-слоя. В [13] был впервые получен самоподдерживающийся плазменный сгусток в сверхзвуковом потоке. Экспериментальные исследования эволюции токонесущего плазменного сгустка проводились в работах [14, 15]. Устойчивое спонтанное развитие T-слоя в потоках плазм аргона и натрия в модели кондукционного дискового МГД-генератора было получено в работе [16]. Распределение плотности тока в T-слое экспериментально исследовалось в работе [17]. Однако, учитывая сложность эксперимента, необходимость больших материальных затрат и временных ресурсов, основное внимание в разработке МГД-генераторов с T-слоем уделяется вычислительному моделированию, с помощью которого и были получены основные результаты.

Динамика формирования токового слоя и условия его стабилизации исследовались в работе [18]. На основе численных расчетов было установлено, что стабилизированная структура T-слоя не зависит от параметров начального температурного возмущения, а определяется внешними параметрами задачи (величиной магнитного поля, сортом газа, давлением в потоке и т.д.). В работе [10] исследовался вопрос о механизмах формирования T-слоя. Проведенный сравнительный анализ результатов численного моделирования и экспериментальных исследований показал, что основными энергетическими механизмами, формирующими T-слой, являются радиационные потери энергии и джоулева диссипация. При характерных температурах в T-слое $\sim 10^4$ K и давлениях $1 \div 10$ атм T-слой ведет себя как объемный излучатель, потери излучения в котором пропорциональны четвертой степени температуры и растут пропорционально увеличению давления. При этом использование инертных газов выгодно из-за меньшей лучеиспускательной способности и большего показателя адиабаты атомарных газов по сравнению с молекулярными, что позволяет повысить степень преобразования энтальпии и снизить затраты на инициирование T-слоя. Оценки эффективности МГД-генератора с T-слоем на аргоне получены в работе [19]. Размер T-слоя 0.4 м, степень преобразования энтальпии ~ 0.3. Рассмотрены случаи равновесного и неравновесного T-слоя.

В работе [20] представлена теплофизическая модель МГД-генератора с T-слоем. В модели учитывались потери энергии на трение, конвективный теплообмен и излучение и, интегрально, потери в пограничных, приэлектродных слоях и на ударных волнах. Ставилась задача оптимизации режимов работы (параметров течения, электрической нагрузки, величины индукции магнитного поля) и геометрических размеров генератора для получения максимальной эффективности термодинамического цикла установки замкнутого цикла. Проведенный аналитический анализ показал, что существуют оптимальные абсолютные размеры МГД-генератора, позволяющие получить максимальную эффективность термодинамического цикла. Зависимость электрического КПД и внутренней эффективности генератора (отношению реального изменения энтальпии к изоэнтропическому) имеет максимум по длине генератора. Минимальная длина генератора определяется энергетическими затратами на инициирование T-слоя и потерями энергии, связанными с трением и теплообменом со стенками канала. Увеличение длины генератора означает увеличение объема, в котором необходимо поддерживать стационарное магнитное поле. С увеличением длины генератора выше некоторой критической величины эффективность преобразования энергии вследствие трения и теплообмена со стенками понижается настолько, что дальнейшее увеличение объема магнитного поля становится невыгодным. Согласно расчетам, длина канала не должна превышать ~ 20 характерных размеров T-слоя.

Таким образом, к настоящему времени выявлен ряд проблем МГД-генераторов с T-слоем. Это, прежде всего, большие радиационные потери из T-слоя, ограничения на размеры канала, проницаемость T-слоя и проблемы, связанные с инициированием T-слоев.

Объемные радиационные потери из T-слоя являются главным фактором, ограничивающим мощность МГД-генераторов с T-слоем. Они определяют предельную мощность генератора, накладывая ограничения на давление в канале, температуру T-слоя и, как следствие, ограничивают характерный размер стабилизированной структуры T-слоя. Если исходить из разумного предположения, что размер T-слоя поперек канала не может превышать его размера вдоль потока, то получается ограничение на ширину канала. Поскольку согласно [20] характерный размер ограничивает также длину генератора, то радиационные потери определяют максимальный рабочий объем генератора и энтальпию потока, лимитируя, тем самым, мощность генератора. Расчеты показали, что с учетом вышеприведенных ограничивающих факторов генераторы с T-слоем на продуктах сгорания не могут иметь мощность выше нескольких сотен киловатт (характерные размеры T-слоя несколько сантиметров). Генераторы на инертных газах (аргон, гелий) ведут себя несколько лучше, поскольку атомарные газы обладают меньшей лучеиспускательной способностью, чем молекулярные. Их мощность может достигать 100 МВт (размер T-слоя около 40 см).

Следует отметить, что все разработанные модели МГД-генераторов с T-слоем основаны на приближении *непроницаемости плазменного поршня*. Согласно этому приближению, токовый слой является непроницаемым для потока толкающего газа. К настоящему времени правомерность этой гипотезы не доказана, хотя попытки определить критерии непроницаемости плазменного поршня предпринимались как экспериментально, так и на основе вычислительного моделирования. В частности, в работе [10] влияние конвекции оценивалось из сопоставления результатов эксперимента и математического моделирования. Сделан вывод о том, что «основными энергетическими механизмами, формирующими структуру T-слоя в эксперименте, являются джоулева диссипация и излучение, а для описания МГД-взаимодействия T-слоя с неэлектропроводным газовым потоком при условиях, близких к генераторному режиму, применима модель непроницаемости плазменного поршня». Этот вывод косвенно подтверждается анализом распределения температуры в T-слое. Экспериментальные исследования поля температур в сильноточной электрической дуге [21], находящейся в потоке газа, показали, что при интенсивном конвективном теплоотводе максимум температуры формируется в передней части движущейся дуги. В предположении непроницаемости плазменного поршня температурный профиль T-слоя должен быть существенно иным. Неоднородный характер распределения давления в T-слое приводит к нарушению симметрии объемного излучения, которое прямо пропорционально давлению. Область высокого давления активно излучает и при этом охлаждается; в области низкого давления, где радиационные потери меньше, происходит разогрев газа джоулевой диссипацией. В результате температурный максимум в T-слое должен находиться в области низкого давления, что качественно подтверждено экспериментальными исследованиями [17].

Кроме обтекания T-слоя потоком газа возможна проницаемость T-слоя другого вида: проникновение газа сквозь T-слой. Взаимодействие T-слоя с потоком газа приводит к теплообмену между ними и проявляется в перемещении T-слоя в потоке газа (эффект скольжения T-слоя). Согласно [22] T-слой перемещается вниз по потоку. В [4] рассмотрен генератор с высоким давлением (~ 100 атм) в канале и показано, что T-слой вследствие теплообмена излучением с потоком газа должен смещаться вверх по потоку. Оценки носили качественный характер, величина энергии теплообмена не рассчитывалась.

С инициированием T-слоя связано несколько проблем. И прежде всего, это большие затраты энергии на инициирование T-слоя. Чем выше давление в потоке рабочего газа, тем больше энергии требуется для формирования начального плазменного сгустка. В работе [23] на основании численного моделирования изучалась динамика и энергетический баланс процесса инициирования. Было показано, что потери энергии при инициировании происходят, в основном, в ударных волнах, образующихся из-за сильного газодинамического разлета газа при быстром нагреве. Необратимые потери в этих волнах снижают КПД генератора. Другая проблема связана с эффективностью вклада энергии в поток. При инициировании T-слоя осуществляется пробой газа и в область пробоя вкладывается энергия от внешнего источника. В МГД-генераторах с T-слоем в канале имеются относительно холодные приэлектродные области с высокой электрической прочностью. Для их пробоя к электродам необходимо прикладывать напряжение в 5-10 кВ. После пробоя напряжение на электродах падает до нескольких сотен вольт и остается таким в процессе разогрева T-слоя. Из закона Ома следует, что наиболее эффективное выделение мощности на нагрузке происходит, когда внутреннее сопротивление нагрузки и внутреннее сопротивление источника примерно равны. Резкое изменение внутреннего сопротивления слоя газа в процессе пробоя накладывает определенные требования на источник инициирования и синхронизацию его работы, снижая КПД вклада энергии. Поскольку для инициирования T-слоя требуется значительное количество энергии, неэффективный вклад энергии представляет серьезную проблему.

Одним из вариантов повышения эффективности МГД-генератора с T-слоем является переход к использованию неравновесной плазмы [24] и неравновесных токовых слоев [17, 25]. Исследования в этой области ведутся в настоящее время и в России [26], и за рубежом [27]. Следует однако отметить, что использование неравновесного T-слоя, в котором электронная и ионная температуры различаются, накладывает ограничения на предельные давления в канале, что приводит к малой удельной мощности генератора.

Другой способ решения обозначенных проблем намечен в работах [3, 4], в которых на основе решения уравнений переноса излучения исследовались радиационные характеристики высокотемпературных слоев в воздухе при однородном распределении давления. Показано, что с ростом давления относительные радиационные потери сперва возрастают пропорционально давлению, а затем начинают плавно уменьшаться. При низких давлениях излучение из T-слоя носит объемных характер и растет пропорционально давлению. При высоких давлениях (~ 100 атм) оптическая плотность среды увеличивается настолько, что существенным становится поглощение излучения. При этом излучение из T-слоя становится излучением с поверхности, т.е. в центральной высокотемпературной зоне T-слоя излучение «запирается» (перепоглощается), а основная доля излучения выходит из более холодных периферийных областей. С точки зрения величины радиационных энергопотерь наименее выгодным для развития T-слоя является давление, соответствующие максимальному значению плотности потока излучения из T-слоя, а наиболее благоприятными будут режимы с существенно меньшим или большим давлением. С увеличением размеров T-слоя максимум плотности радиационных потерь смещается в сторону меньших давлений. Таким образом, повышение мощности возможно путем увеличения давления газа в канале до такого уровня, при котором излучение из T-слоя становится поверхностным (запирается), снижаются относительные затраты энергии на поддержание температуры T-слоя, а характерный размер определяется уже не излучательными характеристиками газа, а тепловой мощностью потока и величиной магнитного поля.

Использование высоких давлений открывает возможность создания генераторов мощностью в несколько гигаватт. Оптимальным рабочим газом в этом случае становятся как раз продукты сгорания, имеющие высокие коэффициенты поглощения. Кроме того, повышается обоснованность модели непроницаемого поршня, т.к. из экспериментов с дугами высокого давления известно, что они обтекаются потоком газа как твердое тело [28]. Необходимость создания высокого давления в потоке $\simeq 100 \div 300$ атм требует увеличения давления в камере сгорания до 2000 атм. Чтобы обеспечить столь высокие давления в камере сгорания, потребуются специальные очень мощные компрессоры для подачи топлива, что скорее всего окажется дорогим и неэффективным решением. В тоже время известно, что в детонационных трубах получение потока с давлением в несколько сотен атмосфер не представляет особых трудностей.

Попытки использования детонационного режима сгорания в МГД-генераторах уже предпринимались. В работе [29] экспериментально исследовался детонационный МГД-генератор, в основу которого был положен эффект повышения электропроводности за фронтом детонационной волны в области реагирующего газа. Авторами были отмечены преимущества такого генератора:

камера сгорания одновременно совмещалет функцию канала преобразования энергии; энергия, расходуемая на сжатие исходной горючей смеси, черпается не из внешнего источника (компрессора), а непосредственно из химической энергии топлива. Предварительные эксперименты показали, что электропроводность продуктов сгорания за фронтом детонационной волны составляет $\sim 10^{-2}$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$ (через 150 мкс после скачка давления). Использование щелочной присадки позволило увеличить электропроводность на порядок, однако для того, чтобы обеспечить эффективное взаимодействие потока газа с магнитным полем, этого было недостаточно, и МГД-генератор оказался малоэффективным.

Использование эффекта токового слоя позволяет по новому взглянуть на идею детонационного МГД-генератора. В самом деле, совместное использование детонационного режима сгорания газа, эффекта T-слоя и режима высоких давлений в канале МГД-генератора открывает пути решения сформулированных выше проблем. Высокое давление в потоке $\simeq 100 \div 300$ атм можно получать при начальном давлении горючей смеси $\simeq 10 \div 30$ атм. При этом используются продукты сгорания, в которых эффект запирания проявляет себя в большей степени и при меньших давлениях, чем в инертных газах. Эффект проводимости химически реагирующего газа за фронтом детонационной волны можно использовать для упрощения инициирования T-слоя.

Подводя итог этой части обзора литературы следует отметить, что к настоящему моменту времени детонационные МГД-генераторы с T-слоем не исследовались. Остаются открытыми вопросы, касающиеся возможности создания МГД-генератора с T-слоем, использующего энергию потока газа за фронтом детонационной волны, возможности инициирования и развития T-слоя в области хемопроводимости за фронтом детонационной волны, влияния давления в потоке газа на формирование T-слоя в условиях радиационного теплопереноса с учетом самопоглощения, динамики развития процессов МГД-взаимодействия. Эти вопросы и стали предметом рассмотрения настоящей диссертации.

1.2 Физическая постановка задачи

Исходя из сказанного, общая схема детонационного МГД-генератора, рассматриваемого в настоящей диссертации, представляется следующим образом (рис. 1.1). Канал детонационного МГД-генератора с T-слоем состоит из

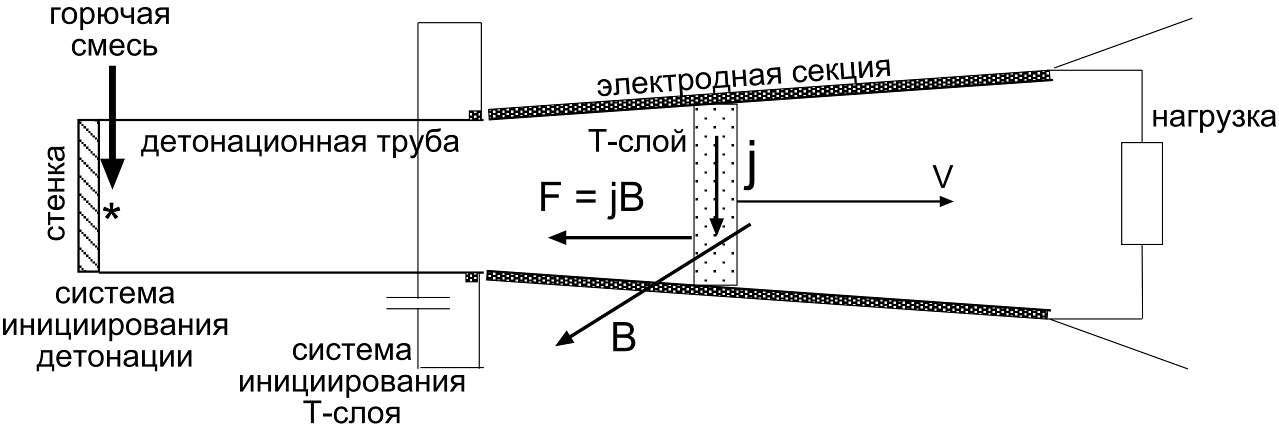


Рис. 1.1. Схема детонационного МГД-генератора.

детонационной и электродной секций. Слева канал закрыт стенкой. На выходе из электродной секции расположен диффузор. Электродная секция прямоугольного сечения образована сплошными электродами и диэлектрическими стенками. В электродной секции внешней магнитной системой создается поперечное магнитное поле, параллельное плоскости электродов. Камеры сгорания в ДМГДГ нет, горение смеси происходит в детонационной камере.

В начальный момент времени детонационная труба заполнена горючей смесью. Смесь поджигается возле замкнутого конца детонационной секции, и по газу распространяется детонационная волна. Давление в продуктах сгорания превосходит давление исходной горючей смести примерно на порядок. Поэтому при начальных давлениях исходной горючей смеси 10 − 50 атм, которые могут быть достигнуты с помощью обычных компрессоров, в потоке толкающего газа могут быть получены давления, достаточные для реализации эффекта запирания излучения в T-слое.

За фронтом детонационной волны образуется зона хемопроводимости, обеспечивающая автоматический пробой газа при подходе волны к электродам генератора, к которым приложено напряжение. Фактически, пробоя не происходит — напряжение, приложенное к электродам, сразу обеспечивает разогрев T-слоя. В результате проблема, связанная с неэффективным вкладом энергии на инициирование T-слоя, в ДМГДГ решается автоматически.

Созданный в секции инициирования высокотемпературный плазменный сгусток выносится потоком в электродную секцию и замыкает электрическую цепь нагрузки. Под действием магнитного поля в объеме сгустка возникает тормозящая поток электродинамическая сила $J \times B$. В результате сильного магнитогидродинамического взаимодействия в канале из локального плазменного сгустка формируется самоподдерживающийся токовый слой, стабилизированный газодинамическими и электродинамическими процессами. Характерный размер T-слоя и предельная мощность генератора определяются тепловой мощностью потока и величиной магнитного поля.

В предположении непроницаемости плазменного поршня образовавшийся T-слой полностью перекрывает канал и ведет себя как поршень в потоке толкающего газа. В ДМГДГ T-слой по своим параметрам близок к дугам высокого давления, которые, как известно, обтекаются газом как твердые тела. Это делает оправданным применение гипотезы о непроницаемости плазменного поршня в ДМГДГ. Проталкивая T-слой, газ совершает работу. Часть вырабатываемой энергии идет на поддержание температуры в T-слое, который остывает за счет излучения и теплообмена со стенками канала, оставшаяся часть выделяется как полезная мощность в нагрузке. В процессе прохождения T-слоя по электродной секции канала через нагрузку проходит токовый импульс.

Как известно, затраты на проведение экспериментальных исследований высоки и постоянно возрастают в связи с усложнением экспериментальных установок и повышением требований к точности результатов. Вместе с тем, достигнутый к настоящему времени уровень развития вычислительной техники и вычислительной математики позволяет изучать процессы посредством их математического моделирования. В настоящее время каждому достаточно сложному физическому эксперименту, по-видимому, следует предпослать вычислительный эксперимент, в котором на соответствующих математических моделях можно было бы проанализировать основные закономерности исследуемых процессов. Хотя численное моделирование не позволяет получать непосредственно аналитические выражения, типичные для теории, оно обладает той же степенью гибкости. Эта гибкость состоит в способности оценить важность физического эффекта путем его включения или выключения из рассмотрения и также изменения степени его воздействия или функциональной формы.

В этой связи представляется целесообразным провести первоначальное исследование режимов работы ДМГДГ именно на основе вычислительной модели.

1.3 Математическое моделирование МГД-генераторов с T-слоем

Применяются различные подходы к построению математических моделей МГД-генераторов с T-слоем. Аналитические модели базируются, как правило, на ряде упрощающих предположений о характере течения в канале генератора, которые проверяются либо экспериментально, либо в других, более точных вычислительных экспериментах. В работе [30] на основе термодинамической модели МГД-течения с неравновесными токовыми слоями получены оценки КПД неравновесного МГД-генератора с T-слоем. Теплофизическая модель установки с МГД-генератором замкнутого цикла, учитывающая конвективные и радиационные потери энергии в T-слое [20], позволила авторам оптимизировать предельные размеры МГД-канала.

Другой подход заключается в детальном моделировании динамики процессов в канале МГД-генератора с T-слоем на основе численного решения нестационарной системы уравнений магнитной газодинамики [31]. Использование приближения непроницаемости T-слоя потоком газа позволяет в большинстве задач ограничиться одномерной постановкой. Основные исследования, связанные с МГД-генераторами с T-слоем, были выполнены с применением детальных математических моделей.

Элементарная теория МГД-генератора с T-слоем, явившаяся одной из первых моделей такого рода, была представлена в работе [32]. Токовый слой полагался непроницаемым, недеформируемым плазменным поршнем заданного размера с однородным распределением температуры. Результаты расчетов позволили определить зависимость КПД генератора от его параметров и свойств рабочего тела. В тоже время, остался открытым вопрос о структуре и размере T-слоя, которые, в общем случае, определяются параметрами МГД-взаимодействия и свойствами рабочего тела.

Структура стабилизированного T-слоя изучалась в работах [33, 34, 35, 36]. Исследовались динамика формирования профиля температуры T-слоя, ее зависимость от профиля начального возмущения, определялись условия стабилизации T-слоя. В работе [18] было показано, что стабилизированная структура T-слоя не зависит от параметров начального возмущения. Там же приведена диаграмма, позволяющая найти основные параметры МГД-генератора с T-слоем и область существования стабилизированного T-слоя.

Возможность работы МГД-генератора с T-слоем в периодическом режиме, когда возмущения в течении, оставшиеся в канале от предыдущего T-слоя, служат начальными условиями для последующего, исследовалась в [10, 37]. Авторами был сделан вывод об эффективности одновременного использования двух T-слоев в канале генератора.

Динамика инициирования T-слоя изучалась в [23]. Численная модель включала в себя систему уравнений нестационарной магнитной газодинамики невязкого нетеплопроводного газа в квазиодномерном приближении и уравнения электротехнической цепи. Термодинамические, электрофизические свойства и излучательная способность рабочего газа соответствовали воздушной плазме и задавались таблично. Для численного решения системы уравнений использовалась конечно-разностная схема Лакса-Вендроффа, модифицированная по методу локальной диссипации.

В работах [14, 15] проводились теоретические и экспериментальные исследования токонесущего плазменного сгустка в МГД-канале на установке с ударной трубой Эйндховенского технологического университета. Разработанная авторами численная модель включала в себя нестационарное течение смеси идеальных молекулярных газов в тракте установки, воспламенение и детонационное горение окиси углерода, генерацию плазменного сгустка с помощью электрического разряда и генерацию электрического тока в МГД-канале с учетом электродинамических потерь в холодных пограничных слоях. Авторы получили «удовлетворительное качественное и количественное согласование экспериментальных и расчетных зависимостей». Анализ ударно-волновых процессов, наблюдаемых в вычислительных экспериментах, позволил авторам проинтерпретировать экспериментальные данные. Дано объяснение характеру изменения давления в различных сечениях канале генератора, идентифицирован предвестник впереди плазменного сгустка как волна сжатия, распространяющаяся от места его генерации, а пристеночные шлейфы идентифицированы как результат деформации сгустка в неоднородном поле скорости. «На основании сопоставлений расчета с экспериментальным данными установлено, что распространение вдоль МГД-канала токового импульса в данных условиях в значительной степени диктуется электротепловыми и конвективными процессами в тонком пристеночном слое. В силу низкой температуры стенок МГД-канала в экспериментах на установке с ударной трубой характер протекания тока на электроды является дуговым, что предопределяет трудности при разработке детальных количественных моделей».

Возможность применения МГД-генератора с T-слоем для управления газовым потоком в гиперзвуковом воздушно-реактивном двигателе исследовалась в [38]. Процессы, протекающие в тракте двигателя, моделировались на основе одномерных МГД-уравнений. Для решения уравнений использовались методы Мак-Кормака и FCT [39]. В ходе вычислительного эксперимента исследовались структура газодинамического течения, энергетические условия формирования T-слоя, оптимальная частота инициирования T-слоев. Доказана эффективность применения МГД-управления газовым потоком.

Эффект магнитогазодинамического шунтирования при больших и малых скоростях движения T-слоя численно исследовался в работе [40]. Модель основывалась на одномерной системе уравнений магнитной газодинамики для идеального газа, записанной в лагранжевых координатах. В модели учитывались индуцированные магнитные поля, «боковой» вдув массы, радиационный перенос энергии.

Таким образом, одномерные вычислительное модели МГД-генераторов с T-слоем давно и успешно применяются в различных задачах. Следует отметить, что в настоящее время в связи с возросшей мощностью вычислительной техники начинается переход к двумерным задачам [41, 42].

1.3.1 Математическая постановка задачи

Исследования МГД-генераторов показали, что структура T-слоя и характеристики процессов взаимодействия его с магнитным полем полностью определяются параметрами МГД-канала, свойствами рабочего газа и начальным температурным возмущением. К основным параметрам детонационного МГД-генератора относятся: давление и температура продуктов сгорания за фронтом детонационной волны, геометрия канала, индукция внешнего магнитного поля. Свойства рабочего газа задаются следующими функциями состояния: удельной теплоемкостью, коэффициентом электропроводности, коэффициентом теплопроводности, коэффициентом вязкости, спектральным коэффициентом поглощения. Начальное температурное возмущение определяется начальной температурой плазменного сгустка и размерами области инициирования.

В задаче предполагается рассматривать процессы в МГД-канале с характерным давлением ~ 100 атм, температурой потока за фронтом детонационной волны $\sim 3 \cdot 10^3$ К, индукцией внешнего магнитного поля ~ 15 Тл, скоростью потока $\sim 10^3$ м/с, длиной канала ~ 10 м, температурой токового слоя $\sim 10^4$ K, характерным размером токового слоя $\widetilde{\delta} \sim 0.5$ м и плотностью тока $j \sim 10^6$ А/м^2. В качестве рабочего газа предполагается рассматривать газообразные продукты детонации.

При таких условиях естественным будет применение магнитогидродинамического приближения [43], т.е. среда рассматривается сплошной, токи смещения не учитываются. Не учитывается анизотропия проводимости, возникающая вследствии эффекта Холла, т.к. значения параметра Холла меньше 0.1 [10]. Все процессы можно рассматривать в рамках локального термодинамического равновесия (ЛТР) [28, 44]. Оценка величины индуцированного магнитного поля на основании закона Ампера в интегральной форме

$$\oint \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{\widetilde{\delta}} = \mu_0 J$$

показывает, что при указанных характерных размерах T-слоя и ожидаемой величине протекающего через него тока $\sim 10^6$ А величина индуцированного магнитного поля составляет $|B| \simeq 2 \ll 15$ Тл, т.е. можно пренебречь влиянием индуцированных магнитных полей.

В рамках рассматриваемой модели возможно также использование квазиодномерного приближения [31], которое позволяет свести полную систему магнитогидродинамических уравнений для рассматриваемого канала к простейшей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (в данном случае, к системе уравнений Эйлера). Квазиодномерное приближение справедливо при следующих допущениях: всеми неоднородностями в концевых зонах (вход и выход) можно пренебречь; давление и температура предполагаются постоянными в поперечном сечении; рассматривается только компонента скорости, перпендикулярная поперечному сечению; можно пренебречь индуцированными магнитными полями. Условия применимости квазиодномерного приближения (отношение длины канала к высоте велико, поперечное сечение канала изменяется медленно, а разность давления поперек канала мала) в рассматриваемой задаче можно считать выполненными.

Эксперименты по исследованию плазмы дугового разряда показывают, что взаимодействие дуги с набегающим потоком подобно обтеканию твердого цилиндрического тела. При этом дуга не продувается набегающим потоком, а горит в определенной массе газа. Поэтому для описания взаимодействия разряда, ограниченного боковыми стенками канала с окружающим неэлектропроводным газом, возможно применение модели непроницаемого плазменного поршня. В такой модели движение токового слоя будет совпадать со скоростью толкающего газа и, следовательно, можно не учитывать механизм конвективного тепломассообмена T-слоя с потоком и влияние вязкости.

Необходимо разработать вычислительную модель, которая позволит проводить исследования процессов, протекающих в канале ДМГДГ, сделать оценки эффективности генератора и исследовать возможные режимы его работы. Модель должна основываться на численном решении системы уравнений магнитной газовой динамики. В модели должны учитываться все основные процессы энергообмена, протекающие в ДМГДГ: излучение и поглощение, детонация, инициирование T-слоя, взаимодействие T-слоя с магнитным полем. В работе [32] рассчитывались конвективные потери энергии T-слоя в стенку через турбулентный пограничный слой. При этом было показано, что эти потери существенно меньше радиационных потерь. Оценка характерного времени включения механизма теплопроводности в энергобаланс T-слоя [10] показывает, что при длительности процесса $\ll 1$ с вклад механизма теплопроводности пренебрежимо мал.

В итоге можно сделать следующие выводы. Основными энергетическими механизмами, формирующими T-слой, в данной задаче будут диссипация и излучение. Сформулированная задача может рассматриваться как одномерная и моделироваться с помощью нестационарной одномерной системы уравнений газодинамики невязкого газа (системы уравнений Эйлера). При учете взаимодействия T-слоя с магнитным полем можно пренебречь индуцированными магнитными полями и не рассматривать систему уравнений Максвелла [31]. Однако необходимо решение задачи радиационной магнитной газодинамики с учетом поглощения излучения в потоке газа высокого давления и моделирование детонационной волны, как источника потока газа с характерным распределением газодинамических параметров.

1.3.2 Обзор методов решения системы уравнений Эйлера

Система уравнений Эйлера представляет собой систему, состоящую из трех уравнений переноса (массы, момента импульса и энергии) и математически может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(U)}{\partial x} = 0. \tag{1.1}$$

В настоящее время для решения системы уравнений (1.1) разработано множество численных методов. Подробные обзоры современных методов вычислительной газодинамики приведены в ряде монографий [45, 46, 47, 48, 49].

Выбор численного метода для решения системы уравнений газодинамики в модели ДМГДГ должен проводиться согласно особенностям самой модели.

Прежде всего следует отметить сложность ударно-волновой картины течения в канале ДМГДГ, содержащей прямые и отраженные ударные волны, волны разрежения и контактные разрывы. Эта сложность не позволяет разделить вычислительную область на ряд независимых подобластей, в каждой из которых можно было бы насчитывать решение, а затем сшивать полученные решения между собой. Требуется метод, способный просчитывать все течение сразу, без разделения на подобласти.

Второй особенностью модели является широкий диапазон давлений и температур в потоке. При таких условиях уравнения идеального газа являются довольно грубым приближением. Для повышения точности расчетов желательно использовать более сложные уравнения состояния, заданные аналитически или в табличной форме, и численный метод должен позволять использовать такие уравнения состояния.

Третьей особенностью модели является наличие в канале токового слоя. С вычислительной точки зрения T-слой представляет собой сравнительно узкую область с резкими температурными градиентами и интенсивным энергообменом. Наличие T-слоя выдвигает целый ряд требований к численному методу. Прежде всего, метод не должен сглаживать границы T-слоя. Неверные значения температуры на границах токового слоя существенно повлияют на картину радиационного переноса энергии, что может привести к искажению стабилизированной структуры T-слоя и изменению результирующих энергетических характеристик генератора. По тем же причинам метод не должен допускать появления нефизических осцилляций в области T-слоя, связанных с представлением непрерывной функции решения на дискретной сетке. Учитывая сравнительно малые размеры T-слоя по сравнению с размерами генератора, метод должен позволять использовать сравнительно грубую сетку в области T-слоя без существенного снижения точности.

Наконец, предпочтительнее методы, обладающие, по возможности, более высокой точностью. Как отмечается в работе [48], схемы повышенного порядка аппроксимации обладают высокой эффективностью на гладких решениях и могут давать удовлетворительную точность даже на сравнительно грубых сетках. Кроме того, имеет место эмпирический факт, что даже для разрывных решений схемы высокого порядка аппроксимации, при наличии эффективных механизмов монотонизации вблизи разрывов, как правило, дают более точные результаты, чем схемы низкого порядка.

Вычислительная практика показывает [48], что качество расчета становится выше, если численные методы имеют некоторые дополнительные свойства — аналоги свойств дифференциальных уравнений. Свойство консервативности — возможности записи уравнений в виде интеграла по границам произвольного объема — гарантирует, что решение, если сходится, то к слабому решению исходной системы уравнений (теорема Лакса-Вендроффа [50]), т.е. к решению, допускающему разрывы, на которых соблюдаются условия Ренкина-Гюгонио [51]. Свойство сохранения монотонности решения обеспечивает единственность разрывного решения и отсутствие возникновения нефизических максимумов и минимумов.

Теоретический анализ, проведенный С.К. Годуновым [52], показал, что для уравнений переноса не существует линейных методов, гарантирующих монотонность, с порядком точности выше первого. Подобное ограничение на порядок точности отсутствует для нелинейных монотонных методов. Их основная идея заключается в том, чтобы сочетать методы высокого порядка в областях гладкого решения и монотонные методы вблизи больших градиентов и экстремумов, обеспечивая тем самым монотонность решения. Задача такой гибридизации связана с оценкой локальных качеств разностного решения: его убывания или возрастания; наличия экстремума или точек изменения знака второй производной; оценки «гладкости» решения. Первые нелинейные методы, обеспечивающие монотонность и положительность решения, были разработаны в работах [53, 54, 55] и обеспечивали второй порядок точности. В настоящее время развито несколько различных подходов к построению нелинейных монотонных методов второго и более высоких порядков точности. Такие методы успешно применяются в широком классе задач вычислительной газодинамики [48, 45] и, в частности, в задачах магнитной газодинамики [14, 15]. Подробные обзоры методов этого класса приведены в монографиях [45, 48, 51].

Среди других нелинейных монотонных методов на практике наибольшую популярность приобрели схемы, являющиеся развитием схемы С.К. Годунова [52, 56], в которых для повышения точности расчета вблизи разрывов используется аналитическое решение задачи Римана [57]. Одним из наиболее общих подходов к конструированию таких схем является проекционно-эволюционный подход[1], предложенный Ван Леером [59]. Проекционно-эволюционные

[1]projection-evolution approach [58]

схемы состоят из двух ключевых шагов: шага реконструкции и шага эволюции. На шаге реконструкции в каждой вычислительной ячейке аппроксимируются значения сеточных функций, чаще всего с помощью алгебраических полиномов. На шаге эволюции на границах между ячейками решается задача Римана и определяются значения средних потоков физических величин. Расчет потоков, как правило, проводится с помощью «upwind» процедуры, в которой решение строится с учетом направления конвекции. Каждое из уравнений переноса системы (1.1) аппроксимируется консервативной схемой

$$\frac{dU_j}{dt} = -(F_{j+1/2} - F_{j-1/2})/\Delta x. \tag{1.2}$$

Огромное разнообразие схем, построенных по этому принципу, различается прежде всего способами реконструкции сеточных функций, методами решения задачи Римана и интегрирования по времени.

При реконструкции сеточной функции проводится интерполяция функции на границах ячейки по известным средним значениям функции в ячейках. Интерполяция проводится с помощью алгебраических полиномов на основании фиксированных или адаптивных шаблонов интерполяции, причем расширение шаблона интерполяции обуславливает повышение порядка точности, если интерполируемая функция является гладкой внутри шаблона. Например, для интерполяции в ячейке i с третьим порядком может быть использована информация из трех ячеек $i-1$, i, $i+1$ для построения интерполяционного шаблона второй степени. Т.е. используется фиксированный шаблон: ячейка справа, ячейка слева и сама рассматриваемая ячейка, безотносительно от того, где они расположены. Оригинальная схема Годунова основывалась на предположении о кусочно-постоянном распределении функции в ячейках и обладала только первым порядком аппроксимации. В схеме Колгана [60] и в обобщающей ее MUSCL схеме Ван Леера [59] предполагалось линейное распределение физических величин в разностной ячейке, за счет чего обеспечивался второй порядок точности. Коллела и Вудворд, использовав кусочно-параболическую интерполяцию, получили метод третьего порядка точности PPM [61]. Существуют также методы более высоких порядков точности [62, 48].

Основной проблемой, возникающей при использовании интерполяции исходных данных, является появление нефизических осцилляций на разрывах, связанных с феноменом Гиббса, которые не уменьшаются при измельчении сетки и часто обуславливают вычислительную неустойчивость в нелинейных задачах. Существует несколько подходов к подавлению этих искусственных осцилляций.

Первый подход заключается в добавлении искусственной вязкости [45]. Она подбирается достаточно большой возле скачков, чтобы уничтожить осцилляции, и малой вне их для сохранения точности высокого порядка. Недостатком этого подхода является сложность локального выбора параметра, контролирующего искусственную вязкость.

Второй подход заключается в применении ограничителей, гарантирующих сохранение монотонности решения. Этот подход впервые использовал Ван Леер [54, 59, 63]. В схеме MUSCL он применил функции-ограничители, которые срабатывали на разрывах, предотвращая возникновения осцилляций и отключались в гладких областях. Данный подход был обобщен в методах ограниченной полной вариации (TVD) [55, 64]. К недостатком этого подхода следует отнести понижение порядка точности аппроксимации возле экстремумов до первого. В настоящее время разработаны методы, позволяющие преодолеть указанный недостаток [58, 62].

Третий подход состоит в применении адаптивных шаблонов интерполяции. Этот подход реализуется в существенно неосциллирующих схемах (ENO), предложенных в работе Хартена и др. [65] (являющихся дальнейшим усовершенствованием схем UNO [66]). В схемах ENO при проведении интерполяции исходных данных шаблон интерполяции строится локально таким образом, чтобы задействовать наиболее гладкие области, исключив, тем самым, интерполяцию через разрывы. Развитием ENO схем являются WENO (взвешенные ENO) [67] схемы, в которых вместо одного адаптивного шаблона используется положительная комбинация всех шаблонов. WENO схемы обладают рядом преимуществ по сравнению с ENO [68], в частности более полно используют исходные данные (ENO схеме r-ого порядка соответствует WENO схема $(2r+1)$ порядка) и значительно более эффективны на векторных компьютерах. ENO и WENO схемы обеспечивают однородный порядок точности по всему решению, не приводят к нефизическим осцилляциям на разрывах, однако являются диффузионными и размазывают контактные разрывы. Модификации ENO и WENO схем, позволяющие улучшить расчет областей с контактными разрывами, приведены в [69, 70, 71, 72].

Проекционно-эволюционные методы различаются на шаге реконструкции не только собственно методом интерполяции дискретных данных, но и тем, какие именно данные интерполируются. В методах конечных объемов [48] применяется реконструкция переменных ϑ (1.1). При этом считается, что ячейки содержат средние значения

$$\vartheta_j = \frac{1}{\Delta x} \int \vartheta(\zeta) d\zeta.$$

В конечно-разностных методах полагается, что значения функции ϑ заданы в узлах сетки

$$\vartheta_j \equiv \vartheta(x_j),$$

и осуществляется реконструкция потоков $f(\vartheta)$ [48, 51].

При переходе от скалярных уравнений переноса к системе уравнений Эйлера возникает вопрос о том, какие именно физические величины реконструировать: консервативные, простые или характеристические переменные. В принципе, применяются все три подхода, однако реконструкция характеристических переменных является наиболее надежной в случае сложных нелинейных задач [48].

В результате реконструкции характеристических переменных на каждой границе $j + 1/2$ между ячейками определяются значения функций $\mathbf{U}_L$ и $\mathbf{U}_R$ как результаты интерполяции в левой и правой от границы ячейках. На шаге эволюции на основе полученных значений рассчитывается поток $\mathbf{F}$ через границу. С этой целью решается локальная задача Римана о распаде произвольного разрыва [57] для системы уравнений Эйлера с начальными условиями

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x \leq 0, \\ \mathbf{U}_R, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Точное решение задачи Римана, зависящее только от $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{U}_R$ и x/t, известно [52, 57, 59] и может быть использовано для определения $\mathbf{U}$. Однако с точки зрения вычислительной эффективности такой подход не оправдан (для уравнений Эйлера сжимаемого газа необходима итерационная процедура [51, 52]), так что на практике обычно применяют приближенные методы решения задачи Римана, называемые Римановскими решателями[2]. Простейшими методами, которые особенно хорошо работают в гладких областях решения, являются метод расщепления простых переменных[3] [58] и метод Ошера [73]. Более точными и требующими существенно больше вычислений являются

[2] «Riemann solver»

[3] «primitive-variable splitting»

метод разностного расщепления потоков[4] [74] и метод векторного расщепления потоков[5] [75, 76].

В работе [58] предложена оригинальная методика, позволяющая повысить эффективность численного метода за счет использования простых решателей в «гладких» областях решения и более точных и сложных — в «негладких» областях. В этой же работе приведен простой и эффективный способ корректировки метода Рое, позволяющий устранить основной недостаток этого метода — появления в некоторых случаях нефизических решений [74, 77].

Для интегрирования по времени уравнения (1.2) наиболее часто применяются различные варианты методов Рунге-Кутты [48] и Эйлера [45]. TVD методы Рунге-Кутты являются эффективными, одношаговыми, легко программируемыми методами. В работе [48] указывается, что для гиперболических проблем наиболее выгодно использовать TVD методы Рунге-Кутты [78, 79], которые при определенных условиях являются устойчивыми при тех же самых ограничениях на временной шаг, что и метод Эйлера первого порядка точности. В настоящее время разработаны TVD-методы второго, третьего порядка точности и выше [48]. Другой путь дискретизации по времени — процедура Лакса-Вендроффа [80], основанная на модифицированном методе Эйлера. Это — весьма компактный одношаговый метод, обеспечивающий второй порядок точности. Устойчивость аналогичных методов более высокого порядка точности доказать сложно [48]. Из более специфичных методов следует отметить метод ASIRK [81], предназначенный для интегрирования по времени со вторым и более порядком точности гиперболических систем с жесткими правыми частями.

Схема Годунова и созданные на ее основе монотонные методы разработаны для случая политропного газа, с γ-законом [48] для давления

$$P = (\gamma - 1)e.$$

Приближение политропного газа означает, прежде всего, независимость теплоемкости газа от температуры. Для реальных высокотемпературных газов желательно использовать более точные приближения, учитывающие затраты энергии на ионизацию и диссоциацию газа.

В общем случае, при моделировании течения высокотемпературного газа требуется учитывать термическую и химическую неравновесность. Одна-

---

[4] «flux-difference splitting»

[5] «flux-vector splitting»

ко неравновесное моделирование является очень требовательным к вычислительным ресурсам. При небольших скоростях потока, когда время характерных процессов в потоке значительно превышает время протекающих в нем химических реакций, корректные результаты могут быть получены в предположении химического равновесия.

В литературе имеются исследования по обобщению классических схем, разработанных для совершенного газа, на случай реального газа. Обзор трех методов, обобщения подхода Рое [74] на случай реального равновесного газа приведен в [82]. В первом методе предпринимается попытка остаться в рамках приближения совершенного газа за счет некоторых дополнительных аппроксимаций [83]. Второй метод более последовательный: в матрицу Якоби явно добавляются производные давления по консервативным переменным [84]. Авторы третьего метода идут еще дальше, явно учитывая зависимости производных давления от состава смеси [85]. В работе [86] на случай реального газа обобщена численная процедура для получения точного решения задачи Римана. Явные схемы второго порядка точности для расчета разрывных течений реального газа развиты в [87]. Обобщение метода Рое и процедуры усреднения матрицы Якоби на случай термически и химически неравновесного течения произвольного газа приведено в работе [88]. Метод коррекции, позволяющий избежать потерю консервативности полной энергии на контактных разрывах в течении смеси совершенных газов с разными показателями адиабаты, предложен в [89].

Большинство перечисленных методов требуют вычисления давления и его производных, либо решение задачи Римана, что, во-первых, приводит к большим затратам машинного времени, во-вторых, проблематично в случае, когда не имеется аналитического выражения для давления (например, когда заданы только табличные значения). Указанные проблемы решены в методе релаксации энергии, представленном в работе [90].

Метод релаксации энергии разработан для системы уравнений Эйлера невязкого газа, дополненной уравнением состояния в виде произвольной функции давления от плотности и удельной внутренней энергии

$$P = P(\rho, e).$$

Идея метода релаксации энергии заключается в том, чтобы ввести релаксацию в нелинейный закон для давления, разложив удельную внутреннюю энергию на две составляющие

$$e = e_1 + e_2.$$

Внутренняя энергия e_1 соответствует некоторому простому закон для давления $P_1(\rho, e_1)$, например, закону политропного газа с показателем адиабаты γ_1. Вторая составляющая внутренней энергии e_2 отвечает за нелинейную часть давления и предполагается переносимой потоком как результат конвекции. Полученная релаксационная система, при выполнении определенных условий выбора P_1 в пределе бесконечной скорости релаксации соответствует исходной системе уравнений Эйлера.

В рамках подхода релаксации энергии авторы получили простое и эффективное обобщение классических схем для политропного газа на случай реального газа. По сравнению с другими методами, данный подход обладает следующими важными преимуществами: обращение к закону для давления происходит только один раз для одной точки сетки и одного шага по времени; никакие производные от давления и решение задачи Римана не используются; реализация метода не зависит от конкретного уравнения состояния. Авторы показали, что их метод обеспечивает устойчивость, энтропийное условие и необходимую точность для схем Годунова первого порядка. Численные примеры на основе схем первого порядка в рамках этого подхода приведены в [91]. В работе [92] исследовалась возможность применения метода релаксации совместно со схемами WENO высокого порядка точности в случае реальных газов. Численные эксперименты показали устойчивость и точность предложенного алгоритма и позволили сформулировать критерии выбора параметра γ_1.

1.3.3 Обзор методов моделирования радиационного переноса

Основы радиационного переноса и методы решения уравнения переноса излучения подробно изложены в работах [44, 93, 94, 95]. Процессы переноса излучения в вычислительных моделях МГД-генераторов с T-слоем играют важную роль, поскольку именно баланс радиационных потерь и джоулевой диссипации формирует стабилизированную структуру T-слоя, определяя, тем самым, энергетические характеристики генератора. В общем случае для получения полной картины радиационного переноса в потоке газа требуется решать уравнение переноса излучения. Прямое решение уравнение переноса излучения вполне возможно, однако требует больших затрат машинного времени, поэтому в таких моделях обычно используют более быстрые приблизительные методы расчета. Прежде всего, это приближение оптически тонкого тела и приближение лучистой теплопроводности, в которых предполагается, что свободная длина пробега фотона, соответственно, много больше или много меньше характерного размера излучающего тела. Применяются также комбинированные подходы, такие как приближение объемного излучателя [10] и толсто-тонкое приближение [94], в которых T-слой полагается оптически толстым телом, а окружающий газ — оптически тонким.

В модели детонационного МГД-генератора указанные подходы не могут быть использованы из-за больших перепадов давления и температур в канале генератора, которые приводят к сложному распределению коэффициентов поглощения. Для того, чтобы обеспечить необходимую точность расчета теплообмена излучением, необходимо обратиться к решению уравнения переноса излучения. Работа, состоящая в прямом решении уравнения переноса излучения, вполне выполнима, но чрезмерно велика по объему [45]. Поэтому обычно привлекаются приближенные подходы.

Следует отметить, что в системе при наличии теплообмена излучением отсутствует состояние термодинамического равновесия. Детальный расчет теплообмена в этом случае представляет собой сложную задачу [95]. Существенное упрощение дает принятие *гипотезы локального термодинамического равновесия* . «Газ находится в состоянии ЛТР, если частицы вещества находятся в равновесии между собой, а фотоны не находятся в равновесии с веществом» [96]. Радиационное поле в приближении ЛТР описывается локальными переменными, такими как состав, температура и давление; коэффициенты поглощения являются функциями перечисленных локальных переменных и частоты [93]. Поскольку в газах термодинамическое равновесие между частицами ввиду большой частоты столкновений между ними устанавливается очень быстро, условие ЛТР «является хорошим приближением для большинства задач радиационной газовой динамики» [94]. Возможные случаи нарушения гипотезы ЛТР (разреженный газ, большие температурные градиенты на длине свободного пробега фотона, мощные внешние источники возмущения и т.д. [94]) в ДМГДГ не реализуются.

Одним из способов упрощения решения уравнения переноса излучения является многогрупповое приближение. В этом приближении весь рассматриваемый спектр излучения делится на группы, для каждой из которых коэффициент поглощения полагается независящим от частоты. Выбор коэффициента поглощения обычно проводится с помощью какой-либо процедуры усреднения, чаще всего Планка или Росселанда [93]. При решении уравнения переноса излучения первоначально определяется распределение спектральной интенсивности излучения, а затем рассчитывается плотность спектрального потока. Дальнейшим упрощением является использование диффузионного приближения [44, 93], в котором уравнение переноса излучения заменяется на систему диффузионных уравнений, которые позволяют сразу находить плотность спектрального потока излучения. Применяется также более сложное, но и более точное квазидиффузионное приближение [93, 97], в котором коэффициенты диффузии периодически корректируются в процессе численного счета.

1.3.4 Обзор методов моделирования детонационной волны

Детонации в газах посвящены как специальные монографии [98, 99], так и обширные разделы в книгах по ударным волнам [100, 101]. Согласно гидродинамической теории детонации [98] явление детонации объясняется следующим образом. Фронт детонационной волны представляет собой ударную волну, которая нагревает газ до весьма высокой температуры. При такой температуре химическая реакция протекает бурно, выделяя со взрывом теплоту в некоторой зоне за фронтом. Позади этой зоны находятся постепенно расширяющиеся продукты реакции. Энергия химической реакции идет на поддержание ударной волны и нагревание продуктов реакции.

На основе гидродинамической модели разработан ряд одномерных моделей детонационной волны. В простейшей одномерной модели детонационной волны, предложенной Чепменом и Жуге, детонационная волна рассматривалась как ударная волна с энерговыделением на фронте. Обобщенный анализ Ренкина-Гюгонио позволяет определить газодинамические параметры на фронте детонационной волны и его скорость. Профиль давления на участках спада за детонационной волной, а также его изменение в зависимости от расстояния, пройденного волной от точки возникновения детонационного фронта, могут быть рассчитаны с помощью теории волны разложения Тейлора [99, 102]. Модель Чепмена-Жуге основана на допущении, что выделение энергии локализуется в плоскости ударного скачка. Поскольку скорости химических реакций конечны, это допущение несправедливо. Данный недостаток учтен в модели Зельдовича, фон Неймана и Дёринга, в которой учитывается задержка между сжатием вещества и воспламенением и конечность времени энерговыделения.

В настоящее время установлено, что детонационная волна является существенно двумерной. Границы применимости одномерных моделей определены в [99]. Авторы указывают, что одномерные модели позволяют прежде всего с высокой точностью рассчитать среднюю скорость ударного фронта в смесях, достаточно далеких от детонационных пределов. Однако даже для таких смесей наблюдаются заметные расхождения (до 15%) между давлениями и плотностями, измеренными и вычисленными на основе одномерных теорий. И лишь учитывая реальную структуру детонационного фронта, можно оценить поведение детонационных волн в конструкциях более сложного профиля, чем трубы постоянного поперечного сечения.

Следует отметить, что повысить точность расчета газодинамической структуры детонационной волны в рамках одномерной модели можно применив детальное моделирование кинетики химических реакций, как это сделано, например, в работе [15]. Однако такая модификация резко усложняет вычислительную модель и предъявляет жесткие требования к объему оперативной памяти и быстродействию. Другой подход заключается в использовании специальных приближенных моделей кинетики химических реакций и энерговыделения. Краткий обзор работ, использующих данный подход, приведен в работе [103]. Отмечается, в частности, важность проблемы согласования моделей химической кинетики и калорического уравнения состояния с учетом второго начала термодинамики [104]. Согласованная таким образом модель, не уступающая по точности известным моделям с детальной кинетикой и с достаточной для практики точностью, приведена в работе [105].

Точность расчета параметров фронта детонационных волн на основе одномерных моделей можно оценить, сравнив их с расчетными данными, приведенными в [106]. Авторы приводят расчетные значения параметров фронта детонационной волны для ряда смесей, в том числе для стехиометрической кислородно-водородной и воздушно-водородной. Рассчитанные данные соответствуют начальному давлению смеси 1 атм. В работе приведены формулы пересчета для случая произвольного начального давления.

1.3.5 Обзор методов учета реальных свойств газа

Важнейшим вопросом численного моделирования задач высокотемпературной газодинамики является учет реальных свойств рабочего газа. Для правильного моделирования процессов в газе нужно знать различные его макроскопические свойства — сжимаемость, теплоемкость, вязкость, тепло- и электропроводность, коэффициенты поглощения излучения и т.д., причем в широком диапазоне давлений и температур. К настоящему времени для многих газов составлены подробные таблицы термодинамических и радиационных свойств [107, 108, 109, 110].

Однако известно, что с повышением температуры химический состав газа существенно изменяется за счет процессов диссоциации, ионизации, а также протекания химических реакций. Для воздуха, например, при температурах $T = 2500$ К химический состав сохраняется в основном тот же, что и при комнатной температуре; в диапазоне температур $2500 \leq T \leq 4000$ К происходит диссоциация кислорода, незначительная диссоциация азота и слабое образование NO; при $4000 \leq T \leq 8000$ К диссоциируется азот, а при более высоких температурах происходит атомарная ионизация [111].

Учесть изменение состава газа можно через кинетические уравнения, как это сделано, например, в [14, 15]. Недостатком этого подхода является существенное усложнение вычислительной модели, связанное с необходимостью решения кинетических уравнений. В случае, если применимо равновесное приближение, когда времена протекания химических реакций много меньше характерных времен моделируемых процессов, применяется другой, гораздо более эффективный подход. Заранее рассчитываются зависимости свойств газа с учетом изменения его состава от двух независимых термодинамических переменных, например, температуры и давления. В процессе вычислений по известным значениям этих переменных требуемые свойства рассчитываются с помощью интерполяции табличных данных. Указанный подход существенно упрощает вычислительную модель, повышает ее вычислительную эффективность, а также делает ее практически независимой от вида газа.

Методы расчета зависимостей свойств газа с учетом изменения его состава, как правило, очень сложны, основаны на математическом моделировании микроскопических процессов в газе и реализуются специализированными пакетами программ. К числу таких пакетов относятся MONSTR [112], ТЕФИС (ИММ СО РАН), Thermo-Calc (http://www.met.kth.se/tc/), «Пакет УРС» [113, 114] и др. Пакет MONSTR, в частности, позволяет рассчитывать все необходимые для модели детонационного МГД-генератора свойства — зависимости теплоемкости, молекулярного веса, коэффициентов поглощения и электропроводности от давления и температуры, — для кислородно-водородной и воздушно-водородной смесей.

Работа с табличными данными требует реализации эффективных процедур интерполяции. В работе [115] разработана методика построения одномерных таблиц, позволяющих с высокой скоростью и точностью до 1.5% рассчитывать термодинамические свойства воздуха в широком диапазоне температур и давлений. Более простым и универсальным методом, хорошо зарекомендовавшим себя на практике, является метод логарифмической интерполяции, достаточно быстрый и гарантирующий положительность интерполируемой величины [93].

1.4 Общая постановка задачи

С учетом всего изложенного, общая постановка задачи по теме диссертации представляется следующим образом. В предположении локального термодинамического равновесия, в рамках магнитогидродинамического приближения, когда среда рассматривается сплошной, а токи смещения и анизотропия проводимости вследствие малости эффекта Холла не учитываются, необходимо разработать одномерную математическую модель детонационного МГД-генератора с T-слоем. При этом T-слой можно рассматривать как непроницаемый плазменный поршень; влиянием индуцированного магнитного поля, вязкостью газа и конвективным теплообменом T-слоя с потоком толкающего газа можно пренебречь. Генератор можно рассматривать состоящим из детонационной трубы, газодинамического сопла, электродной секции и диффузора. Нагрузку канала следует считать омической и постоянной.

При решении задачи необходимо учесть структуру и динамику формирования детонационной волны, теплофизические и радиационные свойства продуктов сгорания, газодинамику течения в профилированном канале с магнитным полем. С учетом нестационарности процесса МГД-взаимодействия, наличия в потоке ударных волн, больших градиентов температуры и давления, решение системы уравнений газодинамики необходимо проводить с помощью современных нелинейных монотонных методов второго порядка точности или выше, обеспечивающих эффективную монотонизацию решения. Граничные условия необходимо задать исходя из геометрии канала, характера течения рабочего газа с учетом специфики численного метода.

Модель должна обеспечивать:

1. изучение динамики энергетических, газодинамических и радиационных характеристик в тракте детонационного МГД-генератора с учетом ре-

альных термодинамических свойств продуктов детонации в широком диапазоне давлений и температур;

2. динамику формирования и развития T-слоя в каналах различной конструкции, при различных параметрах МГД-взаимодействия на различных рабочих газах;

3. получение как временных, так и пространственных характеристик.

Глава 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЕТОНАЦИОННОГО МГД-ГЕНЕРАТОРА

Вычислительная модель ДМГДГ включает в себя описание в одномерном приближении всех основных физических процессов в ДМГДГ: нестационарного течения реального газа, детонационного горения горючей смеси, радиационного переноса, генерации плазменного сгустка за фронтом детонационной волны, генерации электрического тока в МГД-канале. Логически вычислительная модель можно разделить условно на две части: газодинамическую и энергетическую.

2.1 Газодинамическая модель

Основу численной модели составляет модель нестационарного течения в канале ДМГДГ. Квазиодномерная система уравнений газовой динамики, описывающая динамику течения газа в канале переменного сечения, записывается в следующем виде [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A\rho u}{\partial x} = S_0,$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = S_1, \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{\partial (e+0.5u^2)}{\partial t} + \rho u\frac{\partial (e+0.5u^2)}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial APu}{\partial x} = S_2.$$

Здесь S_0, S_1, S_2 — источники массы, импульса и энергии соответственно.

Система (2.1), описывающая динамику процессов в канале детонационного МГД-генератора, записывалась в консервативных переменных в виде законов сохранения массы, момента импульса и полной внутренней энергии:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial AU}{\partial t} + \frac{\partial AF}{\partial x} = S, \\
U = (\rho, \quad m, \quad E)^T, \\
F = (m, \quad m^2/\rho + P, \quad (E+P)m/\rho)^T, \\
S = \begin{pmatrix} 0 \\ AjB + P\dfrac{\partial A}{\partial x} \\ A(Q_{ini} + Q_{det} - Q_{rad} - Q_{load}) \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

$$
E = e + 0.5\rho u^2, \tag{2.3}
$$

$$
m = u\rho. \tag{2.4}
$$

Индекс «T» означает транспонирование. Запись системы (2.1) в виде (2.2) предполагает, что сечение канала не изменяется во времени, источники массы отсутствуют:

$$
\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad S_0 = 0.
$$

Система уравнений (2.2) замыкалась калорическим и термическим уравнениями состояния, взятыми в общем виде

$$
P = P(\rho, e), \quad T = T(\rho, e). \tag{2.5}
$$

Источниковые члены Q_{ini}, Q_{det}, Q_{rad}, Q_{load}, входящие в правую часть (2.2), отвечали процессам преобразования энергии, связанным с инициированием T-слоя, тепловыделением на фронте детонационной волны, переносом излучения и взаимодействием T-слоя с магнитным полем. Методы расчета источников и стоков энергии составляют основу энергетической модели и представлены в разделе 2.2.

2.1.1 Граничные условия

Для задания граничных значений применялась методика фиктивных ячеек [45]. Вычислительная область дополнялась слева и справа некоторым количеством ячеек таким образом, чтобы после каждого шага по времени все ячейки вычислительной области содержали корректные значения, а значения в фиктивных ячейках задавались исходя из граничных условий. Такой подход при реализации численного метода позволяет предполагать, что численные функции определены за пределами вычислительной области везде, где это необходимо. Количество фиктивных ячеек в общем случае зависит от численного метода и вида используемых граничных условий.

Граничные условия описывали геометрические особенности конструкции канала ДМГДГ. У закрытого левого торца детонационной секции ставилось условие отражения газа от стенки. Применялась методика «зеркального состояния» [45, 116]. Фиктивные ячейки располагались слева от первой ячейки, левая граница которой соответствовала стенке. Значения в них задавались равными значениям в равноудаленных от стенки ячейках вычислительной области. Знак скорости при этом заменялся на противоположный:

$$\begin{cases} P_{0-i} = P_{0+i}, \\ u_{0-i} = -u_{0+i}, \\ \rho_{0-i} = \rho_{0+i}, \end{cases}$$

$$i > 0.$$

На правом торце канала генератора располагается диффузор, поэтому справа задавались граничные условия, соответствующие свободному вылету газа из канала.

Постановка граничных условий свободного вылета существенно зависит от того, является ли выходящий поток дозвуковым или сверхзвуковым [116]. В случае сверхзвукового потока все возмущения выносятся из канала и дополнительных граничных условий не требуется, поэтому для восстановления значений в фиктивных ячейках использовались однородные граничные условия

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i.$$

В случае дозвукового потока должны быть заданы дополнительные граничные условия для одной из газодинамических переменных, чаще всего для давления [117]. Давление на выходе из диффузора полагалось равным давлению во внешней среде $P = \mathrm{const}$. Плотность экстраполировалась из внутренних точек области. Для определения скорости использовалось соотношение на $u + c$ характеристике

$$dP + \rho c du = 0,$$

$$\begin{cases} P_{N+1} = P_*, \\ \rho_{N+1} = 2\rho_N - \rho_{N-1}, \\ u_{N+1} = u_N + \dfrac{P_{N+1} - P_N}{\rho_N c_N}, \end{cases}$$

$$\mathbf{V}_{N+i} = \mathbf{V}_{N+i-1}, \quad i > 1,$$

где $P_* = \mathrm{const}$ — давление во внешней среде.

2.2 Энергетическая модель

Задача энергетической модели состоит в определении источников и стоков энергии в правой части системы уравнений (2.2). Она включает в себя модели основных процессов преобразования энергии в канале ДМГДГ: радиационного переноса, распространения детонационной волны, инициирования T-слоя и взаимодействия T-слоя с магнитным полем.

2.2.1 Радиационный перенос

Основной задачей при расчете переноса излучения являлось определение удельных радиационных потерь энергии в канале генератора. В ДМГДГ энергию излучает только высокотемпературный T-слой. При достаточно низких давлениях средняя длина свободного пробега фотонов значительно превышает характерные размеры T-слоя. В этом случае T-слой ведет себя как оптически тонкое тело, излучая энергию всем объемом. Излученная энергия при этом покидает канал, практически не оказывая влияния на окружающий поток газа. Удельные радиационные потери в этом случае рассчитывались в приближении оптически тонкого тела [44].

При высоких давлениях в канале генератора (выше 5-10 атм) существенную роль играет поглощение излучения. Излученная энергия поглощается как в самом T-слое (эффект «запирания» излучения), так и в окружающем газе. При достаточно высоких давлениях поглощение энергии в T-слое возрастает настолько, что потери энергии в T-слое происходят только с его поверхности. В этом случае для определения удельных радиационных потерь решалось уравнение переноса излучения. Решение уравнения переноса излучения является очень тяжелой задачей с точки зрения времени вычислений и объема оперативной памяти. В тоже время поглощение излучения в T-слое при высоких давлениях является ключевым моментом концепции

ДМГДГ, его необходимо учитывать как можно более точно, поэтому без решения уравнения переноса излучения не обойтись. С целью увеличения эффективности модели для решения уравнения применялось многогрупповое приближении [93].

Приближение оптически тонкого тела

Приближение оптически тонкого тела может применяться в случае, когда характерные размеры тела значительно меньше средней длины свободного пробега фотонов. В канале ДМГДГ потери энергии из единицы объема вещества в единицу времени в этом приближении записывались в следующем виде:

$$Q_{rad} = \begin{cases} c\int\limits_0^\infty \chi_\nu U_\nu^r d\nu & \text{в области } T\text{-слоя}, \\ 0 & \text{вне } T\text{-слоя}, \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$U_\nu^r = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT})-1}. \tag{2.7}$$

Здесь χ — коэффициент поглощения, поправленный на вынужденное излучение [44], U_ν^r — спектральная функция плотности равновесного излучения, характеризующая количество энергии равновесного излучения частоты ν в единице объема, приходящееся на единичный интервал частот.

Многогрупповое приближение

В общем случае удельные радиационные потери в канале ДМГДГ определялись из решения одномерного уравнения переноса излучения для плоского слоя

$$\hat{\mu}\frac{dI_\nu}{dx} + \chi_\nu I_\nu = 2\pi\chi_\nu I_\nu^r, \quad x_0 \le x \le x_N, \quad -1 \le \hat{\mu} \le 1, \tag{2.8}$$

где x — Эйлерова координата, ν — частота фотона, I_ν — спектральная интенсивность излучения, $\hat{\mu}$ — косинус угла между направлением движения фотона и осью x, χ_ν — коэффициент поглощения фотонов с частотой ν, поправленный на вынужденное излучение [44], I_ν^r — спектральная интенсивность равновесного излучения

$$I_\nu^r = \frac{2h\nu^3}{c^2\left(\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)-1\right)}. \tag{2.9}$$

В качестве граничных условий применялись условия отсутствия падающего извне излучения [93]

$$I_\nu(x_0, \hat{\mu}, \nu) = 0, \quad I_\nu(x_N, \hat{\mu}, \nu) = 0. \tag{2.10}$$

По известному распределению спектральной интенсивности излучения рассчитывались плотности спектральной энергии и спектрального потока излучения

$$U = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_{-1}^{1} I_\nu d\hat{\mu}, \quad H = \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_{-1}^{1} \hat{\mu} I_\nu d\hat{\mu}. \tag{2.11}$$

и определялись объемные радиационные потери

$$Q_{rad} = \mathrm{div} H. \tag{2.12}$$

Для повышения вычислительной эффективности модели уравнение переноса излучения (2.8) решалось в многогрупповом приближении [93]. В этом приближении весь спектр излучения разбивается на конечное число N_ν частотных интервалов — групп. Внутри каждой группы коэффициент поглощения полагается не зависящим от частоты

$$\chi(\nu) = \chi_k, \quad \nu_k \le \nu \le \nu_{k+1}, \quad k = 0 \ldots N_\nu.$$

Значение коэффициента поглощения в группе определяется с помощью формул усреднения. В настоящей работе использовалась формула усреднения Планка:

$$\chi_k = \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \chi_\nu I_\nu d\nu \Big/ \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_\nu d\nu. \tag{2.13}$$

После разделения спектра на группы правую часть уравнения (2.8) можно представить в виде

$$\chi_k \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_\nu^r d\nu = \chi_k \sigma_k(T, \nu_k, \nu_{k+1}) T^4/\pi,$$

$$\sigma_k(T) = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3}[\tilde{\sigma}(\frac{h\nu_{k+1}}{kT}) - \tilde{\sigma}(\frac{h\nu_k}{kT})],$$

$$\tilde{\sigma}(x) = \int\limits_0^x \frac{\zeta^3}{\exp(\zeta - 1)} d\zeta,$$

а уравнение переноса излучения записывается в виде системы многогрупповых уравнений

$$\hat{\mu}\frac{dI_k}{dx} + \chi_k I_k = 2\chi_k \sigma_k T^4. \tag{2.14}$$

Далее проводится дискретизация по углам — в пространстве выбирается $N_{\hat{\mu}}$ направлений, так, чтобы фотоны, двигающиеся в разных направлениях, могли учитываться различно. После дискретизации по углам система уравнений (2.14) перейдет в следующую:

$$\hat{\mu}_m \frac{dI_{k,m}}{dx} + \chi_k I_{k,m} = 2\chi_k \sigma_k(T) T^4, \quad k = 0 \ldots N_\nu, \quad m = 0 \ldots N_{\hat{\mu}}. \tag{2.15}$$

Таким образом, при решении уравнения переноса излучения в многогрупповом приближении требуется решить систему (2.15), состоящую из $N_\nu \times N_{\hat{\mu}}$ одинаковых по структуре дифференциальных уравнений. Решив их, можно определить поток и плотность энергии излучения

$$H = \sum_{k=0}^{N_\nu} \sum_{m=0}^{N_{\hat{\mu}}} \hat{\mu}_m I_{k,m}, \quad U = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{N_\nu} \sum_{m=0}^{N_{\hat{\mu}}} I_{k,m},$$

и рассчитать по формуле (2.12) объемные радиационные потери. Разностная схема, которая применялась для решения каждого из уравнений системы (2.15) приведена в приложении А.1. Решение проводилось методом скалярной прогонки [118].

2.2.2 Моделирование взаимодействия T-слоя с магнитным полем

Взаимодействие T-слоя с магнитным полем учитывалось в приближении малости индуцированных магнитных полей и токов Холла. Электрическая мощность и плотность тока в этом случае записываются в следующем виде [31]:

$$Q_{load} = -j\mathcal{E}, \tag{2.16}$$

$$j = -\sigma(uB - \mathcal{E}). \tag{2.17}$$

Величина напряженности электрического поля $\mathcal{E}$ определяется схемой нагрузки на генератор. Рассматривались две возможные схемы нагрузки: с постоянным коэффициентом нагрузки и с постоянным сопротивлением нагрузки.

В первом случае полагался постоянным коэффициент нагрузки [6]

$$K = \frac{\mathcal{E}}{u(x)B} = \text{const.} \tag{2.18}$$

В этом приближении плотность тока, электрическая мощность, выводимая в нагрузку из единицы объема и диссипация в единице объема составляют, соответственно

$$j(x) = \sigma(x)uB(1-K),$$
$$Q_{load} = -j\mathcal{E} = \sigma u^2 B^2 (1-K)K,$$
$$Q_{dis} = juB(1-K) = \sigma u^2 B^2 (1-K)^2.$$

Случай $K = 0$ соответствует режиму короткого замыкания, $K = 1$ — режиму холостого хода.

Модель постоянного коэффициента нагрузки, являющегося одним из критериев МГД-взаимодействия в теории МГД-генераторов, широко используется на практике. В тоже время равенство (2.18) выполняется только в случае идеально секционированного МГД-канала, в котором каждой области T-слоя соответствует свое сопротивление нагрузки. Реализовать такую схему нагрузки в реальном генераторе практически невозможно.

Более реалистичной является модель постоянного сопротивления нагрузки. Такая модель соответствует генератору со сплошными, идеально проводящими электродами (градиент потенциала вдоль электродов отсутствует), нагруженными на постоянное сопротивление R_{load}.

Напряженность электрического поля, величины тока и электрической мощности в случае постоянного сопротивления нагрузки можно рассчитать, разложив область T-слоя вдоль оси X на N частей шириной Δx, приняв в каждой части значения газодинамических параметров независящими от x. Такой подход позволяет рассматривать T-слой в виде ряда независимых параллельно соединенных источников тока (см. рис. 2.1). Каждый источник обладает ЭДС, равной

$$\varepsilon_i = u_i B_i A_{y_i}, \quad 1 \le i \le N,$$

и внутренним сопротивлением

$$R_{layer,i} = \frac{1}{\sigma_i}\frac{A_{y_i}}{\Delta x_i A_z}, \tag{2.19}$$

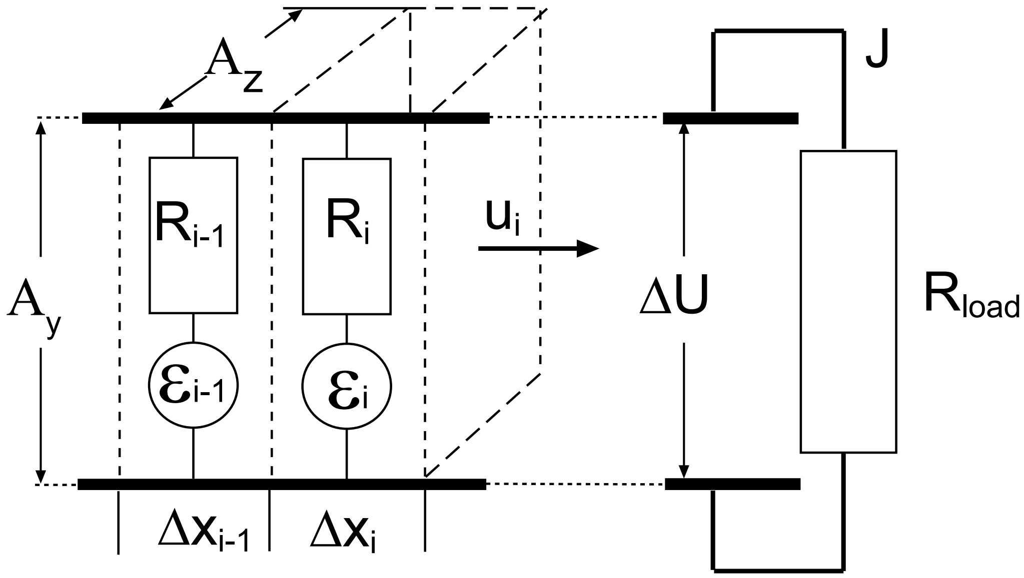


Рис. 2.1. Представление T-слоя в виде ряда параллельно соединенных источников тока в модели постоянного сопротивления нагрузки.

где $\sigma_i = \sigma(P_i, T_i)$ — проводимость газа в i-ой части T-слоя. Согласно обобщенному закону Ома ток в цепи «нагрузка»-«i-ый источник» равен

$$J_i = \frac{\varepsilon_i - \Delta U}{R_{layer,i}}, \tag{2.20}$$

где

$$\Delta U = JR_{load} = \mathcal{E}A_y.$$

Полный ток через нагрузку равен равен сумме токов через все части T-слоя

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i}{R_{layer,i}(1 + R_{load}/R_{layer})}, \tag{2.21}$$

где R_{layer} — полное сопротивление T-слоя

$$R_{layer} = 1/\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_{layer,i}}.$$

Подставляя в (2.21) выражение (2.19), устремляя $\Delta x_i \to 0$ и переходя от суммирования к интегрированию получаем выражение для полного тока через нагрузку

$$J = \frac{A_z}{(1 + R_{load}/R_{layer})} \int\limits_{T\text{-слой}} u(x)B(x)\sigma(x)dx. \tag{2.22}$$

Электрическая мощность, отдаваемая в нагрузку из единицы объема и мощность джоулевой диссипации в единице объема записываются, соответственно как

$$Q_{load} = -j\mathcal{E} = -jJR_{load}/A_y, \tag{2.23}$$

$$Q_{dis} = j(uB - \mathcal{E}), \tag{2.24}$$

где плотность тока в T-слое равна

$$j = \frac{\sigma}{A_y}(\varepsilon - JR_{load}). \tag{2.25}$$

Коэффициент нагрузки в этом приближении не является постоянным и формально может быть представлен в виде

$$K = |Q_{load}|/(|Q_{dis}| + |Q_{load}|). \tag{2.26}$$

Для развития T-слоя схема постоянного сопротивления нагрузки предпочтительнее схемы с постоянным коэффициентом нагрузки, т.к. в начальной стадии развития T-слоя его интегральное сопротивление значительно больше сопротивления нагрузки и коэффициент нагрузки близок к нулю. Поэтому в начальный момент почти вся генерируемая энергия тратится на разогрев T-слоя, что ускоряет его формирование.

2.2.3 Моделирование распространения детонационной волны

При моделировании детонации использовалась модель Чепмена-Жуге, согласно которой детонационная волна рассматривается как ударная волна с энерговыделением на фронте. Инициирование волны осуществлялось начальным искусственным вложением энергии в несколько вычислительных ячеек, расположенных возле левой границы вычислительной области. Вложенной энергии было достаточно для создания ударной волны с градиентом давления P_1/P_0

$$P_1 > P^* > P_0, \tag{2.27}$$

где давление P^* выбиралось экспериментально (см. раздел 2.7.2). Далее полагалось, что точка с давлением P^* соответствует фронту детонационной волны. При движении инициированной ударной волны фронт смещался. На каждом шаге по времени рассчитывалась величина смещения фронта и в каждой вычислительной ячейке, частично или полностью пройденной фронтом за этот временной шаг, осуществлялось энерговыделение

$$Q_{det} = \rho_0 Q_{mix} \frac{\Delta_f x}{\Delta x \Delta t}, \tag{2.28}$$

где $\Delta_f x$ — расстояние, пройденное фронтом в ячейке, ρ_0 — плотность начальной смеси, Q_{mix} — теплопроизводительность горючей смеси. Энерговыделение на фронте прекращалось при достижении волной заданной точки канала, соответствующей границе горючей смеси и продуктов сгорания.

Во всех вычислительных экспериментах в качестве горючего использовался водород. Теплопроизводительность воздушно-водородной смеси рассчитывалась по формуле [119]

$$q = Q_{H_2}|_{T_0} \eta / (1 + \alpha L), \tag{2.29}$$

где $Q_{H_2}|_{T_0}$ — теплота сгорания водорода при температуре T_0, η — коэффициент полноты сгорания горючего, α — коэффициент избытка воздуха. Массовый стехиометрический коэффициент L численно равен количеству килограммов воздуха, требуемого для сгорания одного килограмма водорода и определяется составом горючей смеси.

Оценка точности модели приведена в разделе 2.7.2.

2.2.4 Моделирование инициирования T-слоя

Процесс инициирования токового слоя описывался интегрально. Предполагалось, что при достижении детонационной волной заданной точки в канале генератора, за фронтом волны в течении заданного промежутка времени τ_{ini} происходит нагрев области газа до температуры T_{ini}. Область инициирования располагалась в конце детонационной секции, так что после начала инициирования детонация прекращалась.

Процесс инициирования моделировался подводом в область инициирования размером Δ_{ini} энергии E_{ini}, достаточной для разогрева газа до температуры T_{ini}. Во времени подводимая энергия изменялась синусоидально, что имитировало разряд конденсаторной батареи. Удельная мощность при инициировании равнялась

$$Q_{ini} = \begin{cases} Q_{ini}(t,x), & \begin{array}{c} t - t_{ini} \in [0, \tau_{ini}], \\ x - x_{ini} \in [-0.5\Delta_{ini}, 0.5\Delta_{ini}], \end{array} \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$Q_{ini}(t,x) = \frac{0.5\pi E_{ini}}{\Delta_{ini}\tau_{ini}A}\sin{(\pi\frac{t-t_{ini}}{\tau_{ini}})}.$$

Здесь t_{ini} — момент начала инициирования T-слоя. Подводимая за один шаг по времени энергия делилась равномерно между всеми ячейками, входящими в зону инициирования Δ_{ini}. Ширина зоны инициирования во времени не изменялась; изменение положения центры зоны инициирования x_{ini} учитывалось с помощью локальных значений скорости. Момент инициирования T-слоя определялся приходом фронта детонационной волны в точку, расположенную на расстоянии Δx_{ini} от начала электродной секции.

2.3 Расчетные характеристики

В процессе численного моделирования рассчитывались следующие основные величины.

- $E_{int}(t)$, $E_{layer}(t)$ — полная энергия потока газа в канале генератора и в токовом слое.
- $W_{det}(t)$, $W_{ini}(t)$, $W_{load}(t)$, $W_{dis}(t)$, $W_{rad}(t)$ — мощность процессов детонационного горения, инициирования токового слоя, энерговыделения на нагрузке, джоулевой диссипации и переноса излучения в заданный момент времени:
$$W_*(t) = \sum_j Q_*(t)_j V_j.$$
Величины Q_{det}, Q_{ini}, Q_{load}, Q_{dis}, Q_{rad} рассчитывались соответственно по формулам (2.28), (2.30), (2.23), (2.24), (2.12). Суммирование проводится по всему каналу.
- $E_{det}(T)$, $E_{ini}(T)$, $E_{load}(T)$, $E_{dis}(T)$, $E_{rad}(T)$ — количество преобразованной энергии в процессах детонационного горения, инициирования токового слоя, энерговыделения на нагрузке, джоулевой диссипации и переноса излучения к заданному моменту времени:
$$E_*(T) = \sum_{t=0}^{T} W_*(t)\Delta t. \tag{2.31}$$
- $E_{out}(T)$ — энергия, вынесенная потоком газа из канала через диффузор к заданному моменту времени:
$$E_{out}(T) = \sum_{t=0}^{T} E_{\int}(t,x_r)\frac{u(t,x_r)\Delta t}{\Delta x},$$

где x_r соответствует правой границе диффузора.

- $J_{load}(t)$ — суммарный ток на нагрузке.
- $j_{layer}(t, x)$, $J_{layer}(t)$ — плотность тока и суммарный ток в T-слое.
- $\Delta\ell(t)$, $x_{layer}(t)$ — продольный размер T-слоя и положение его центра. Границы T-слоя определялись по уровню температуры $T = 7 \cdot 10^3$ K.
- W_{el} — электрическая мощность генератора в предположении, что ширина канала соответствует характерному размеру T-слоя
$$W_{el}(T) = \frac{\tilde{\delta} E_{load}}{T}, \tag{2.32}$$
где T — время прошедшее с момента инициирования детонационной волны до выхода T-слоя из канала, $\tilde{\delta}$ — характерный размер T-слоя.
- W_V — удельная электрическая мощность генератора
$$W_V(T) = \frac{E_{load}}{T \cdot V_{el}}, \tag{2.33}$$
где V_{el} — объем электродной секции, T — время движения T-слоя по электродной секции.
- η_N — КПД преобразования энтальпии
$$\eta_N = (E_{load} - E_{ini})/E_{det}. \tag{2.34}$$
- $K(t)$ — эффективный коэффициент нагрузки (2.26).
- $M(t, x)$ — число Маха.
- $R_H(t, x)$ — параметр гидромагнитного взаимодействия
$$R_H(t, x) = \frac{B(x)^2}{2\mu_0 P(x)}. \tag{2.35}$$
- $Re_m(t, x)$ — магнитное число Рейнольдса
$$Re_m(t, x) = \mu_0 \int\limits_{T\text{-слой}} u(x)\sigma(x)dx. \tag{2.36}$$

- Ξ — энергетический баланс, определяемый на каждом шаге по времени для контроля правильности вычислений

$$\Xi(t) = \frac{E_{int}(0) + E_{det} + E_{ini}}{E_{int}(t) + E_{load}(t) + E_{rad}(t) + E_{out}(t)} = \text{const}. \tag{2.37}$$

Во всех расчетах энергобаланс сохранялся с погрешностью $\pm 2\%$, что согласуется с точностью выбранных численных методов.

2.4 Термодинамические свойства

Для расчета термодинамических и радиационных характеристик рабочего газа применялся пакет программ MONSTR [112]. Этот пакет позволяет насчитывать табличные зависимости энтальпии, молекулярного веса, плотности, коэффициентов поглощения и электропроводности в зависимости от температуры и давления. Величины в таблицах заданы для фиксированных базисных значений давления P_i $(1 \leq i \leq N_i)$ и температуры T_n $(1 \leq n \leq N_n)$, диапазон изменения которых составляет соответственно $1000 \div 40000$ K и $0.1 \div 1000$ атм. Для интерполирования табличных значений применялся метод логарифмической интерполяции (приложение A.2).

В расчетах применялось два варианта горючей смеси: стехиометрическая кислородно-водородная и воздушно-водородная. Данные об их составе, являющиеся начальными данными при расчете термодинамических свойств пакетом MONSTR, представлены в таблице 2.1.

Смесь	Реакция горения	Состав (объемные доли)
Кислородно-водородная	$H_2 + 0.5O_2 = H_2O$	$H_2(0.6666)$, $O_2(0.3334)$
Воздушно-водородная	$H_2 + O_2 + nN_2 = H_2O + nN_2$	$H_2(0.3056)$, $O_2(0.1528)$, $N_2(0.5416)$

Таблица 2.1. Горючие смеси, применяемые в расчетах.

Система уравнений (2.1) замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния газа (2.5), записанными в переменных «энергия» и «плотность». Энергия и плотность выбраны в качестве независимых переменных по двум причинам. Во-первых, в этом случае для обобщения методов газодинамики на случай реального газа может быть использована процедура релаксации энергии. Во-вторых, плотность и энергия являются консервативными переменными и рассчитываются непосредственно при решении уравнений (2.2), так что другие газодинамические параметры — давление и температура — могут быть рассчитаны без использования итерационных процедур.

Пакет MONSTR позволяет насчитывать таблицы уравнений состояния реального газа только в переменных «давление»и «температура»

$$H = H(P, T), \quad \rho = \rho(P, T). \tag{2.38}$$

Попытки преобразовать зависимости (2.38) к виду (2.5) не увенчались успехом, главным образом из-за недостаточной точности исходных табличных данных. Потеря точности при преобразовании таблиц и последующей интерполяции приводила к неустойчивости численного решения даже в простых тестовых задачах. Эта проблема может быть решена, по-видимому, единственным способом: необходимо провести расчет таблиц реального газа с хорошей точностью сразу в переменных «энергия»и «плотность», для чего требуется другой пакет программ для расчета термодинамических свойств.

В связи с изложенным, в модели ДМГДГ применялись термическое уравнение состояния идеального газа и калорическое уравнение состояния реального газа (для которых достаточно зависимостей вида (2.38))

$$P = (\gamma - 1)e, \quad T = \frac{(\gamma - 1)}{\mu(P, T)\mathcal{R}\prime} \frac{e}{\rho}, \tag{2.39}$$

где $\gamma = \mathrm{const}$ — показатель адиабаты. В процессе численного счета определялись значения энергии и плотности и с помощью термического уравнения состояния рассчитывалось давление P_0. Затем методом простых итераций решалось нелинейное уравнение

$$\frac{T}{\mu(T, P_0)} = \frac{P_0}{\rho\mathcal{R}\prime} \tag{2.40}$$

и определялась температура. Решение уравнения (2.40) не вызывало затруднений, поскольку зависимость молекулярного веса от температуры носит линейный характер.

Вычислительные эксперименты показали, что результаты моделирования работы ДМГДГ существенно зависят от значения показателя адиабаты. Увеличение γ улучшало энергетические характеристики генератора. В общем случае значение γ необходимо выбирать на основе анализа таблиц термодинамических свойств реального газа. Формально уравнения реального газа можно рассмотреть как уравнения идеального газа с показателем адиабаты, являющимся функцией термодинамических переменных. Зависимость показателя адиабаты от давления и температуры была получена на основе табличных зависимостей вида (2.38) следующим образом:

$$\mu(T,P) = \frac{\mathcal{R}_{\prime}\mathcal{P}}{T\rho}, \quad C_p(T,P) = H(T,P)/T, \quad C_v(T,P) = C_p - \mathcal{R}_{\prime}/\mu(\mathcal{T},\mathcal{P}),$$

$$\gamma(T,P) = \frac{C_p(T,P)}{C_v(T,P)}. \tag{2.41}$$

Результаты расчета γ представлены на рис. 2.2. Наиболее сильно показатель адиабаты зависит от температуры. Общий характер зависимости следующий: при низких и высоких температурах показатель адиабаты имеет высокие значения $(1.25 - 1.35)$, при средних — низкие (до $1.25 - 1.115$). Для кислородно-водородной смеси низкие значения показателя адиабаты наблюдаются в диапазоне $5 \cdot 10^3 \div 12 \cdot 10^3$ K, для воздушно-водородной — в диапазоне $5 \cdot 10^3 \div 18 \cdot 10^3$ K. Это означает, что в канале ДМГДГ показатель адиабаты будет высоким в потоке толкающего газа и в центральной области T-слоя, и низким на границах T-слоя.

Для более детальной оценки влияния реальных свойств газа на режим работы ДМГДГ было сконструировано приближенное термическое уравнение состояния реального газа, отражающее указанную тенденцию изменения показателя адиабаты. На основе реальных уравнений состояния (2.38) была рассчитана приближенная зависимость давления от энергии и плотности и получено грубое распределение показателя адиабаты

$$\gamma(e,\rho) = P(e,\rho)/e + 1 \tag{2.42}$$

Точность преобразований, однако, была достаточной для того, чтобы проследить характер изменения показателя адиабаты от плотности и энергии. Анализ полученного распределения показал, что показатель адиабаты слабо зависит от энергии и существенно от плотности. В результате, приближенное термическое уравнение состояния реального газа было выписано в следующем виде:

$$P(e,\rho) = (\gamma_0 - 1)ef(\rho, e), \tag{2.43}$$

где $\gamma_0 = 1.3$, f — корректирующая функция:

$$f = 1 - g(e)\exp(-a\rho/\rho_0)\sin(w\rho/\rho_0 + \phi), \quad g(e) = b + ce/e_0.$$

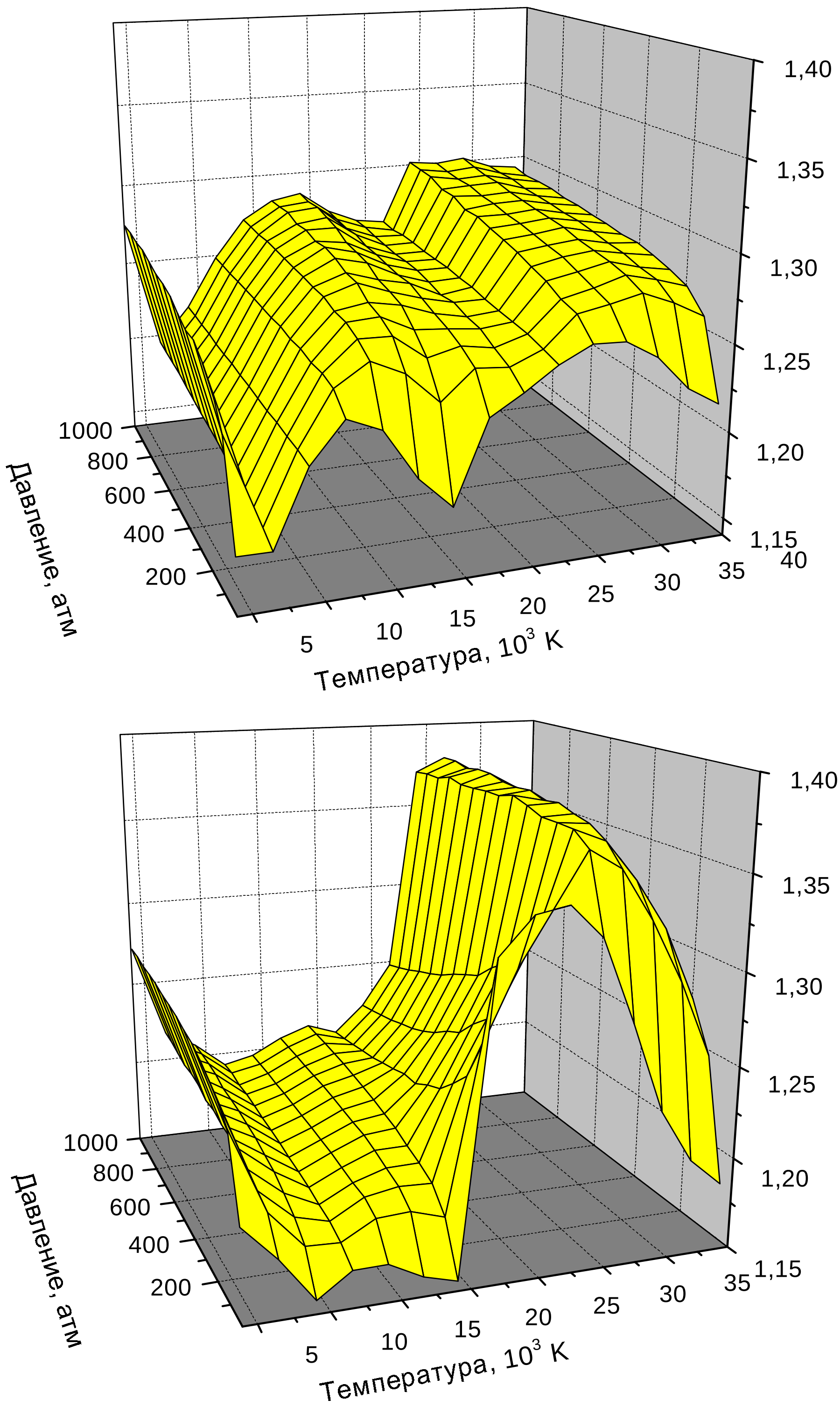


Рис. 2.2. Зависимость показателя адиабаты от давления и температуры для воздушно-водородной (A) и кислородно-водородной (B) смесей.

Для кислородно-водородной смеси параметры функции f принимались равными

$$a = 20, \quad b = 12, \quad c = 1.3, \quad w = 0.5\pi, \quad \phi = 0, \quad E_0 = 7 \cdot 10^7, \quad \rho_0 = 30.$$

Значения показателя адиабаты, полученные с помощью приближенной фор-

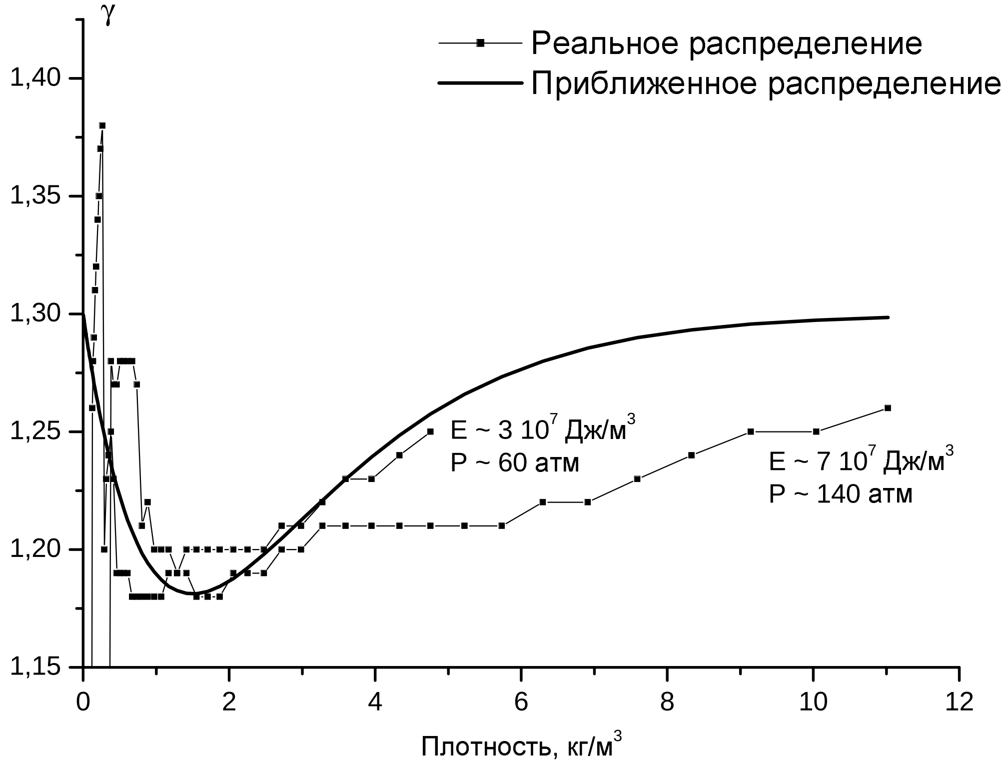


Рис. 2.3. Зависимость показателя адиабаты от плотности.

мулы (2.43), представлены на рис. 2.3 в сравнении с реальным данными.

2.5 Вычислительный алгоритм

Для численного решения системы уравнений (2.2) применялись два upwind-метода, в дальнейшем обозначаемые как MP2 и WENO3. Оба метода обеспечивали второй порядок точности по времени и по пространству. Детали их реализации представлены в таблице 2.2. Во всех расчетах с уравнением состояния политропного газа применялся более экономичный метод MP2 (его описание приведено в приложении A.4). Поскольку особенности реализации метода MP2 не позволяют обобщить его на случай реального газа с помощью процедуры релаксации энергии, в модели был реализован метод WENO3, для которого такое обобщение возможно [92]. Способ обобщения метода WENO3 на уравнения реального газа с помощью процедуры релаксации энергии приведен в приложении A.9. Следует отметить, что в [62] предложена модификация метода MP2, также позволяющая использовать процедуру релаксации энергии.

Метод MP2
Upwind-метод второго порядка точности по пространству и времени. Реконструкция на основе подхода монотонных ограничителей (приложение A.4.1). На шаге эволюции используются метод расщепления простых переменных (приложение A.5.1) в гладких областях течения и модифицированный метод Рое (приложение A.5.2) в негладких областях. Применяется оригинальная методика оценки гладкости решения. Интегрирование по времени основано на процедуре Лакса-Вендроффа. Метод может использоваться только для случая политропного газа. К преимуществам метода можно отнести точность расчета течения в области резких градиентов параметров и вычислительную эффективность за счет оптимизации решения задачи Римана. К недостаткам — использование процедуры Лакса-Вендроффа для интегрирования по времени, что затрудняет адаптацию метода на случай реального газа с помощью метода релаксации энергии. Метод взят из работы [58]. Детали реализации приведены в приложении A.4.
Метод WENO3
Upwind-метод второго/третьего порядка точности по пространству и времени. Реконструкция на основе адаптивных WENO-шаблонов (приложение A.7). На шаге эволюции применяется модифицированный метод Рое (приложение A.5.2). Интегрирование по времени осуществляется с помощью TVD методов Рунге-Кутты 2, 3-его порядка точности (приложение A.8). Обобщение метода на случай уравнений состояния реального газа проведено с помощью метода релаксации энергии (приложение A.9). К преимуществам метода следует отнести возможность работы с уравнениями реального газа. К недостаткам — существенно более низкую скорость работы по сравнению с MP2. Метод реализовывался согласно работам [68, 48, 58].

Таблица 2.2. Сравнительные характеристики методов решения системы уравнений (2.2).

2.6 Реализация вычислительной модели ДМГДГ

Вычислительная модель ДМГДГ была реализована в виде пакета прикладных программ на языке C++. Пакет включает в себя следующие программы.

- Основную расчетную программу *CPVC*, предназначенную для проведения вычислительных экспериментов, моделирующих работы детонационного МГД-генератора. В настройки программы входит возможность выбора конфигурации канала генератора, численного метода газодинамики, граничных условий, параметров вычислительных моделей процессов преобразования энергии, уравнений состояний и свойств рабочей смеси. В программу входит модуль визуализации параметров течения в канале МГД-генератора в процессе проведения вычислений и модуль сохранения результатов расчета. Программа спроектирована в виде ряда независимых библиотечных модулей, отвечающих различным составляющим вычислительной модели (рис. 2.4), которые также использовались при построении других программ пакета.

- Программу *SliceExtractor*, разработанную для анализа данных, полученных в вычислительных экспериментах. Программа позволяет строить временные зависимости основных газодинамических параметров, параметров T-слоя и ряда интегральных характеристик течения.

- Программы *MonstrSourceConstructor* и *MonstrExtractor* для работы с вычислительным пакетом MONSTR. *MonstrSourceConstructor* позволяет автоматически формировать исходные файлы для пакета MONSTR для заданного рабочего газа, диапазона температур, давлений. *MonstrExtractor* позволяет анализировать полученные с помощью MONSTR данные и извлекать значения требуемых термодинамических свойств (энтальпии, плотности, молекулярного веса, коэффициентов поглощения и т.д.) и формировать на их основе табличные зависимости указанных свойств от температуры и давления. Программа также позволяет равномерно делить весь спектр частот на заданное количество групп и проводить в каждой группе осреднение коэффициентов поглощения с помощью процедуры усреднения Планка.

- Программу *RadView* для проведения сравнительного тестирования различных способов расчета радиационных потерь в канале ДМГДГ с использованием диффузионного, многогруппового приближений, приближения лучистой теплопроводности, оптически тонкого тела и объемного излучателя.

- Программу *RP* для проведения сравнительного тестирования численных методов газодинамики на различных тестовых задачах Римана. Программа позволяет рассчитывать точные решения задачи Римана для случая двух политропных газов.

Основной целью, которая преследовалась при разработке пакета программ, являлась гибкость реализации, под которой подразумевалась возможность независимого изменения и усложнения основных составляющих вычислительной модели: численных методов газодинамики, уравнений состояния и термодинамических свойств газа, методов интерполяции данных, моделей процессов преобразования энергии и т.д. В связи с этим весь комплекс программ разрабатывался на языке C++ на основе технологии объектно-ориентированного программирования [120, 121]. Все библиотеки конструировались в виде иерархии классов, связанных между собой через абстрактные интерфейсы. Такой метод программирования позволил использовать единственную расчетную программу для проведения всех основных расчетов: вычислительных экспериментов для ДМГДГ низкого и высокого давления, для каналов переменного и постоянного сечения, с уравнениями состояния идеального и реального газа, для решения тестовых задач о распространении детонационной волны, инициировании T-слоя в потоке газа, тестирования граничных условий, моделей переноса излучения и т.д. Для каждой конкретной вычислительной задачи создавался программный модуль, в котором задавались параметры задачи, используемые методы и численные модели.

2.7 Тестирование модели

Разработанная вычислительная модель ДМГД-генератора была опробована на ряде тестовых задач. Это позволило, во-первых, убедиться в правильности ее работы, во-вторых, оптимизировать ряд параметров составляющих ее методов и моделей. Численные методы тестировались на задаче адвекции волн различного профиля и различных конфигурациях задач Римана. Такой комплект тестовых задач часто применяется при тестировании проекционно-эволюционных методов: задача адвекции тестирует шаг реконструкции решения, задачи Римана — шаг эволюции. Отдельные тесты были использованы для моделей переноса излучения и распространения детонационной волны. Корректность моделей остальных энергетических процессов, также как и корректность модели в целом, контролировалась по соблюдению энергетического баланса (2.37), который выполнялся во всех расчетах с точностью

Рис. 2.4. Схема реализации основной расчетной программы модели ДМГДГ.

1-2%.

2.7.1 Тестирование численных методов

Тестирование численных методов газодинамики проводилось на задаче об адвекции волн различного профиля и задачах о распаде произвольного разрыва (задачах Римана) различной конфигурации. Рассматриваемые задачи имеют точные аналитические решения и в литературе по нелинейным монотонным численным методам являются стандартными тестами, которым подвергается любой новый численный метод этого класса. Для проекционно-эволюционных методов, к которым принадлежат методы MP2 и WENO3, такой выбор тестовых задач позволяет осуществить полное тестирование: задача об адвекции волн служит для проверки алгоритма реконструкции, задачи Римана проверяют корректность работы метода на шаге эволюции. В итоге результаты расчетов позволяют судить о монотонности и точности численного метода, наличия численной диффузии и нефизических осцилляций в областях резких градиентов параметров.

Задача об адвекции волн различного профиля

Задача об адвекции волн различного профиля формулируется для скалярного уравнения переноса в следующем виде [62, 72]:

$$\vartheta_t + a\vartheta_x = 0, \quad a = \mathrm{const}, \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x). \tag{2.44}$$

Начальные условия включают в себя Гауссовскую волну, квадратную волну, треугольную и полу-эллиптическую волны:

$$\begin{array}{ll}
\vartheta_0(x) = \exp(-\log(2)(x+0.7)^2/0.0009), & -0.8 \le x \le -0.6, \\
\vartheta_0(x) = 1, & -0.4 \le x \le -0.2, \\
\vartheta_0(x) = 1 - |10(x-0.1)|, & 0 \le x \le 0.2, \\
\vartheta_0(x) = (1 - 100(x-0.5)^2)^{1/2}, & 0.4 \le x \le 0.6, \\
\vartheta_0(x) = 0, & \text{иначе.}
\end{array}$$

Рассматриваемая задача позволяет сравнить используемые алгоритмы реконструкции. Численный метод для решения задачи строился следующим образом. Интегрирование по времени проводилось TVD-методом Рунге-Кутты второго порядка точности (см. раздел A.8). Реконструкция переменной ϑ осуществлялась с помощью алгоритмов реконструкции MP2 и WENO3. По известным, средним по ячейкам значениям функции ϑ определялись значения функции на левой и правой границах каждой ячейки: $\vartheta^L_{j+1/2}$, $\vartheta^R_{j+1/2}$. Для решения скалярного уравнения переноса применялась конечно-объемная разностная схема с потоком Годунова (см. раздел А.6). Общее решение уравнения (2.44) при $a = \text{const}$ записывается как

$$\vartheta = \vartheta_0(x - at).$$

Задача позволяет проверить алгоритмы реконструкции на наличие фазовых ошибок, возникновение нефизических осцилляций и сглаживания решения в области резких градиентов. Результаты тестовых расчетов представлены на рисунке 2.5. Для сравнения на графике приведено также решение, полученное с помощью алгоритма WENO-реконструкции 2-ого порядка точности (WENO2). Методы WENO3 и MP2 показали на задаче адвекции примерно

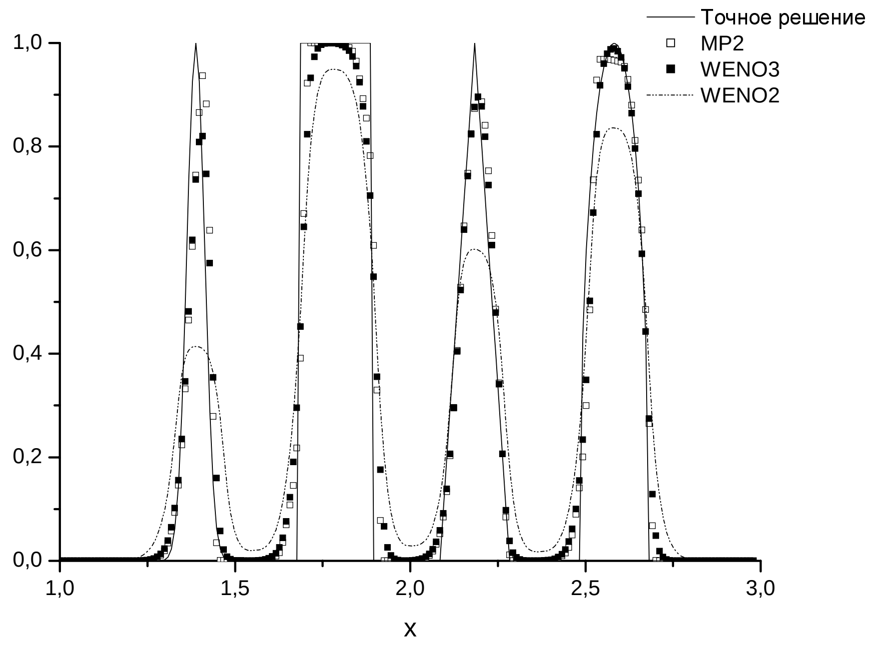


Рис. 2.5. Адвекция волн. $a = 4$, число Куранта = 0.4, 200 ячеек, 500 шагов по времени.

одинаковые результаты. Следует однако отметить, что алгоритм MP2 работает примерно в 1.5 раза быстрее.

Задача о распаде произвольного разрыва

Задача о распаде произвольного разрыва — это задача определения одномерного течения при $t > 0$, удовлетворяющего интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии и кусочно постоянными начальными

Название	Источник	(ρ, u, e), $x \leq 0$	(ρ, u, e), $x > 0$	Тип
Задача Лакса	[122]	0.445, 0.698, 3.528	0.5, 0, 0.571	А
Задача Сода	[123]	1, 0, 2.5	0.125, 0, 0.25	А
Задача Эйнфельдта	[51]	1, -2, 3	1, 2, 3	С
Max 3	[58]	3.857, 0.920, 10.333	1, 3.55, 1	В
CFG2	–	0.445, 5, 8.928	0.5, 0, 1.4275	Б

Таблица 2.3: Тестовые задачи Римана.

условиями при $t = 0$:

$$(\rho, P, u, e, T) = \begin{cases} \rho_0, P_0, u_0, e_0, T_0, & x < 0, \\ \rho_1, P_1, u_1, e_1, T_1, & x > 0. \end{cases}$$

Величины слева и справа от $x = 0$ произвольны и подчиняются лишь уравнениям состояния газов, которые могут быть различными для граничащих газов.

Задача о распаде произвольного разрыва детально рассмотрена в работе [57]. Если произвольный разрыв не является контактным разрывом или ударной волной, то он распадается и образует конфигурацию устойчивых разрывов и непрерывных газодинамических течений. Для случая идеального газа возможны три таких конфигурации, названные в [57] конфигурациями "А", "Б", "В". В конфигурацию "А" входит ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения. При конфигурации "Б" решение содержит две ударные волны и контактный разрыв. Конфигурации "В" соответствуют контактный разрыв и две волны разрежения.

В таблице 2.7.1 приведены задачи Римана, применявшиеся в тестировании. Задачи Лакса, Сода, задача с сильными волнами разрежения (задача Эйнфельдта) и задача о распространении волны с $M = 3$ широко используются при тестировании нелинейных монотонных методов. Результаты тестовых расчетов представлены на рис. 2.6 – 2.8. Приведенные решения соответствуют малому промежутку времени с момента начала распада разрыва, когда в численном решении наблюдаются наибольшие отклонения от точного.

Методы MP2 и WENO3 показали примерно одинаковые результаты. Схема WENO3 с применением процедуры релаксацией энергии существенно более диссипативна. Следует отметить, что ни один из методов не справился с задачей Эйнфельдта.

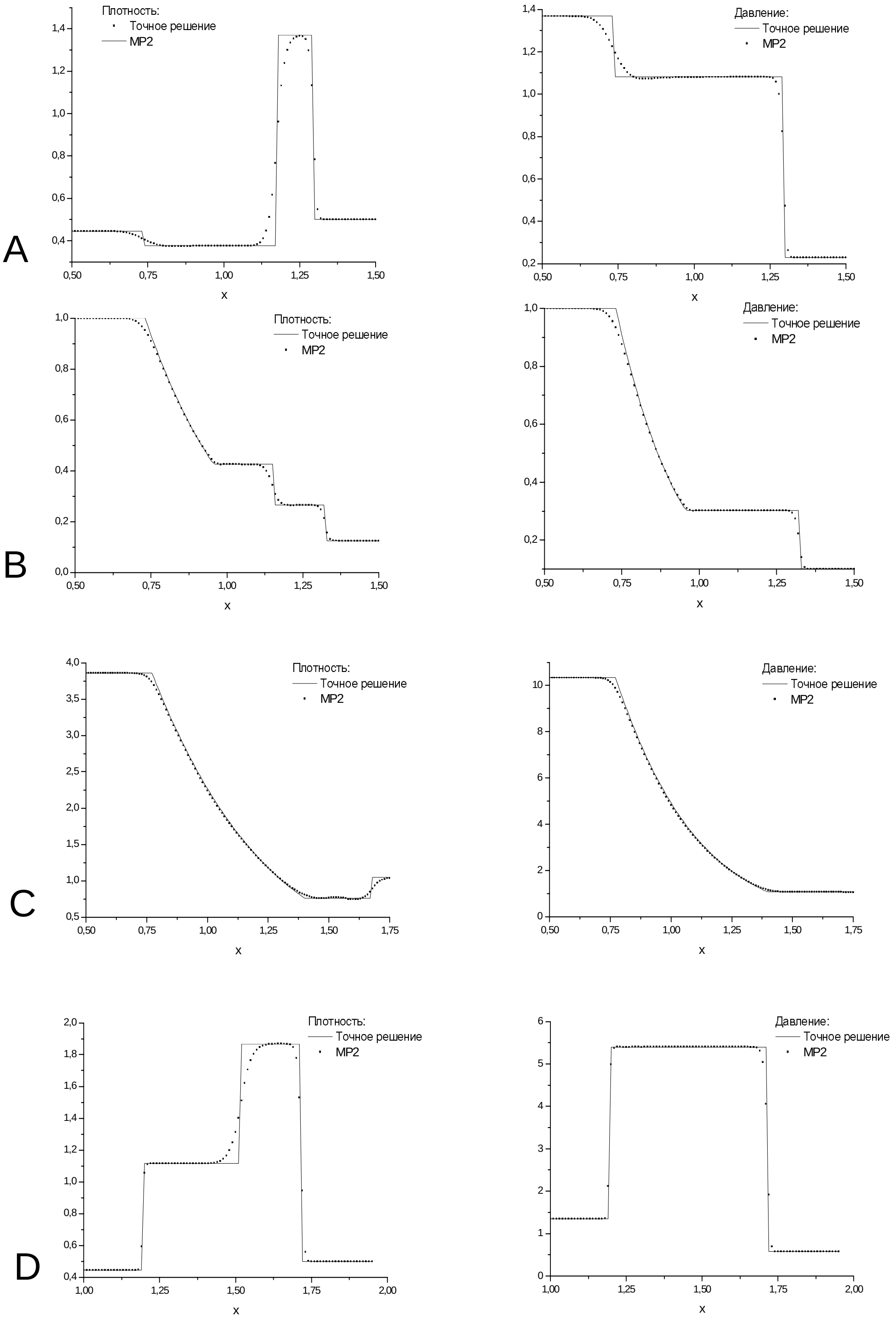


Рис. 2.6. Результаты решения задач Лакса (A), Сода (B), Mach3 (C), CFG2 (D) методом MP2. 400 шагов по времени, 100 ячеек, $dx/dt = 0.1$.

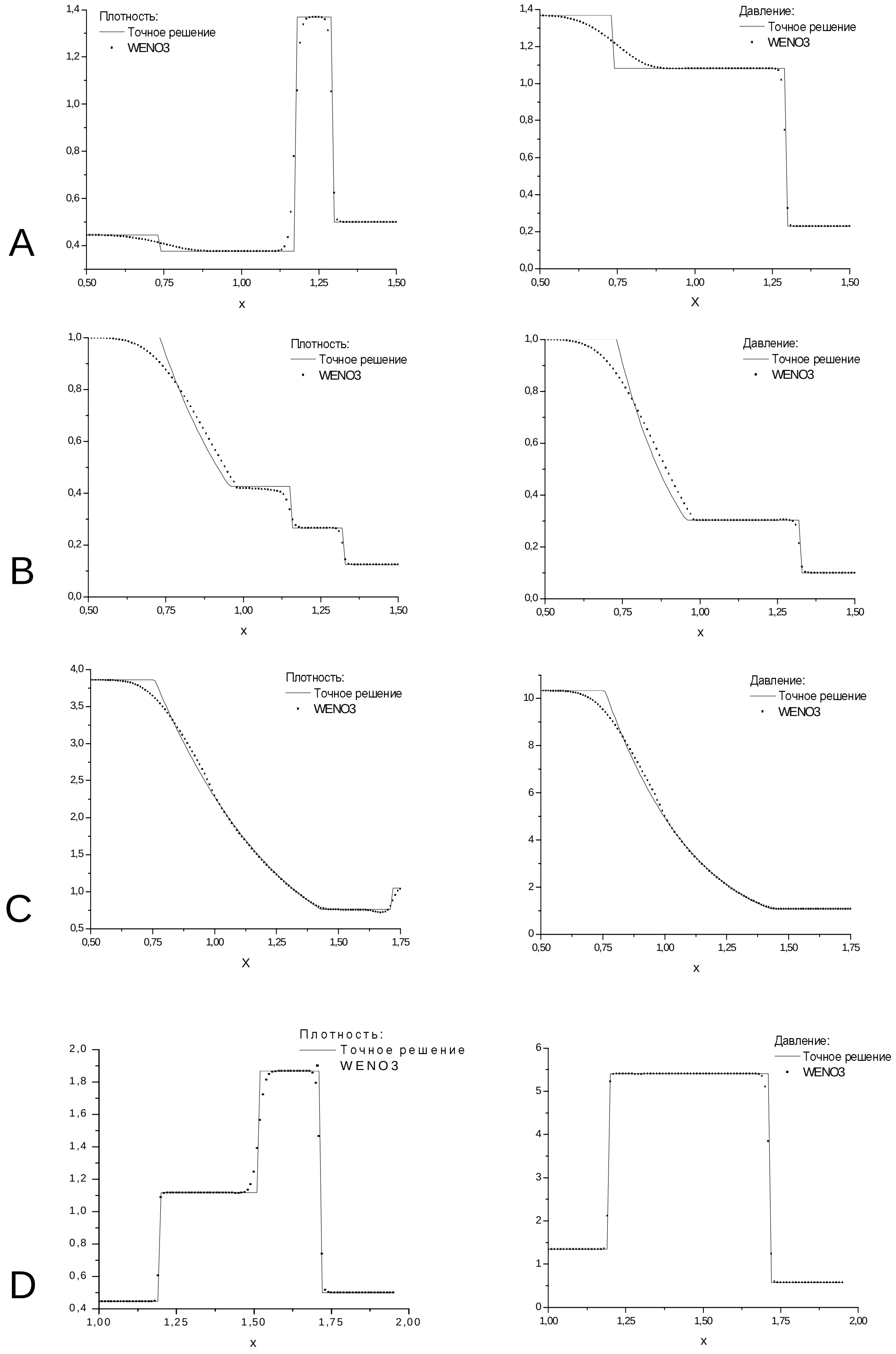


Рис. 2.7. Результаты решения задач Лакса (A), Сода (B), Mach3 (C), CFG2 (D) методом WENO3. 400 шагов по времени, 100 ячеек, $dx/dt = 0.1$.

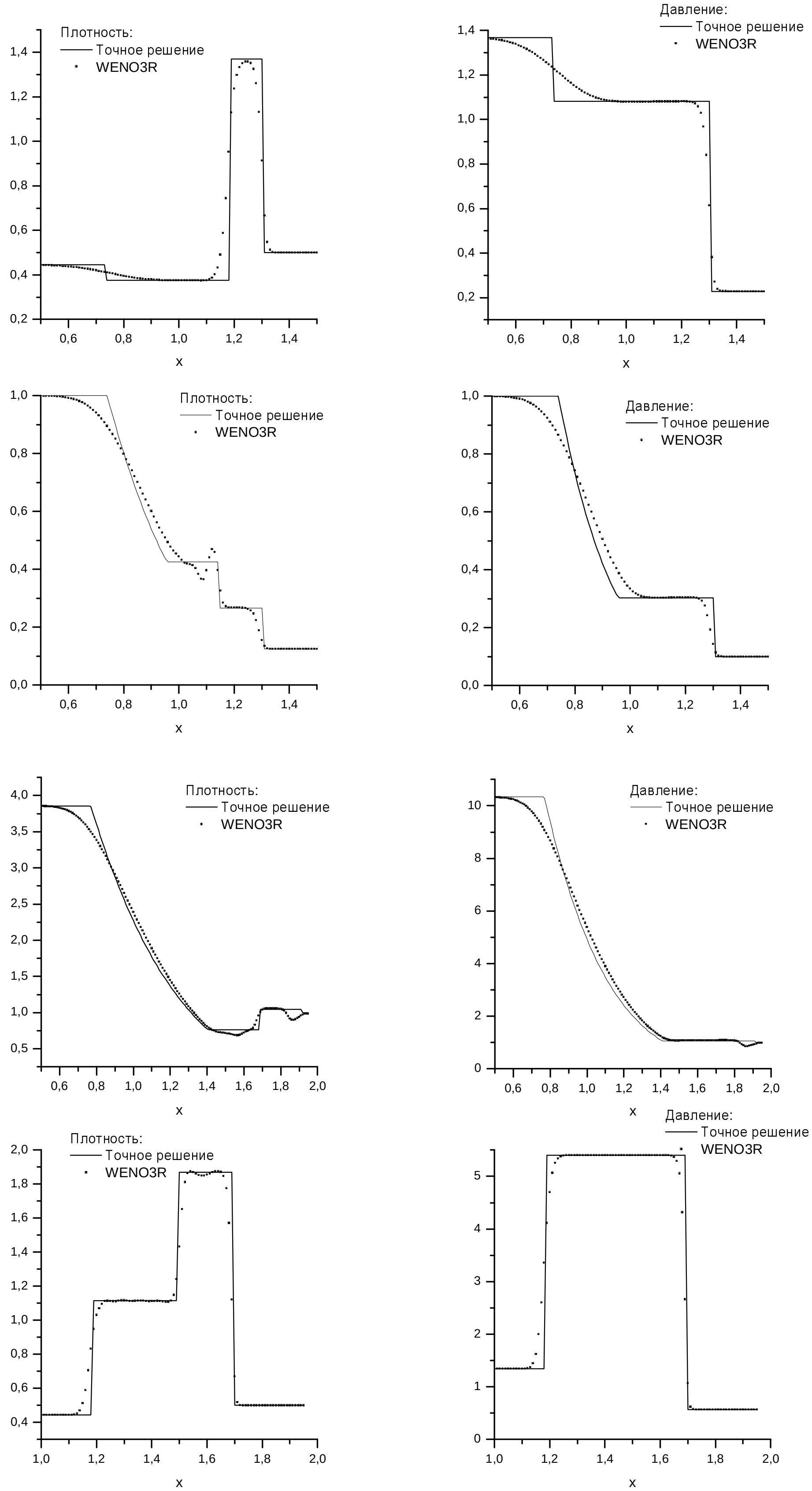


Рис. 2.8. Результаты решения задач Лакса (A), Сода (B), Mach3 (C), CFG2 (D) методом WENO3 с применением метода релаксации энергии при $\gamma_0 = 7$. 400 шагов по времени, 100 ячеек, $dx/dt = 0.1$.

2.7.2 Распространение детонационной волны

Тестировании модели детонационной волны (раздел 2.2.3) было, в первую очередь, направлено на оптимизацию параметров модели с целью, по-возможности, приблизить значения газодинамических параметров в профиле волны к реальному.

Первым параметром, который был выбран в предварительных вычислительных экспериментах, было давление P^* (2.27), которое задавалось в виде

$$P^* = \alpha^* P_0.$$

В общем случае значение α^* зависит от размеров вычислительной сетки. Предварительные вычислительные эксперименты показали, что для используемых в расчетах Δt и Δx профили точного и численного решения совпадают с хорошей точностью при $\alpha^* \geq 2$. На рис. 2.9 показаны результаты

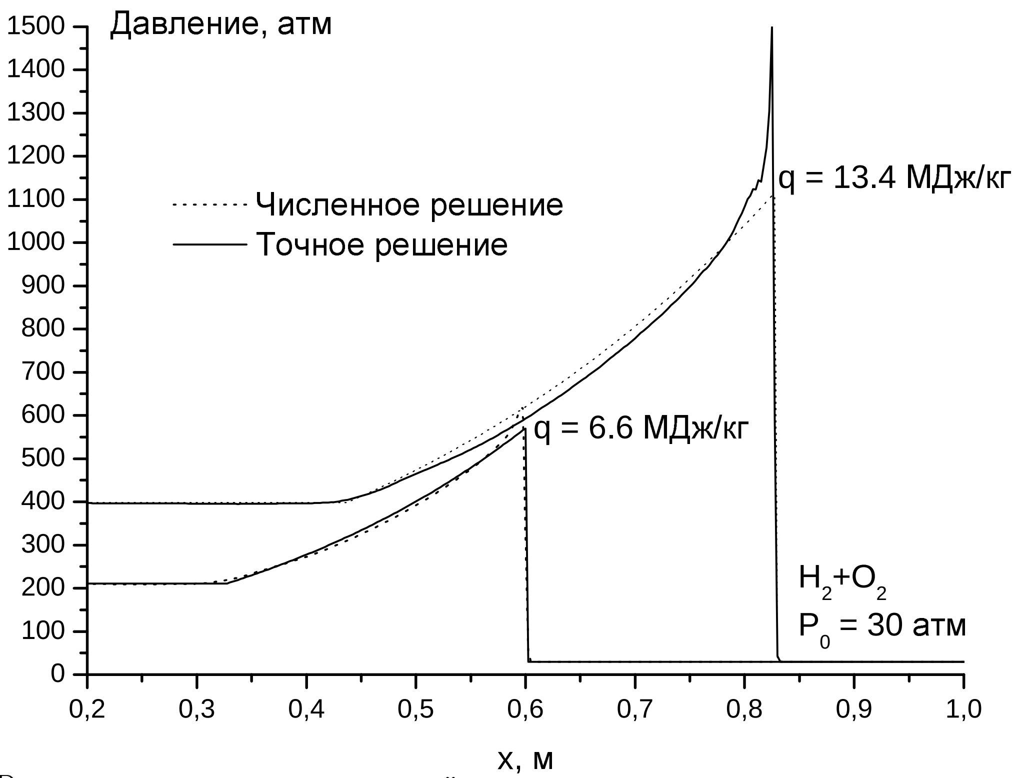


Рис. 2.9. Распространение детонационной волны по каналу постоянного сечения: точное и численное решения при различном значении теплового эффекта реакции.

численного моделирования распространения детонационной волны по каналу постоянного сечения. Для сравнения показано также точное решение, методика получения которого приведена в приложении А.10.

Другим важным параметром модели является тепловой эффект реакции q (2.29), который зависит от состава смеси, коэффициентов полноты сгорания топлива и избытка воздуха. При идеальном сгорании смеси, когда коэффициенты полноты сгорания топлива и избытка воздуха равны 1, достигается максимальное тепловыделение. В действительности значения теплового эффекта реакции могут существенно отличаться от идеальных. В работе [106] приведены параметры на фронте детонационной волны для различных горючих смесей, полученные на основании численных экспериментов, проведенных с хорошей точностью на основе детальной кинетической модели. Приведены таблицы основных параметров на фронте детонационной волны для случая начального давления 1 атм и формулы, позволяющие пересчитать параметры к произвольному начальному давлению. Авторы также приводят экспериментально полученные значения теплового эффекта реакции, которые существенно отличаются от идеальных (таблица 2.4). На рис. 2.9 приведен профиль детонационной волны, движущейся по кислородно-водородной смеси, на момент времени $t = 2$ мс при идеальном и реальном тепловыделении. Видно, что различие теплового эффекта реакции почти в 2 раза существенно сказывается на распределении газодинамических параметров за фронтом детонационной волны.

	$2H_2 + O_2$	Воздух+водород
Тепловой эффект реакции, полное сгорание	13.4 МДж/кг	3.5 МДж/кг
Тепловой эффект реакции, экспериментальные данные [106]	6.615 МДж/кг	2.972 МДж/кг

Таблица 2.4. Тепловой эффект реакции q.

В таблице 2.5 приведены значения давления на фронте и скорости детонационной волны, полученные на основе модели Чепмена-Жуге при идеальном и реальном сгорании топлива, а также экспериментальные значения [106], пересчитанные для начального давления 30 атм. Для кислородно-водородной смеси близкие к реальности параметры на фронте детонационной волны, полученные с помощью реализованной модели, наблюдаются при реальном тепловыделении, тогда как для воздушно-водородной — при идеальном. В этой связи, в вычислительных экспериментах применялись следующие значениях

	D, м/с	Давление на фронте, атм
Смесь $2H_2 + O_2$		
$q = 13.4$ МДж/кг, модель ЧЖ	4000 м/с	1400 атм
$q = 6.6$ МДж/кг, модель ЧЖ	2900 м/с	570 атм
$q = 6.6$ МДж/кг, результаты [106]	3092 м/с	678 атм
Смесь воздух-водород		
$q = 3.5$ МДж/кг, модель ЧЖ	2200 м/с	510 атм
$q = 2.8$ МДж/кг, модель ЧЖ	1950 м/с	400 атм
$q = 2.8$ МДж/кг, результаты [106]	2145 м/с	564 атм

Таблица 2.5. Сопоставление расчетных данных по параметрам фронта детонационной волны. $P_0 = 30$ атм, $T_0 = 273$ К.

теплового эффекта реакции:

$$q = \begin{cases} 6.6 \text{ МДж/кг} & \text{для кислородно-водородной смеси,} \\ 3.5 \text{ МДж/кг} & \text{для воздушно-водородной смеси.} \end{cases} \tag{2.45}$$

2.7.3 Перенос излучения в многогрупповом приближении

Основными задачами тестирования методики расчета переноса излучения в многогрупповом приближении (раздел 2.2.1) являлись проверка корректности получаемых с ее помощью результатов и определение оптимальных значений параметров модели.

Для расчета распределения коэффициентов поглощения в зависимости от температуры, давления и частоты применялся пакет программ MONSTR [112]. Пакет MONSTR дает возможность рассчитывать коэффициенты поглощения в диапазоне частот от $0.25 \cdot 10^6$ м$^{-1}$ до $150 \cdot 10^6$ м$^{-1}$ с шагом $0.25 \cdot 10^4$ м$^{-1}$. При частотах, лежащих вне указанного диапазона, спектральная плотность равновесного излучения $U^r(\nu,\ T) \approx 0$ для $T = 0 \div 3 \cdot 10^4$ К, что позволяет пренебречь этими частотами при расчете радиационных потерь. Весь рассматриваемый спектр излучения разделялся на равные по диапазону частот группы. Групповые коэффициенты поглощения рассчитывались с помощью процедуры усреднения Планка. Параметры многогруппового приближения — количество групп N_ν и направлений движения фотонов N_μ — выбирались из соображений оптимального соотношения скорости и точности расчетов.

Тестирование проводилось на задаче о расчете радиационных потерь в высокотемпературном слое с искусственно заданным перепадом по давлению (рис. 2.10). Качественно, такое распределение давления и температуры соответствует параметрам T-слоя. Решение такой задачи требует расчета переноса излучения между оптически тонкой и оптически плотной средой, а также позволяет продемонстрировать эффект запирания излучения в слое.

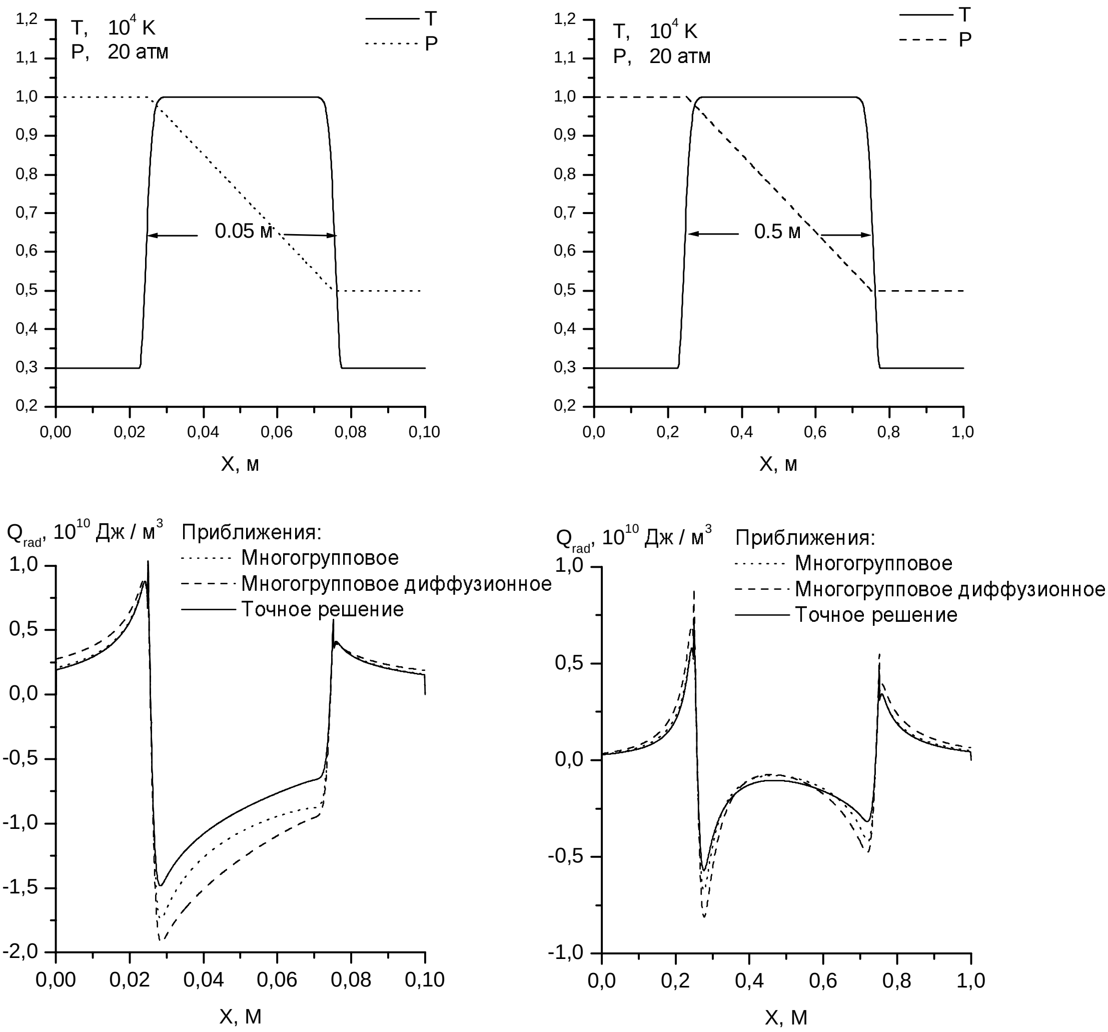


Рис. 2.10. Распределение радиационных потерь в идеальном T-слое шириной 0.05 м и 0.5 м.

Результаты решения тестовой задачи для слоев шириной 0.05 м и 0.5 м представлены на рис. 2.10. Здесь же приведено «точное» решение, полученное в многогрупповом приближении при $N_\nu = 600$ и $N_\mu = 20$ и решение, полученное в многогрупповом диффузионном приближении [93]. Результаты расчетов показали, что количество групп может быть уменьшено до 10 без существенного снижения точности. Применение многогруппового диффузионного приближения [93] не является целесообразным, точность расчетов понижается, при том, что скорость расчетов не возрастает. Приближение оптически тонкого тела, как и следовало ожидать, дает для данной задачи правильные результаты только при низких давлениях (менее 1 атм) (не показано на рисунке).

Анализ результатов вычислительных экспериментов для ДМГДГ при различных N_ν и N_μ показал, что уменьшение количества групп и направлений движения фотонов до значений $N_\nu = 5$, $N_\mu = 2$ незначительно изменяло результирующие энергетические характеристики генератора (КПД менялся менее, чем на 0.5%), но позволяло существенно увеличить скорость вычислений. Дальнейшее уменьшение количества групп приводило к заметному искажению энергетических характеристик.

Для оценки эффекта запирания излучения в используемых рабочих газах был проведен расчет величины интегрального радиационного потока из высокотемпературного слоя, синусоидального по профилю температуры, при различных давлениях и размерах слоя. Результаты аналогичного эксперимента для аргона приведены в [4]. Высокотемпературный слой задавался следую-

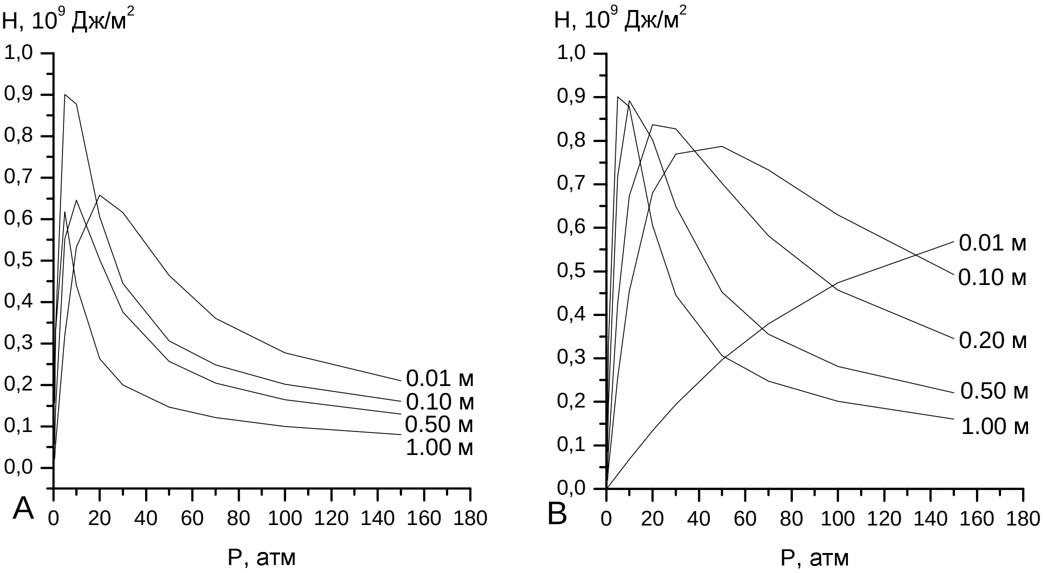


Рис. 2.11. Зависимости интегрального радиационного потока из синусоидального высокотемпературного слоя от давления в канале для воздушно-водородной (A) и кислородно-водородной (B) смеси.

щим образом. Симметрично от центра канала выбирались две точки с координатами x_0 и x_1, $x_0 < x_1$, соответствующие левой и правой границам слоя. Распределение температуры в канале по координате задавалось в виде

$$T = \begin{cases} T_1 + (T_1 - T_0)\sin((x - x_0)/(x_1 - x_0)\pi), & x_0 \le x \le x_1, \\ T_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь T_1 задает максимальную температуру в слое, T_0 — температуру газа вне слоя. Размер слоя считался равным $x_1 - x_0$. Давление полагалось постоянным по всей длине канала. Результаты расчета интегрального радиационного потока из высокотемпературных слоев различного размера при $T_1 = 1.5 \cdot 10^4$ K, $T_0 = 2 \cdot 10^3$ K представлены на рис. 2.11. Полученные зависимости качественно соответствуют зависимостям из работы [4]. Следует отметить, что для достижения оптимального режима работы для кислородно-водородной смеси требуются большие давления и большие по размеру слои, чем для воздушно-водородной.

Глава 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной главе представлены результаты вычислительного моделирования работы ДМГДГ, полученные на основе представленной в главе 2 вычислительной модели. Порядок изложения результатов следующий. В разделе 3.1 рассмотрен детонационный МГД-генератор, работающий при низком давлении в канале. В разделе 3.2 проведено сравнение характеристик ДМГД-генераторов с высоким и низким давлением в канале. Далее рассмотрены варианты оптимизации конфигурации генератора и течения в канале ДМГДГ, приведены энергетические характеристики оптимизированного генератора (раздел 3.3), даны оценки проницаемости T-слоя за счет теплопереноса [124] (раздел 3.5). Влияние реальных свойств газа на характеристики ДМГДГ рассмотрено в разделе 3.6. Вопросу практического применения ДМГДГ в качестве источника энергии большой мощности на борту гиперзвукового летательного аппарата [125] посвящен раздел 3.7, вопросу экспериментальной проверки полученных результатов — раздел 3.8.

Все вычислительные эксперименты проводились в размерных переменных на равномерной сетке. Шаг по пространству выбирался из соображений сходимости решения. Первоначально проводился вычислительный эксперимент с шагом h. Далее тот же самый эксперимент проводился на сетке с шагом $h/2$, $h/4$ и т.д. Шаг уменьшался до тех пор, пока решение не перестало существенно изменяться [126]. Шаг по времени выбирался из соображений устойчивости решения. В результате, в вычислительных экспериментах использовались следующие значения параметров вычислительной сетки:

$$\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ с}, \quad \Delta x = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Задача о заполнении канала газом не решалась. Во всех экспериментах предполагалось, что в начальный момент времени детонационная секция генератора равномерно заполнена горючей смесью, электродная секция и диффузор —продуктами сгорания.

В ходе проведения вычислительных экспериментов насчитывались величины, перечисленные в разделе 2.3. Вычисления проводились в приближении единичной ширины канала ($A_z = 1$ м). Оценка мощности реального генератора проводилась в предположении, что ширина канала A_z равна характерному размеру T-слоя, что соответствует гипотезе о непроницаемости плазменного поршня.

Далее для определенности используются обозначения «ДМГДГ низкого давления» и «ДМГДГ высокого давления», которые подразумевают «ДМГД-генератор с T-слоем с низким (высоким) характерным давлением в канале генератора». «Низким» давлениям отвечает диапазон давлений, при которых T-слой излучает как объемный излучатель и запирание излучения в нем отсутствует. Под «высокими» понимаются давления, при которых проявляется эффект запирания излучения и T-слой излучает в основном с поверхности. Условные границы диапазона «низких» и «высоких» давлений для используемых в расчетах горючих смесей определены на основе зависимости радиационных потерь в синусоидальном высокотемпературном слое от давления (рис. 2.11) и приведены в таблице 3.1.

Смесь	«низкие» давления	«высокие» давления
Воздушно-водородная	≤ 5 атм	≥ 40 атм
Кислородно-водородная	≤ 5 атм	≥ 80 атм

Таблица 3.1. Границы диапазона «низких» и «высоких» давлений.

3.1 ДМГДГ низкого давления

В первых экспериментах, проведенных на основе вычислительной модели ДМГДГ, исследовалась работа детонационного МГД-генератора низкого давления [127]. Цель этих экспериментов заключалась прежде всего в исследовании принципиальной возможности работы схемы детонационного МГД-генератора и, в частности, возможности развития T-слоя, инициированного за фронтом детонационной волны.

В эксперименте исследовался детонационный МГД-генератор с каналом единичной высоты $A_y = 1$, детонационной секцией длиной $L_{det} = 2$ м, и электродной секцией длиной $L_{el} = 2.5$ м. В качестве горючей смеси использовалась кислородно-водородная смесь с тепловыделением, соответствующим полному сгоранию смеси (см. таблицу 2.4). Предполагалось, что в начальный момент времени газ в канале находился в неподвижном равновесном состоянии при давлении $P_0 = 1$ атм и комнатной температуре. Магнитное поле задавалось постоянным и равным $B_0 = 5$ Тл. Взаимодействие T-слоя с магнитным полем учитывалось в приближении постоянного коэффициента нагрузки (2.18), который полагался равным $K = 0.7$. Расчеты проводились с использованием уравнения состояния идеального газа (2.39) с постоянными показателем адиабаты $\gamma = 1.15$ и молекулярным весом $\mu = 12$. Потери на излучение в T-слое учитывались в приближении оптически тонкого тела (2.2.1). Инициирование T-слоя осуществлялось за $\tau_{ini} = 0.3$ мс. Энергия инициирования составляла $E_{ini} = 80$ кДж.

Динамика процессов, протекающих в канале генератора, представлена на рис. 3.1.A – 3.1.D. На рис. 3.1.A показан момент достижения детонационной волной области инициирования T-слоя. Рисунок 3.1.B демонстрирует процесс инициирования T-слоя. Показан момент, когда вся энергия инициирования уже вложена в газ, температура в T-слое достигла $\simeq 12000$ K и в T-слое под влиянием магнитного поля начинает формироваться перепад по давлению. При этом вправо и влево от T-слоя отходят ударные волны, вызванные резким торможением газа в T-слое. На рисунке 3.1.C отражены параметры газа в канале генератора в момент, когда между джоулевой диссипацией и радиационными потерями в T-слое установился баланс и параметры T-слоя стабилизировались: температура $T \simeq 1.2 \cdot 10^4$ K, размер T-слоя $\simeq 3$ см, перепад по давлению в T-слое $\Delta P \simeq 2.3$ атм, скорость $u \simeq 400$ м/с. После стабилизации значения параметров в течение 2.5 мс остаются практически неизменными до тех пор, пока T-слой не настигнет волна разрежения (рис. 3.1.D). После этого перепад давления в T-слое начинает быстро уменьшаться, что приводит, в конечном итоге, к распаду T-слоя. Этот процесс ненадолго приостанавливается, когда T-слой настигает ударная волна, которая образовалась при его инициировании, отразилась от торцевой (левой) стенки и возвратилась назад в область МГД-взаимодействия. Ее столкновение с T-слоем приводит к небольшому увеличению скорости и перепада давления в T-слое на короткое время. К тому времени, когда T-слой покидает канал (на 6 мс), генерация тока практически прекращается. Температура и давление продуктов сгорания в канале после выхода T-слоя из канала в среднем равны соответственно $\simeq 2800$ K и $\simeq 4$ атм при скорости газа в канале менее 100 м/с.

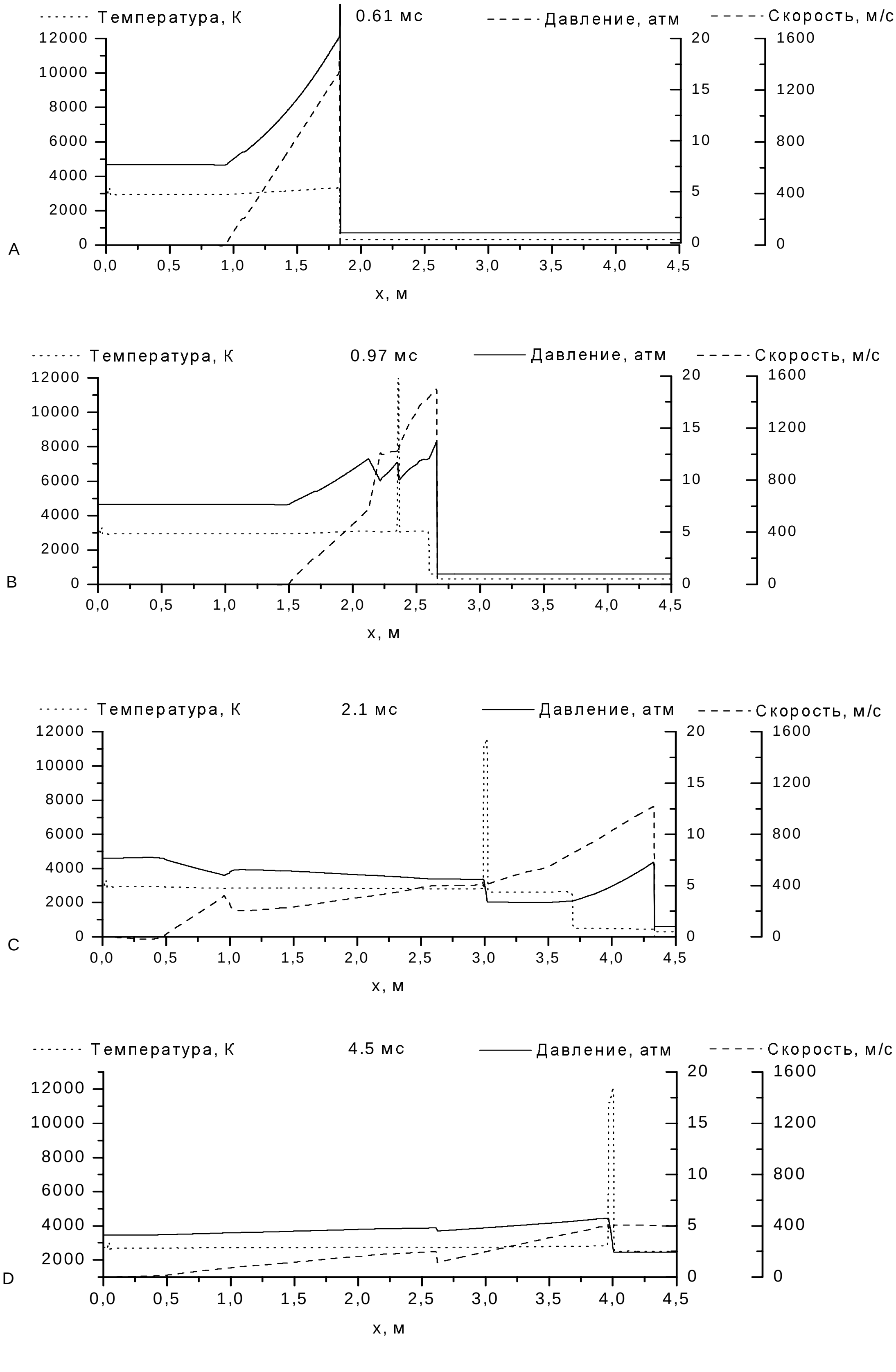


Рис. 3.1. Динамика формирования T-слоя в канале генератора.

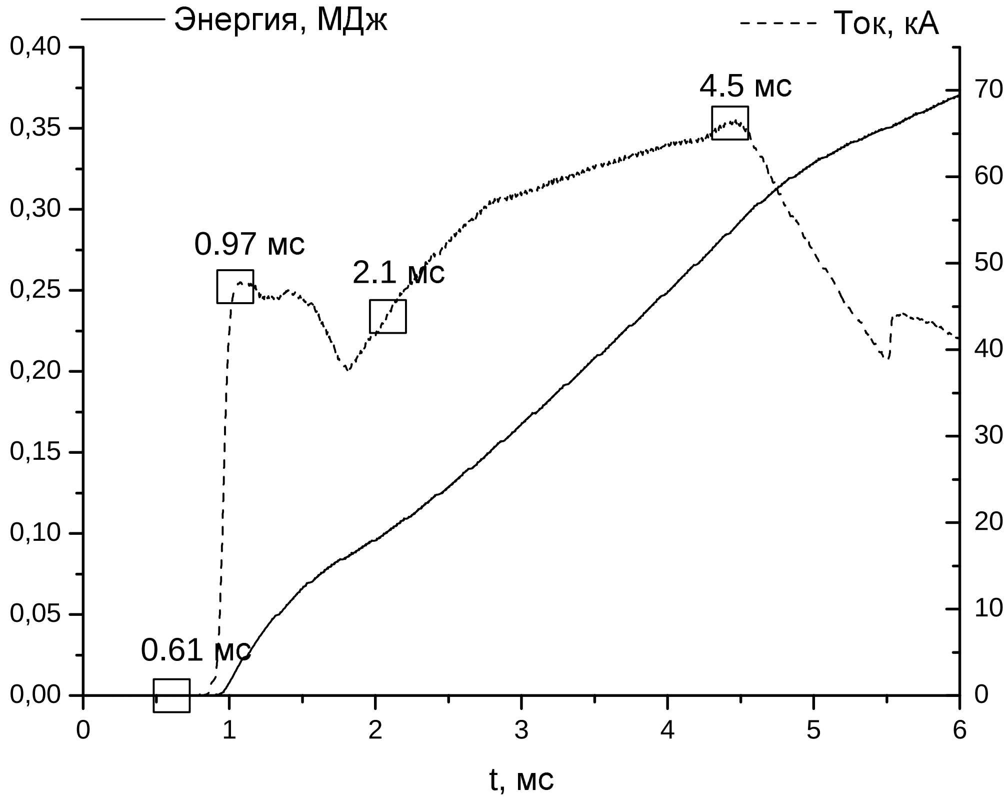


Рис. 3.2. Ток и энергия, выработанные в процессе работы генератора.

На рис. 3.2 приведены графики энергии и импульса тока на нагрузке. На графике тока отмечены моменты времени, соответствующие рисункам 3.1.A – 3.1.D. Характерный «провал» тока по окончанию инициирования T-слоя объясняется снижением скорости потока газа в области T-слоя вследствие торможения T-слоя в магнитном поле. Возрастание тока в период с 2 мс по 4.5 мс соответствует движению стабилизированного T-слоя, снижение тока после 4.5 мс — уменьшению скорости и перепада давления в T-слое под влиянием волны разрежения. Пик тока на 5.5 мс отражает факт достижения T-слоя ударной волной, образовавшейся при инициировании и отразившейся от торцевой стенки.

КПД генератора (2.34) составил $\eta_N = 2.3$ %. Низкий КПД генератора объясняется высокими радиационными потерями в T-слое, которые не удается снизить варьированием параметров. Замена кислородно-водородной смеси на другую с меньшими радиационными потерями не оправдывает себя, поскольку одновременно снижается тепловыделение смеси, что приводит к уменьшению скорости потока и снижению выработанной энергии. Для воздушно-водородной смеси, например, при начальном давлении 0.5 атм КПД получился равным 1.5%. Большие радиационные потери в T-слое препятствуют повышению удельной тепловой мощности потока. Расчеты для других значений P_0 показали, что верхним пределом по начальному давлению в канале для кислородно-водородной смеси служат 2 атм, а для воздушно-водородной — всего 1 атм, причем в этих случаях ширина T-слоя не превышает нескольких сантиметров. Если считать верным приближение непроницаемости T-слоя и полагать, что сечение канала генератора определяется шириной T-слоя, то величина энергии, вырабатываемой генератором в каждом импульсе, составляет ≈ 150 кДж.

Таким образом, схема детонационного МГД-генератора низкого давления, в принципе, позволяет организовать генераторный процесс с получением полезной энергии. В тоже время, объемный характер излучения в T-слое приводит к низкому КПД и малой мощности, повысить которые в рамках выбранной физической модели невозможно.

3.2 Сравнительный анализ ДМГД-генераторов высокого и низкого давления

Степень влияния давления в канале на характеристики ДМГДГ исследовалась следующим образом. Для генератора с одним и тем же набором параметров было проведено два вычислительных эксперимента: при низком и при высоком давлении в канале. В экспериментах изменялись только сопротивление нагрузки и величина магнитного поля таким образом, чтобы обеспечить одинаковую степень взаимодействия T-слоя с магнитным полем (примерно равные значения коэффициента нагрузки и параметра гидромагнитного взаимодействия). В экспериментах не ставилась задача оптимизации энергетических характеристик генератора, основное внимание было уделено анализу влияния давления на характеристики генератора с целью определения направления дальнейших исследований.

При переходе к высоким давлениям в канале вычислительная модель была усложнена. Для расчета радиационного переноса было использовано многогрупповое приближение (раздел 2.2.1), учитывающее поглощение излучения. Для увеличения скорости рабочего потока газа на входе в электродную секцию было установлено сверхзвуковое сопло, электродная секция была сделана расширяющейся. На выходе из генератора был установлен диффузор. Предполагалось, что электроды генератора сплошные, поэтому взаимодей-

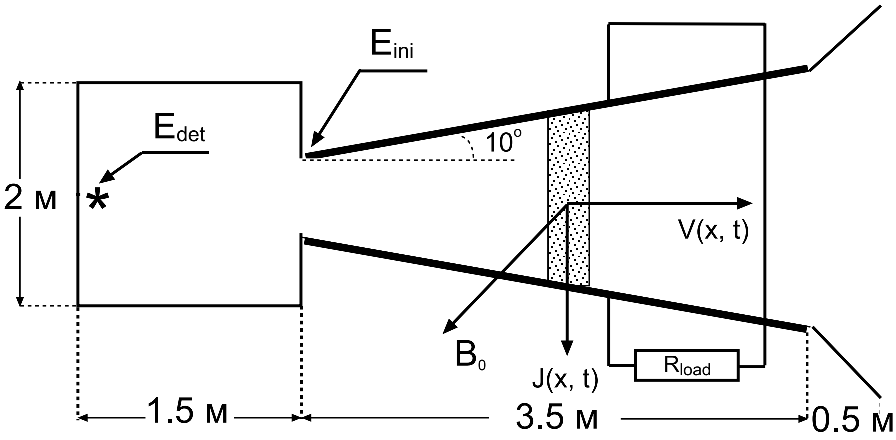


Рис. 3.3. Схема детонационного МГД-генератора.

ствие T-слоя с магнитным полем учитывалось в приближении постоянного сопротивления нагрузки (раздел 2.2.2).

Схема генератора, использованного в вычислительных экспериментах, приведена на рис. 3.3. Детонационная камера длиной $L_{det} = 1.5$ м, высотой $A_y = 2$ м заполнялась воздушно-водородной смесью с тепловыделением $q = 3.5$ МДж/кг и показателем адиабаты $\gamma = 1.35$, при давлении P_0 и комнатной температуре. Инициирование детонационной волны проводилось на левой стенке камеры. Плоское сопло сечением $A_c = 0.5$ м^2 задавалось профилированным. Инициирование T-слоя осуществлялось в момент прихода детонационной волны в горловину сопла. Электродная секция длиной $L_{el} = 3.5$ м имела постоянный раскрыв $\alpha_{el} = 10°$ по каждому электроду. Электроды считались сплошными, идеальной проводимости, замкнутыми на постоянную нагрузку R_{load}. На выходе из канала задавался диффузор длиной $L_{df} = 0.5$ м с увеличением выходного сечения в 1.5 раза. Для генератора высокого давления $P_0 = 30$ атм, $B_0 = 15$ Тл, $R_{load} = 2 \cdot 10^{-3}$ Ом; для генератора низкого давления $P_0 = 0.5$ атм, $B_0 = 6$ Тл, $R_{load} = 3 \cdot 10^{-2}$ Ом. Величина начального давления потока газа в канале генератора P_0 определялась на основе анализа характеристик излучения продуктов сгорания воздушно-водородной смеси из T-слоя с синусоидальным температурным профилем (раздел 2.7.3). Выбранные величины обеспечивали в генераторе высокого давления диапазон рабочих давлений $100 - 500$ атм, для генератора низкого давления — $2 - 5$ атм.

На рис. 3.4 приведены характерные профили температуры, давления и скорости для генераторов высокого и низкого давления при установившем-

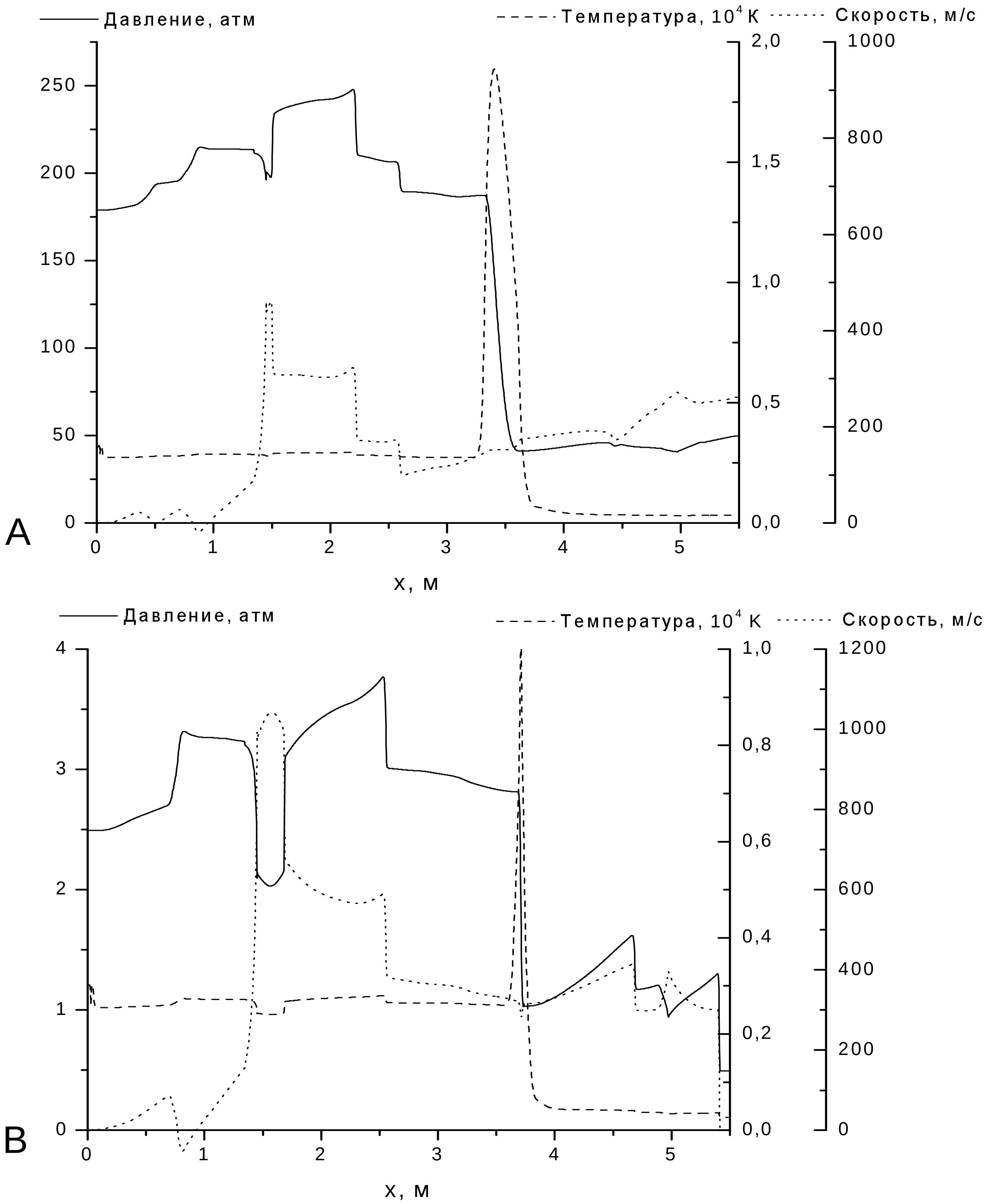
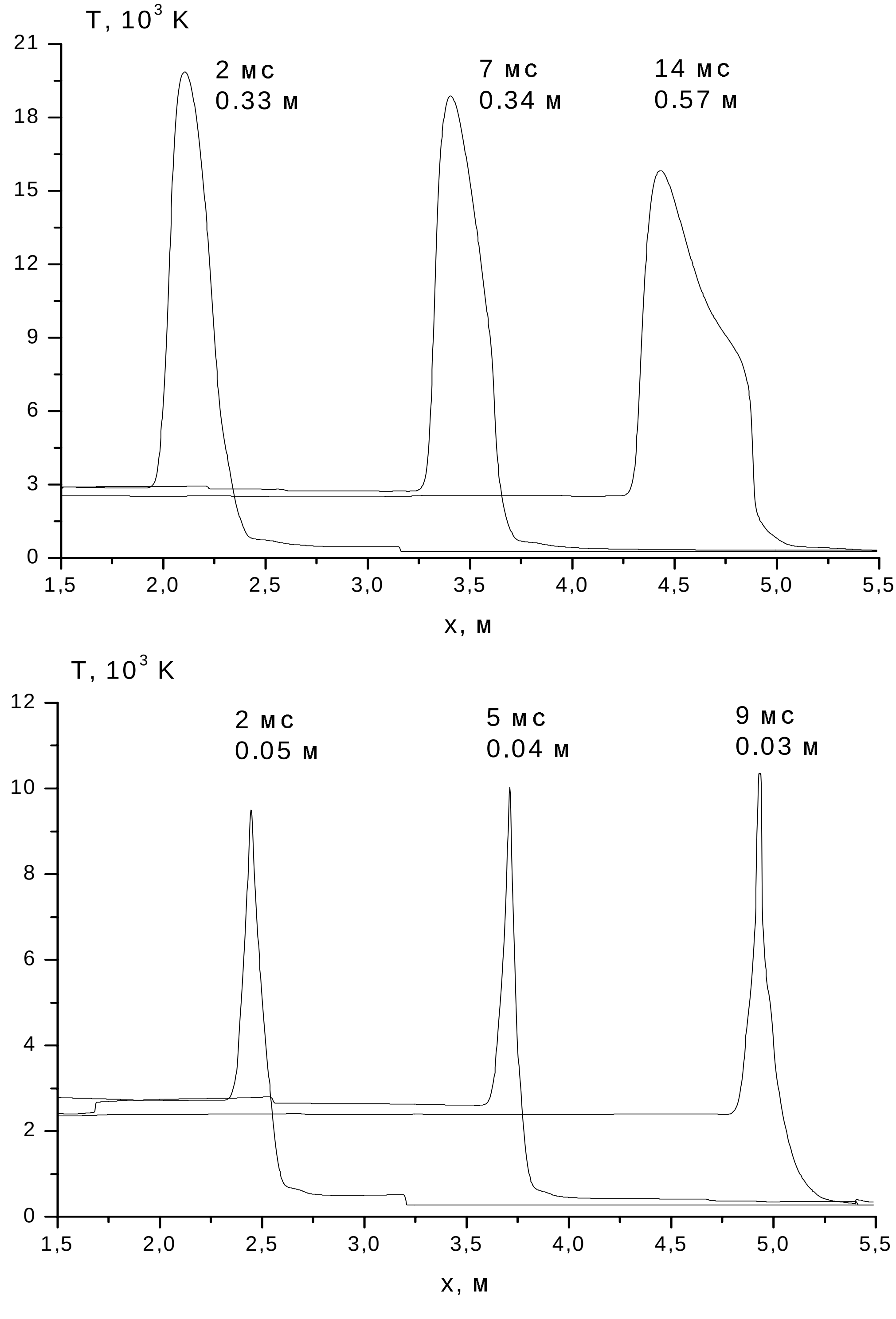


Рис. 3.4. Профили давления, скорости и температуры: в канале генератора высокого давления на 7 мс (A) и в канале генератора низкого давления на 5 мс (B).



A

B

Рис. 3.5. Динамика движения T-слоя по каналу в генераторах высокого (A) и низкого (B) давления.

ся движении T-слоя, когда он прошел половину электродной секции. Для генератора высокого давления это 7 мс работы, для генератора низкого давления — 5 мс.

Перепад по давлению в T-слое формируется при торможении T-слоя в магнитном поле. Значения температуры газа вверх по потоку от T-слоя определяются параметрами горючей смеси, значения температуры газа вниз по потоку — начальной температурой газа в электродной секции. Профиль скорости, в основном, определяется конфигурацией генератора. В детонационной секции скорость газа практически нулевая, что согласуется с точным решением задачи о распространении детонационной волны в трубе постоянного сечения (см. приложение А.10). Из детонационной секции газ истекает через сопло в электродную секцию, что приводит к резкому увеличению скорости потока газа. Далее скорость газа понижается, что связано с расширением канала и торможением T-слоя в канале. Генератору низкого давления соответствует более высокая средняя скорость потока (примерно в 2 раза), генератору высокого давления — существенно больший эффективный размер T-слоя. Перепад по давлению в области T-слоя в обоих случаях примерно трех-четырехкратный.

На рис. 3.5 представлена динамика изменения профиля температуры T-слоя при его движении по электродной секции. В генераторе высокого давления (рис. 3.5.A) температура T-слоя достигает $2 \cdot 10^4$ K, а его характерный размер составляет около 30 см. Наблюдается понижение температуры T-слоя со временем с одновременным увеличением его характерного размера. В генераторе низкого давления (рис. 3.5.B) температура и характерный размер T-слоя значительно меньше, и составляют 10^4 K и $3 \div 4$ см соответственно, причем с течением времени температура T-слоя увеличивается, а его характерный размер уменьшается.

Качественно различия в характере изменения параметров T-слоя во времени в генераторе высокого и низкого давления можно объяснить следующим образом. При инициировании T-слоя в потоке газа искусственно создается плазменный сгусток, который при движении в магнитном поле превращается в стабилизированный плазменный поршень — T-слой. Стабилизация параметров T-слоя означает установление энергетического баланса между радиационными потерями энергии из T-слоя и энергией, вырабатываемой за счет джоулевой диссипации.

Мощность джоулевой диссипации определяется коэффициентом нагрузки генератора, тепловой мощностью потока толкающего газа и остается практически постоянной в процессе работы генератора (см. рис. 3.7). В генераторе низкого давления T-слой излучает как объемный излучатель, в связи с чем радиационные потери могут быть скомпенсированы джоулевой диссипацией только в T-слое малого объема. В генераторе высокого давления энергетический баланс достигается в режиме запирания излучения в T-слое. Поскольку T-слой излучает с поверхности, энергетически выгодным является увеличение объема T-слоя, причем предельный объем T-слоя определяется мощностью джоулевой диссипации. Если после инициирования размер нагретой области превышает характерный размер T-слоя, то при движении по каналу его характерный размер уменьшается, а температура растет, т.к. мощность джоулевой диссипации практически не меняется. Именно это и наблюдается в случае генератора низкого давления, где характерный размер T-слоя мал, а первоначальный размер области инициирования не может быть очень маленьким из-за газодинамического разлета газа при быстром вкладе энергии. В генераторе высокого давления характерный размер T-слоя значительно превышает размер области инициирования, поэтому после инициирования с течением времени размер T-слоя увеличивается, а его температура падает.

Энергетические характеристики процессов взаимодействия в генераторах представлены в таблице 3.2. Мощность единичного канала оценивалась в

	Генератор высокого давления	Генератор низкого давления
E_{rad}, МДж	8.4	0.4
E_{load}, МДж	45.6	0.3
E_{dis}, МДж	18.2	0.4
E_{ini}, МДж	15.0	0.1
E_{det}, МДж	271.5	4.5
V_{el}, м^3	3.9	3.9
T, мс	18	9
η, %	11	5
$\widetilde{\delta}$, м	0.34	0.03
W_{el}, МВт	500	1
W_V, МВт/м^3	460	7

Таблица 3.2. Характеристики генератора базовой конфигурации.

предположении, что ширина МГД-канала должна быть сравнима с характерным размером T-слоя (2.32). В этом случае для генератора высокого давления $W_{el} \simeq 500$ МВт, для генератора низкого давления $W_{el} \simeq 1.0$ МВт. Следует, однако, учесть, что длина электродной секции не должна превышать

$\approx 20 \cdot \Delta\ell$ (см. раздел 1.1, а также [20]), что составляет 6 м и 1 м для генераторов высокого и низкого давления соответственно. Электрический КПД последнего на такой длине отрицательный. В тоже время, можно надеяться на повышение КПД генератора высокого давления — за счет уменьшения доли энергии инициирования. В рассматриваемом режиме КПД преобразования энергии потока в электрическую (без учета затрат на инициирование) составляет 17%. Однако оптимизация электрических и газодинамических параметров генератора — предмет особого исследования.

Учитывая важность влияния характеристик излучения из T-слоя на формирование его структуры и эффективность работы генератора, были проанализированы радиационные характеристики стабилизированного T-слоя. Для анализа были выбраны T-слои, профили температуры и давления которых приведены на рис. 3.4. Для каждого T-слоя определялись следующие величины: T^{max}_{layer} — максимальная температура T-слоя, $\widetilde{\delta}$ — эффективный размер T-слоя, P_1/P_2 — перепад давления в T-слое, H — поток излучения из T-слоя, $T^b = (H/\sigma_{S-B})^{0.25}$ и $\epsilon = H/\sigma_{S-B}T^4$ — яркостная температура и коэффициент черноты, соответствующие потоку излучения. Рассчитывались поток излучения в сторону толкающего газа H_L и поток излучения в направлении к выходу из генератора H_R. Результаты расчета потоков излучения представлены на рис. 3.6. Сравнительные характеристики T-слоев в генераторах высокого и низкого давления сведены в таблицу 3.2. При расчете коэффициентов черноты значения T полагались равными температуре в точках максимального по модулю значения радиационного потока.

	ДМГДГ высокого давления	ДМГДГ низкого давления
T^{max}_{layer}, K	$1.9 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^4$
$\widetilde{\delta}$, м	0.34	0.03
P_1/P_2	185 атм / 45 атм	3.5 атм / 1 атм.
H_L, Вт/м^2	$\approx 1.4 \cdot 10^8$	$\approx 8.5 \cdot 10^6$
H_R, Вт/м^2	$\approx 2.7 \cdot 10^8$	$\approx 10.7 \cdot 10^6$
T^b_L, K	$7.0 \cdot 10^3$	$3.5 \cdot 10^3$
T^b_R, K	$8.3 \cdot 10^3$	$3.7 \cdot 10^3$
ϵ_L	0.11	0.015
ϵ_R	0.22	0.018

Таблица 3.3. Сравнительные характеристики стабилизированных T-слоев генераторов высокого и низкого давления.

Поскольку на 7-ой миллисекунде T-слой находился в секции канала высотой $A_y = 1.2$ м, общая мощность излучения для канала единичной ширины

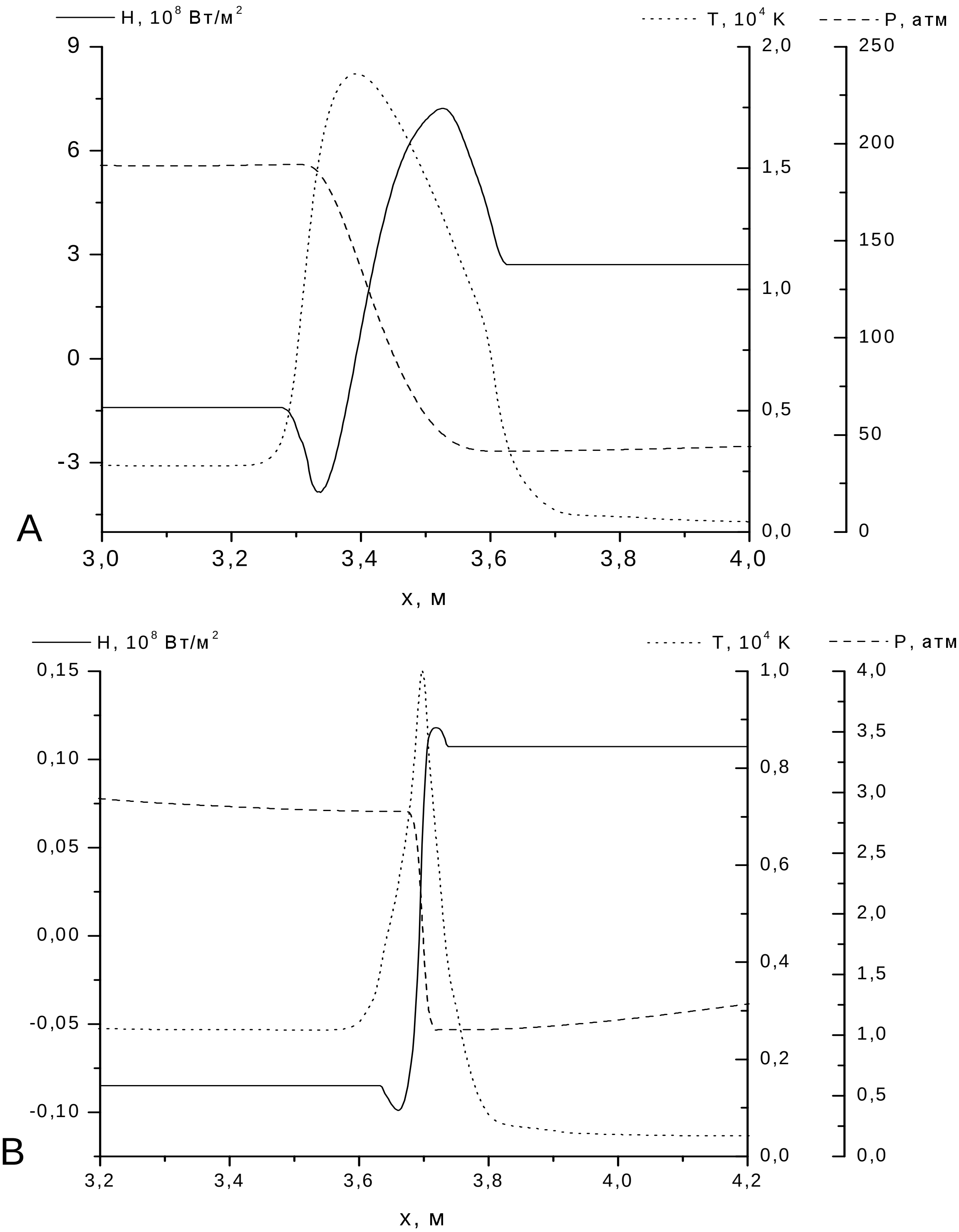


Рис. 3.6. Поток излучения из T-слоя в генераторах высокого (A) и в низкого давления (B).

составляет $W_{rad} = (H_1 + H_2)A = 4.76 \cdot 10^8$ Вт. Приняв эту мощность за среднюю, можно оценить общую энергию излучения $E_{rad} = W_{rad}T = 7.4 \cdot 10^6$ Дж, что вполне приемлемо согласуется с результатами численного моделирования (рис. 3.7). Следует также отметить, что для генератора низкого давления полученные значения коэффициента черноты ~ 0.015 согласуются со справочными данными [128].

Энергетические характеристики генераторов: энергия диссипации, радиационные потери, внутренняя энергия T-слоя, энергия и ток на нагрузке в зависимости от времени представлены на рис. 3.7.

При простейшей электрической схеме генератора и работе на чисто омическую нагрузку в зависимости тока от времени прослеживается влияние ударных волн в канале генератора (в виде пиков тока). В реальной схеме генератора влияние ударных волн, по-видимому, уменьшится за счет вязкости газа, однако учитывать их необходимо, т.к. они могут как поддерживать T-слой, так и подавлять его. В процессе численного моделирования такие режимы наблюдались.

Расчет внутренней энергии T-слоя показывает, что при инициировании часть энергии расходуется на образование ударных волн — сразу после инициирования E_{layer} достигает значения $13 \cdot 10^6$ Дж (рис. 3.7.А) и составляет 87% от вложенной энергии.

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента с корректным учетом излучения и поглощения в потоке позволяют сделать вывод о малой эффективности детонационного МГД-генератора с T-слоем при низких давлениях. В рассматриваемом генераторе низкого давления коэффициент нагрузки не превышал 0.4, т.е. основная доля генерируемой энергии тратилась на поддержание T-слоя. Попытки увеличить давление в потоке (до 10 атм) приводили к развалу T-слоя. Результаты исследования генератора высокого давления оправдали ожидания: генератор имеет высокую удельную мощность, большой коэффициент нагрузки ($0.6 \div 0.8$), высокий электрический КПД и большой характерный размер T-слоя.

3.3 Оптимизация параметров ДМГДГ

Модель ДМГДГ содержит ряд параметров, определяющих режим работы генератора. К ним относятся конфигурация канала, величина стационарного магнитного поля, сопротивление нагрузки, параметры горючей смеси, про-

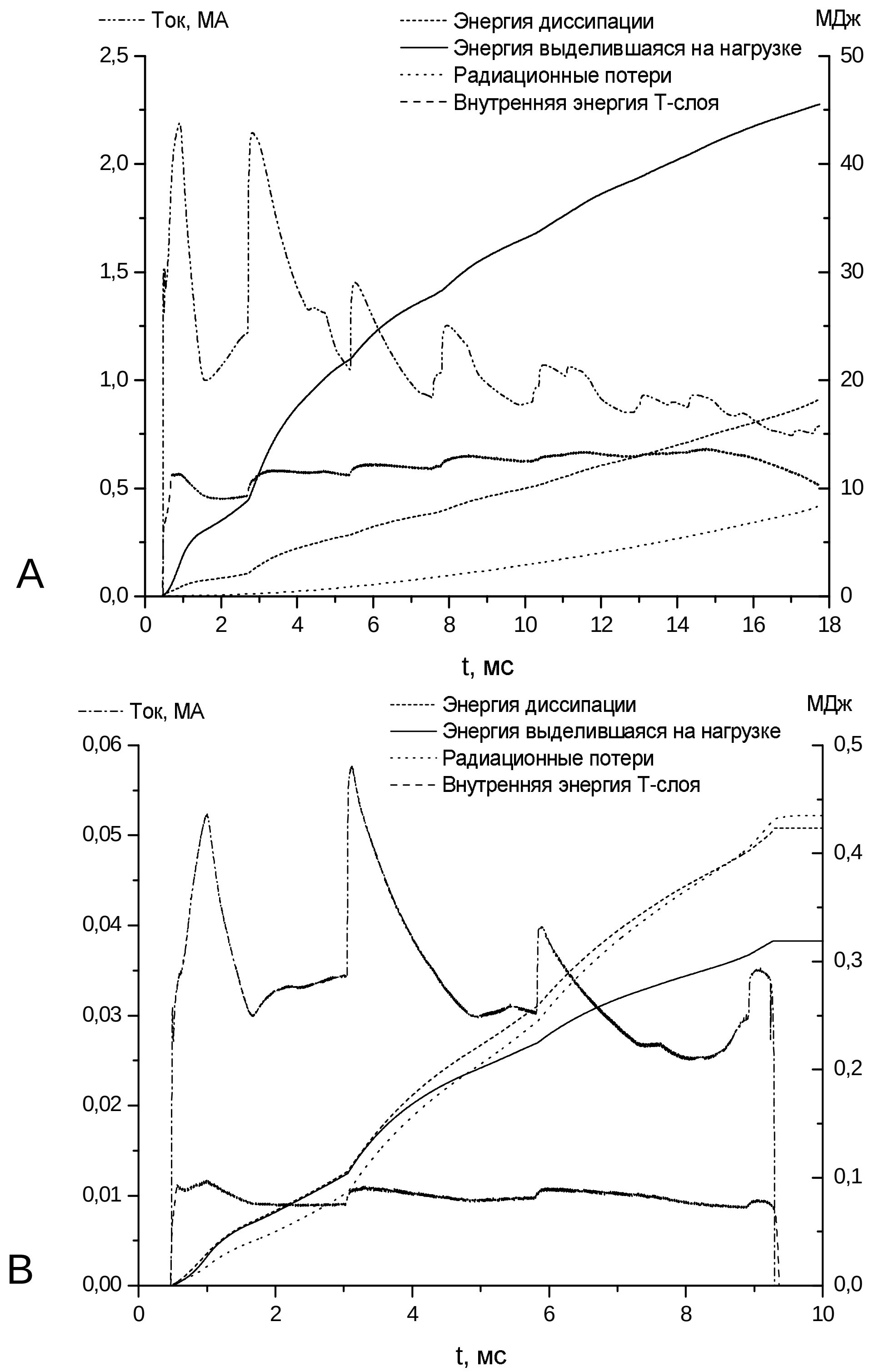


Рис. 3.7. Энергетические характеристики ДМГД-генераторов высокого (A) и низкого давления (B).

дуктов сгорания и инициирования T-слоя. При проведении вычислительного эксперимента для генератора высокого давления в разделе 3.2 не ставилась задача оптимизации работы ДМГДГ — значения параметров выбирались из общих физических соображений. Результаты вычислительного эксперимента показали принципиальную возможность работы схемы ДМГДГ. Следующим шагом является корректировка выбранных параметров с целью увеличения эффективности генератора. Как следует из соотношения (2.34) при заданных параметрах горючей смеси существует два основных пути увеличения КПД генератора: снижение энергии инициирования T-слоя и увеличение эффективности взаимодействия T-слоя с магнитным полем.

Энергия на инициирование T-слоя в генераторе высокого давления составляет столь значительную величину ($\sim$ 15 МДж), что вопрос уменьшения этой энергии заслуживает особого внимания. Снижение энергии инициирования может быть достигнуто за счет оптимизации режима первоначального нагрева T-слоя и последующего его разогрева за счет энергии потока. В частности, за счет уменьшения доли энергии, рассеивающейся в расходящихся ударных волнах (в проведенном вычислительном эксперименте для генератора высокого давления эта величина составила 13%).

Увеличение эффективности взаимодействия T-слоя с магнитным полем возможно при условии увеличения скорости движения T-слоя по каналу, что, прежде всего, подразумевает оптимизацию конфигурации канала ДМГДГ. Поскольку с течением времени давление за T-слоем падает, имеет смысл рассмотреть вариант спадающего магнитного поля с тем, чтобы сохранить величину параметра гидромагнитного взаимодействия R_H (2.35).

Оптимизация параметров генератора проводилась по следующей методике. Фиксировался базовый набор параметров генератора (таблица 3.4). В вычислительных экспериментах поочередно варьировались различные параметры базового набора и исследовалось изменение режима работы генератора. В некоторых случаях для обеспечения работоспособности схемы приходилось изменять два и более параметров генератора одновременно.

3.3.1 Параметры инициирования T-слоя

В общем случае процесс инициирования T-слоя в ДМГДГ осуществляется следующим образом. При движении детонационной волны за ее фронтом образуется зона хемопроводимости, в которой электропроводность газа на несколько порядков превышает электропроводность продуктов сгорания при

Конфигурация канала	Детонационная секция длиной $L_{det} = 1.5$ м постоянной высоты $A_{det} = 2$ м с соплом на выходе высотой $A_c = 0.5$ м; электродная секция длиной $L_{el} = 3.5$ м с раскрывом по каждому электроду $\alpha_{el} = 10°$; диффузор длиной $L_{df} = 0.5$ м с линейным увеличением выходного сечения в 1.5 раза; единичная ширина канала $A_z = 1$ м.
Параметры смеси	Начальное давление $P_0 = 30$ атм; воздушно-водородная смесь с $\gamma = 1.35$, $\mu = \mu(P, T)$, $q = 3.5$ МДж/кг.
Параметры инициирования T-слоя	Энергия инициирования $E_{ini} = 15$ МДж; время вклада энергии на разогрев T-слоя $\tau_{ini} = 80$ мкс; размер области вклада энергии $\Delta_{ini} = 0.03$ м; положение фронта детонационной волны относительно критического сечения сопла в момент начала вклада энергии $\Delta x_{ini} = 0.05$ м.
МГД параметры	Постоянное магнитное поле в электродной секции $B_0 = 15$, Тл; Постоянное сопротивление нагрузки $R_{load} = 2 \cdot 10^{-3}$ Ом.

Таблица 3.4. Базовая конфигурация ДМГДГ в экспериментах по оптимизации.

той же температуре. Наличие этой зоны обусловлено протеканием химической реакцией горения. Ширина ее чрезвычайно мала и лежит в пределах 1 мм. При входе области хемопроводимости на электроды, подключенные к внешнему источнику энергии, в ней появляется электрический ток и начинается нагрев газа. Скорость подвода энергии от внешнего источника определяется величиной проводимости в зоне горения, характерным размером зоны, характеристиками источника энергии.

В модели ДМГДГ применялась упрощенная, интегральная модель инициирования T-слоя (раздел 2.2.4), в которой характеристики зоны хемопроводимости не рассматривались, а подвод энергии в область инициирования задавался синусоидальной во времени функцией. Процесс инициирования характеризуется четырьмя основными параметрами (см. раздел 2.2.4): энергией, затраченной на инициирование T-слоя — E_{ini}, временем вклада энергии инициирования — τ_{ini}, размером зоны инициирования — Δ_{ini} и положением области инициирования в канале — Δx_{ini}, которое определяется как расстояние начального положения центра зоны инициирования от начала электродной секции (рис. 3.8).

Оптимизация процесса инициирования заключалась в минимизации энергии, затраченной на инициирование T-слоя. В рамках применяемой модели оптимизация процесса инициирования возможна только при таком наборе параметров инициирования, который с одной стороны, обеспечивает минимальную энергию инициирования, с другой стороны не противоречит физике явления.

В вычислительных экспериментах выбор значений параметров инициирования проводился с учетом следующих соображений. Энергия E_{ini} должна быть минимально возможной, но достаточной для осуществления подхвата T-слоя и его последующего развития. Увеличение времени инициирования замедляет развитие T-слоя, уменьшение — увеличивает потери энергии в расходящихся ударных волнах. Положение области инициирования должно определяться профилем канала в переходной области между детонационной и электродной секцией — в области с меньшим сечением канала затраты энергии на инициирование меньше. Размер зоны инициирования является параметром применяемой вычислительной модели и отражает тот факт, что модель инициирования T-слоя не учитывает процесс развития зоны хемопроводимости в T-слой. Величину Δ_{ini} имеет смысл выбирать таким образом, чтобы размер T-слоя после инициирования был близок к характерному размеру стабилизированного T-слоя.

Значения параметров, которые использовались в вычислительных экспериментах по оптимизации процесса инициирования, представлены в таблице 3.5. Первый эксперимент соответствует базовым значениям параметров инициирования, приведенным в таблице 3.4.

Эксперимент	E_{ini}, МДж	τ_{ini}, мкс	Δ_{ini}, м	Δx_{ini}, м
1	**15**	**80**	**0.03**	**0.05**
2	15	40	0.03	0.05
3	15	160	0.03	0.05
4	12	320	0.03	0.05
5	6	1280	0.03	0.05
6	**6**	**320**	**0.02**	**0.05**
7	5	320	0.02	0.05
8	6	320	0.02	0.01
9	6	320	0.02	0.02

Таблица 3.5. Значения параметров инициирования T-слоя в численных экспериментов по оптимизации инициирования.

На рис. 3.9 представлены зависимости КПД генератора от условий инициирования T-слоя. При уменьшении времени нагрева (эксперимент 2) КПД генератора уменьшается, т.к. увеличивается энергия ударных волн, расходящихся от области инициирования. Увеличение времени нагрева до 160 мс (эксперимент 3) и до 320 мс (эксперимент 4) уменьшает энергию ударных волн и повышает КПД, но одновременно увеличивает время развития T-слоя.

Дальнейшее увеличение времени инициирования (эксперимент 5) приводит к слишком медленному развитию T-слоя, в результате чего генератор не успевает сработать энергию теплового потока за время движения T-слоя по электродной секции. Уменьшение зоны нагрева до двух сантиметров позволяет снизить энергию инициирования еще в два раза (ср. эксперименты 4 и 6). Увеличение расстояния области инициирования от электродной секции понижает КПД (эксперименты 8 и 9).

Таким образом, уменьшение зоны нагрева до 2-х сантиметров и увеличение времени вклада энергии до $3.2 \cdot 10^{-4}$ позволяют уменьшить энергию инициирования с 15 МДж до 6 МДж. Поэтому в качестве оптимальных можно принять параметры инициирования эксперимента 6.

С уменьшением вклада энергии меняется режим развития T-слоя: формируется более узкий T-слой, который затем прогревается за счет джоулевой диссипации. На рис. 3.10 представлена динамика изменения коэффициента нагрузки во времени для двух значений энергии инициирования: 15 МДж и 6 МДж. Отмечены времена начала инициирования T-слоя, завершения инициирования и завершения прогрева T-слоя. Окончанием прогрева условно считается стабилизация коэффициента нагрузки. Видно, что при меньшем вкладе энергии T-слой за счет энергии потока прогревается дольше.

На рис. 3.11 представлена динамика развития T-слоя в случае базового и оптимизированного процесса инициирования T-слоя. Приведены температурные профили T-слоя для трех моментов времени. Момент времени 0.9 мс соответствует окончанию инициирования T-слоя, 1.4 мс — моменту стабилизации коэффициента нагрузки, 3.0 мс — установившемуся течению. Из анализа этих температурных профилей можно сделать вывод, что уменьшение энергии инициирования до некоторого критического значения, в данном случае 6 МДж, создает условия для дальнейшего формирования T-слоя за счет энергии потока.

Выбор оптимальных значений времени вклада и величины энергии инициирования в рамках данной модели имеет физическое объяснение. С уменьшением времени подвода большая доля энергии идет на образование ударных волн, с увеличением — уносится излучением. Оптимальная энергия инициирования должна обеспечивать прогрев локальной области газа до такой температуры, при которой термическая ионизация создает электропроводность газа, достаточную для протекания индуцированного тока и выделения джоулевой диссипации, обеспечивающей компенсацию потерь на излучение

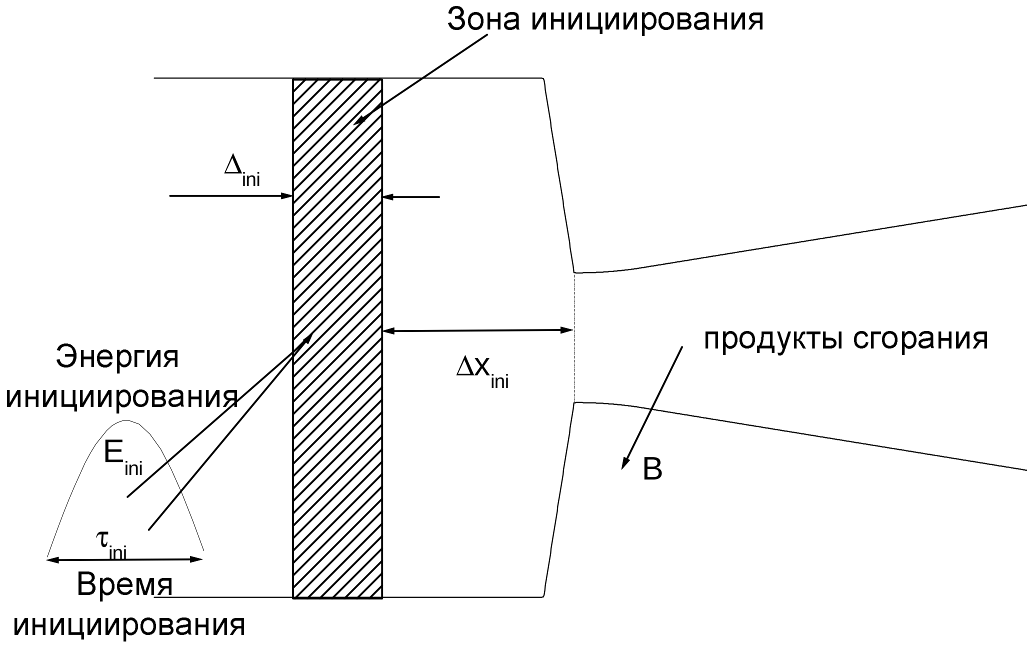


Рис. 3.8. Схема инициирования T-слоя.

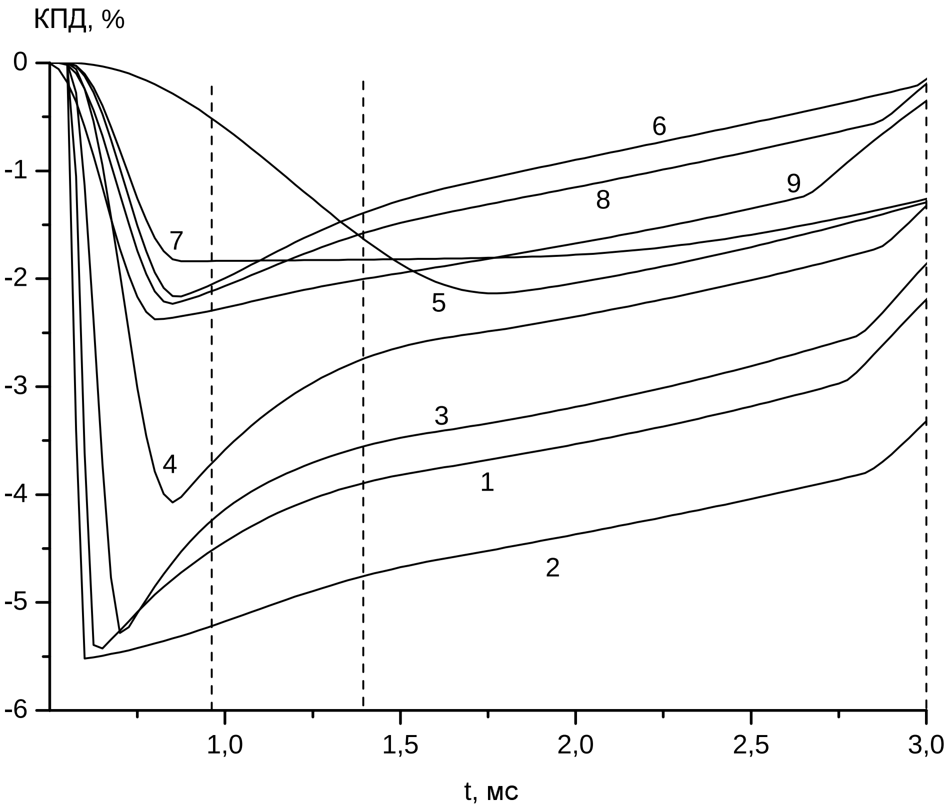


Рис. 3.9. Зависимость КПД генератора от времени в экспериментах по инициированию T-слоя.

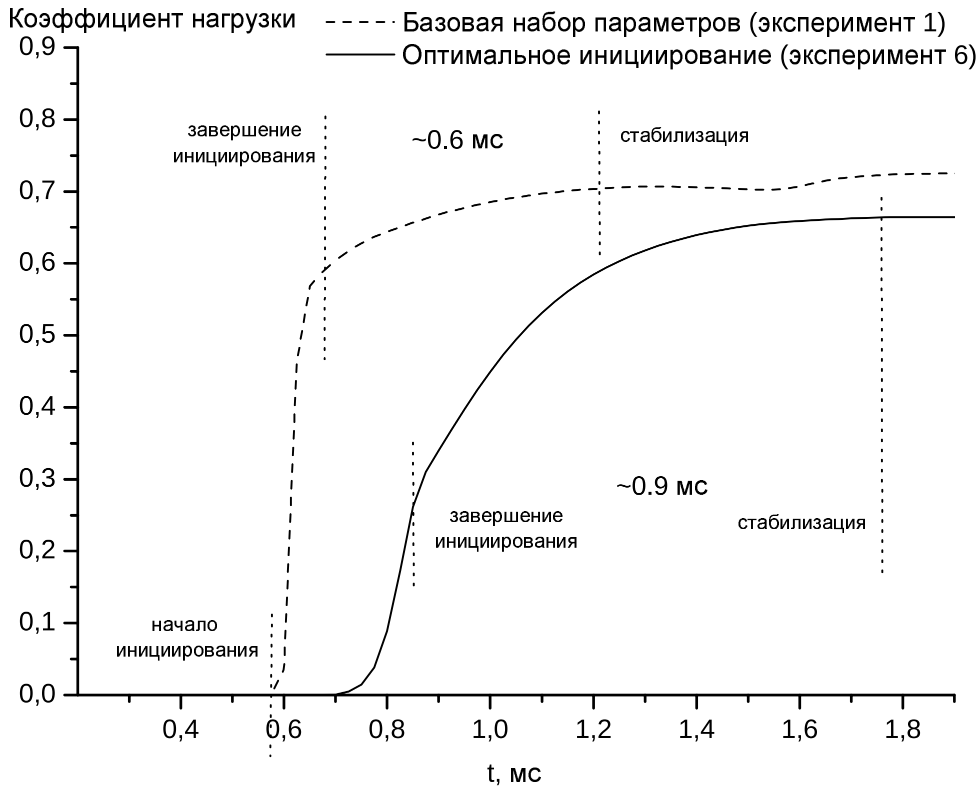


Рис. 3.10. Зависимость коэффициента нагрузки от времени для генератора базовой конфигурации и оптимизированного генератора.

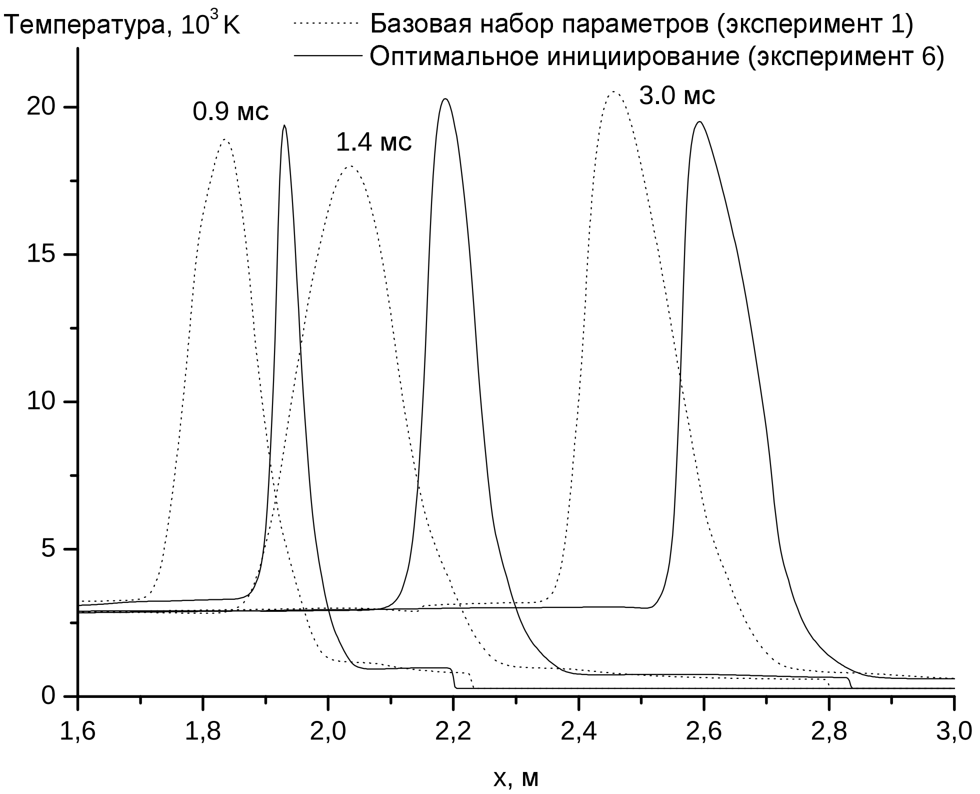


Рис. 3.11. Динамика развития T-слоя в генераторе базовой конфигурации и в оптимизированном генераторе.

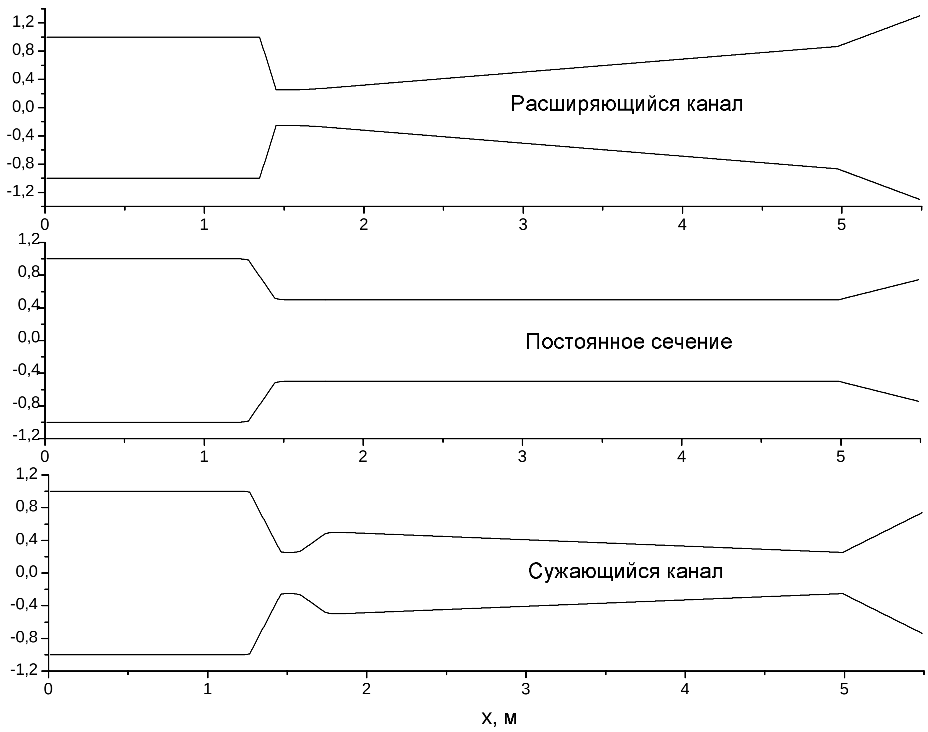


Рис. 3.12. Исследуемые конфигурации канала ДМГДГ.

и дальнейший прогрев T-слоя. При уменьшении энергии инициирования ниже критического значения T-слой развиваться не будет. При очень больших значениях вклада — «перегретый» T-слой будет остывать, отдавая энергию на излучение. В тоже время, медленно развивающийся T-слой уменьшает суммарную выработанную энергию, а меньший размер T-слоя приведет к уменьшению ширины канала и снижению мощности генератора.

В связи со сказанным оптимизация энергии инициирования должна проводиться с учетом интегральных энергетических характеристик генератора. В рассмотренных вычислительных экспериментах лишь определяются направления такой оптимизации. Результаты вычислительного эксперимента, проведенного для ДМГДГ с оптимальными параметрами инициирования, представлены в разделе 3.3.2.

3.3.2 Оптимизация течения в канале ДМГДГ

Для оценки влияния профиля электродной секции на энергетические характеристики ДМГДГ были проведены сравнительные вычислительные эксперименты для каналов трех конфигураций: с электродной секцией постоянного, расширяющегося и сужающегося сечения (рис. 3.12). Полученные энергетические характеристики генераторов приведены в таблице 3.6.

	Расширяющееся сечение	Постоянное сечение	Сужающееся сечение
E_{rad}, МДж	8	6	3
E_{load}, МДж	46	45	37
E_{dis}, МДж	18	19	11
η, %	11	9	8
$\widetilde{\delta}$, м	0.3	0.5	0.4
T, мс	19	21	17

Таблица 3.6. Результаты вычислительных экспериментов для ДМГД-генераторов с каналами различной конфигурации.

Как видно из таблицы, расширяющемуся каналу соответствует наибольший КПД и наименьший характерный размер T-слоя, каналу постоянного сечения —наибольший характерный размер T-слоя, сужающемуся каналу — наименьший КПД. Зависимость тока от времени приведена на рис. 3.13.

Следует отметить, что уменьшение раскрыва канала приводит к стабилизации коэффициента нагрузки (рис. 3.14). Оптимальный раскрыв, по-видимому, лежит в пределах $10°$ по каждой электродной секции — при большем раскрыве коэффициент нагрузки заметно падает.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показывают, что добиться существенного повышения скорости T-слоя, а значит и увеличения эффективности взаимодействия T-слоя с магнитным полем, за счет изменения одного лишь профиля канала не удается. Необходимо рассмотреть другие возможные варианты оптимизации течения, в частности, уменьшающееся по мере расширения канала магнитное поле и понижение давления перед T-слоем.

При расширяющемся канале создание в объеме канала магнитного поля, постоянного по всей длине, энергетически невыгодно. Технически гораздо проще обеспечить постоянство плотности магнитного потока. Из конструктивных соображений магнитное поле по мере расширения канала должно уменьшаться. Уменьшение магнитного поля приведет к уменьшению электродинамической силы, тормозящей T-слой и замедлит понижение его скорости.

До сих пор во всех вычислительных экспериментах рассматривалась модель, в которой в начальный момент времени давление по всей длине канала задавалось постоянным, при этом в детонационной камере сгорания находилась горючая смесь, а в электродной секции — продукты сгорания. В действительности, начальное распределение давления вдоль оси канала будет

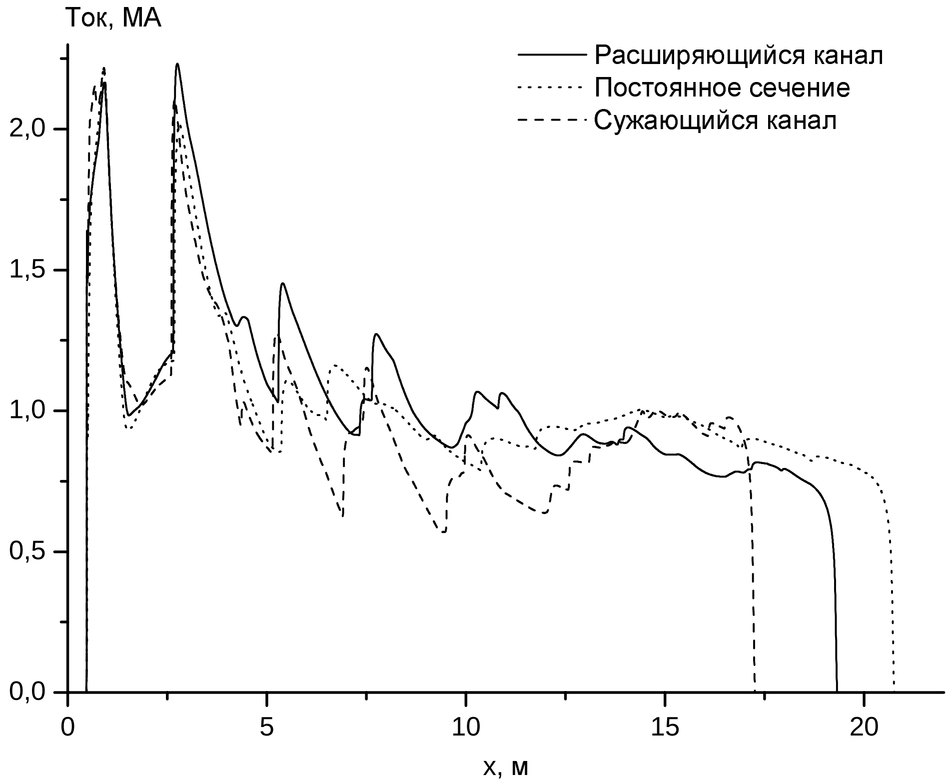


Рис. 3.13. Зависимость тока от времени при различных конфигурациях канала ДМГДГ.

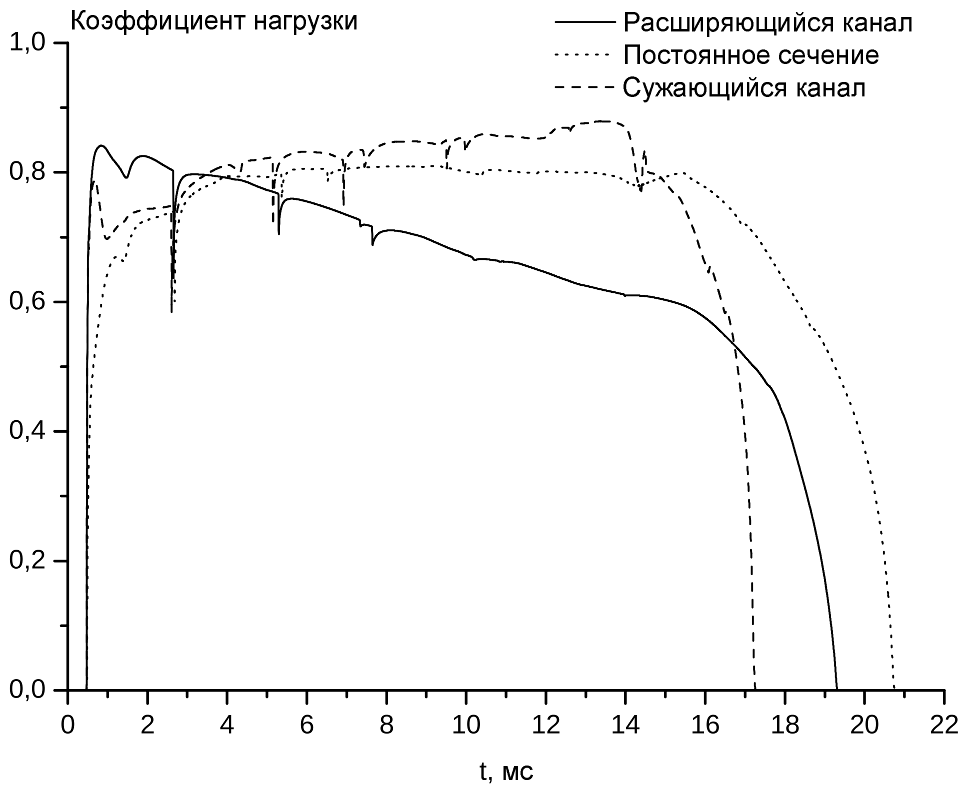


Рис. 3.14. Зависимость коэффициента нагрузки от времени при различных конфигурациях канала ДМГДГ.

иметь более сложный характер.

Работа ДМГДГ начинается с напуска горючей смеси в детонационную камеру сгорания, когда в канале имеется какое-то остаточное распределение давления продуктов сгорания. Величина и характер этого давления определяются скважностью работы ДМГДГ. Горючая смесь под давлением P_0 распространяется вдоль детонационной камеры, создавая волну сжатия в продуктах сгорания. Когда фронт волны сжатия находится на некотором расстоянии от критического сечения сопла, происходит подрыв горючей смеси на торцевой стенке и по горючей смеси начинает распространяться детонационная волна. Время инициирования детонационной волны выбирается таким, чтобы волна сжатия горючей смеси и детонационная волна подходили к критической секции одновременно. В таком варианте работы начальное давление продуктов сгорания в электродной секции может быть значительно меньше, чем начальное давление горючей смеси P_0.

Анализ зависимости остаточного давления продуктов сгорания в критическом значении сопла от времени показал, что для базового ДМГДГ (таблица 3.4) давление снижается до $\simeq 10$ атм через 35 мс. В принципе, можно решать задачу напуска горючей смеси при таком распределении остаточного давления, формирования волны сжатия и т.д. В тоже время, для анализа влияния остаточного давления достаточно задать давление продуктов сгорания в канале постоянным и меньшим давления в детонационной камере.

Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов, в которых параметры базового ДМГДГ варьировались следующим образом.

1. Задавалось магнитное поле, линейно уменьшающееся с увеличением сечения электродной секции с 15 Тл до 5 Тл таким образом, чтобы магнитный поток оставался примерно постоянным по длине канала.

2. Начальное давление продуктов сгорания в электродной секции и диффузоре задавалось равным 10 атм при начальном давлении горючей смеси в детонационной секции 30 атм.

3. Применялся оптимизированный набор параметров инициирования T-слоя (см. таблицу 3.5, эксперимент 6).

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 3.15 – 3.18. Для сравнения здесь же приведены соответствующие характеристики, полученные для ДМГДГ с базовым набором параметров.

Анализ полученных результатов показал следующее.

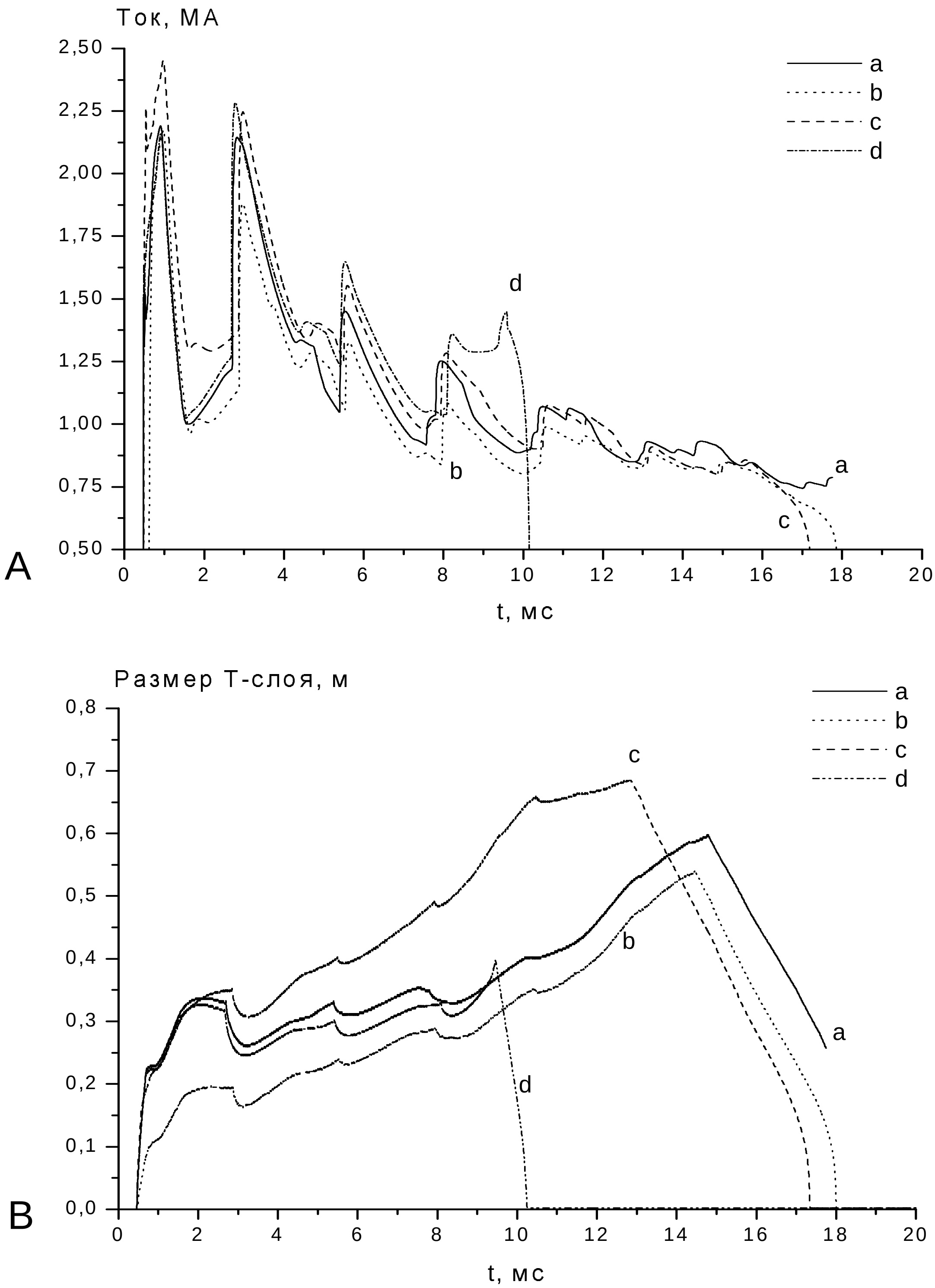


Рис. 3.15. Зависимость тока и размера T-слоя от времени. a — базовый эксперимент; b — оптимизированная энергия инициирования; c — начальное давление продуктов сгорания 10 атм; d — линейно уменьшающееся магнитное поле (с 15 Тл до 5 Тл).

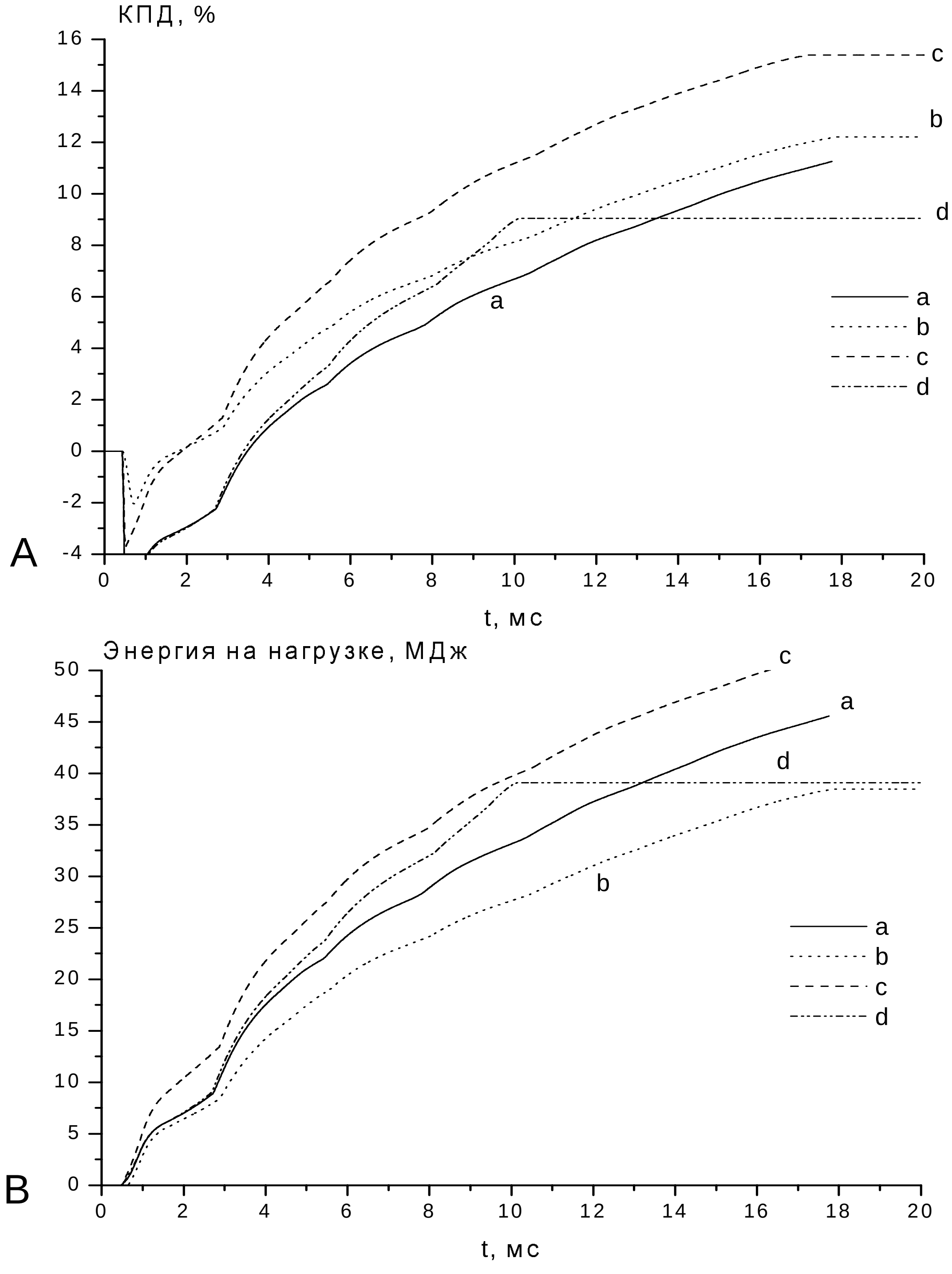


Рис. 3.16. Зависимость энергии выделившейся на нагрузке и КПД от времени. a — базовый эксперимент; b — оптимизированная энергия инициирования; c — начальное давление продуктов сгорания 10 атм; d — линейно уменьшающееся магнитное поле (с 15 Тл до 5 Тл).

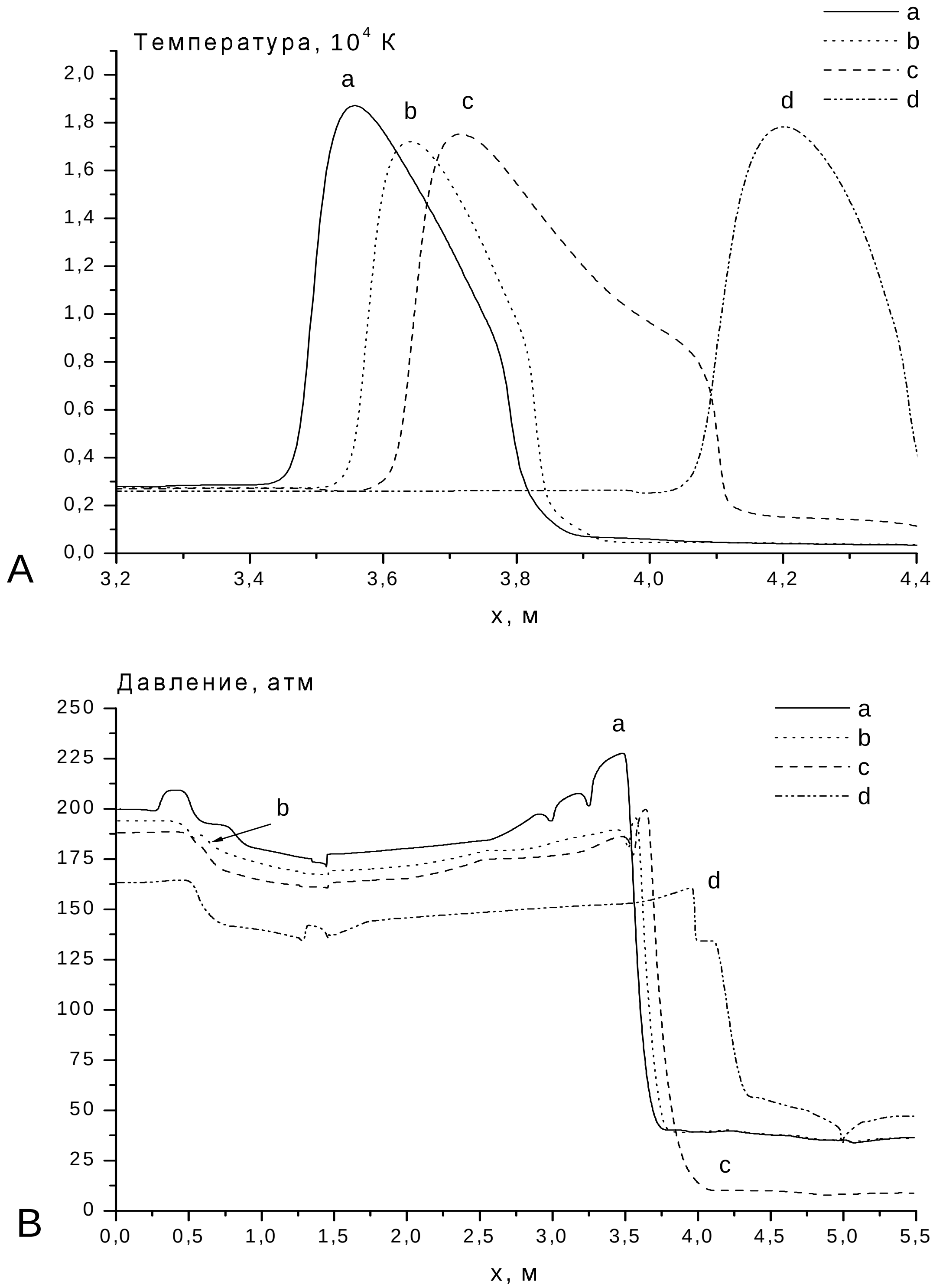
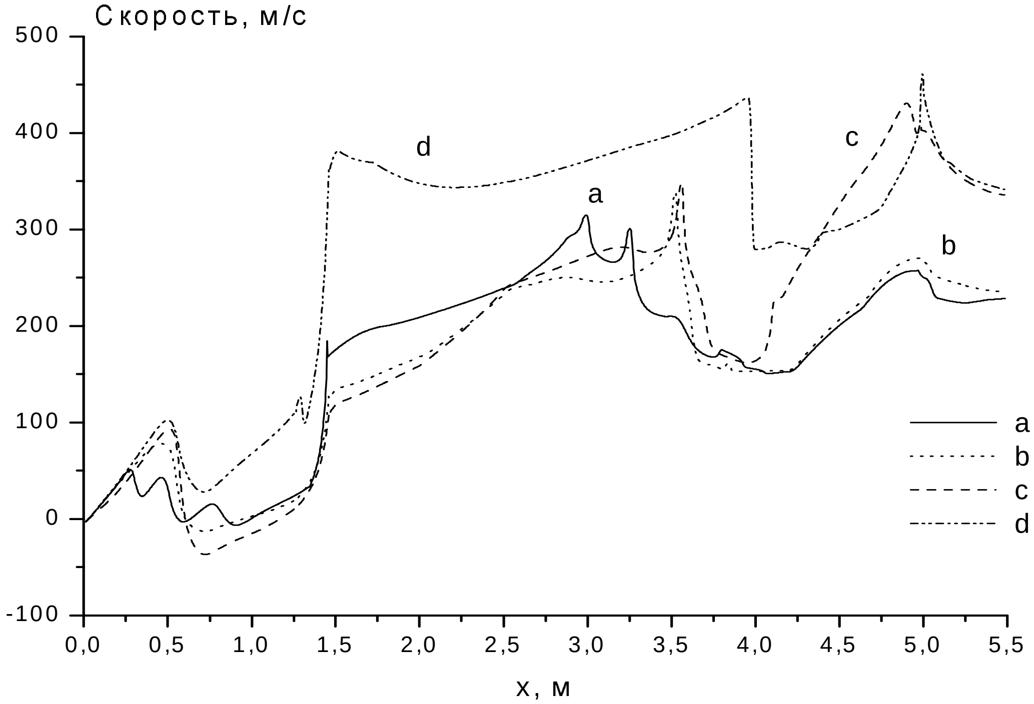


Рис. 3.17. Распределение температуры и давления на момент времени $t = 8$ мс. a — базовый эксперимент; b — оптимизированная энергия инициирования; c — начальное давление продуктов сгорания 10 атм; d — линейно уменьшающееся магнитное поле (с 15 Тл до 5 Тл).



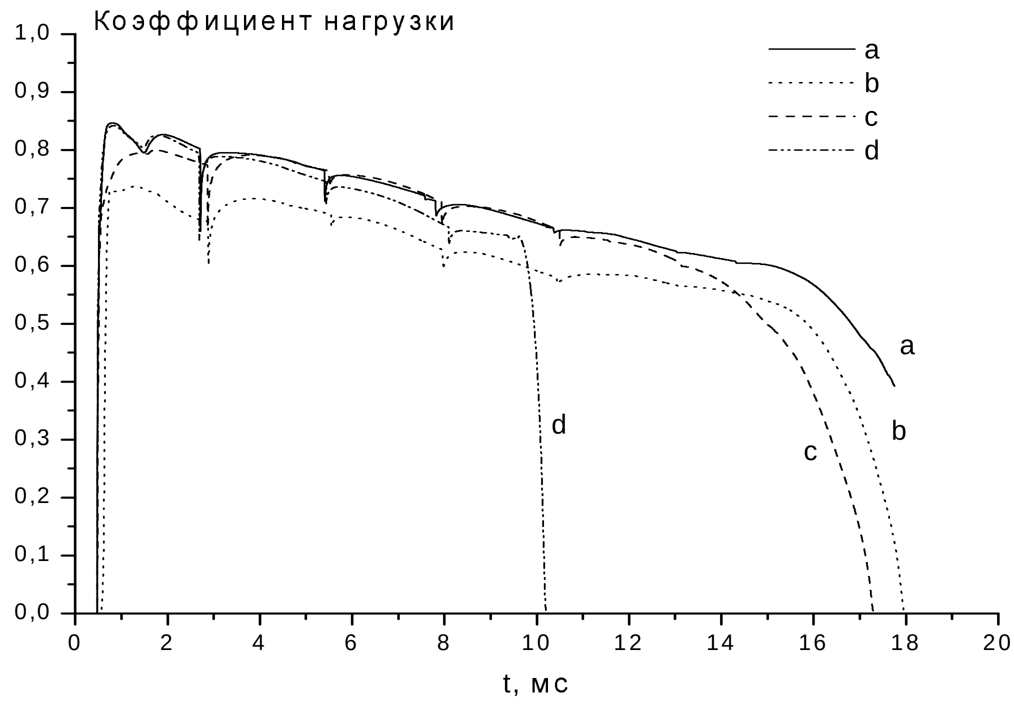


Рис. 3.18. Распределение скорости на момент времени $t = 8$ мс и зависимость коэффициента нагрузки от времени. a — базовый эксперимент; b — оптимизированная энергия инициирования; c — начальное давление продуктов сгорания 10 атм; d — линейно уменьшающееся магнитное поле (с 15 Тл до 5 Тл).

1. Уменьшение энергии инициирования по сравнению с базовым вариантом повышает КПД (рис. 3.16.А), снижает энергию, выделившуюся на нагрузке (рис. 3.16.В), и уменьшает ширину T-слоя (рис. 3.15.В и 3.15.А). Генератор становится более эффективным, но менее мощным.

2. Влияние понижающегося магнитного поля существенно проявляется в увеличении скорости (рис. 3.18.А) и сокращении длительности работы. КПД и мощность на нагрузке в генераторе возрастают (рис. 3.16.), однако из-за существенного сокращения длительности работы по абсолютной величине КПД генератора и энергия на нагрузке меньше, чем для других режимов.

3. Уменьшение давления продуктов сгорания в канале приводит к заметному улучшению характеристик генератора; увеличиваются КПД, характерный размер T-слоя и энергия на нагрузке.

4. Ток и коэффициент нагрузки от изменения указанных параметров зависят слабо (рис. 3.15.А и 3.18.В).

3.4 Оптимизированный ДМГДГ

Анализ работы ДМГДГ базовой конфигурации выявил основные пути повышения эффективности генератора: оптимальный раскрыв, уменьшающееся по мере расширения канала магнитное поле, уменьшение остаточного давления продуктов сгорания в канале генератора и оптимизация инициирования T-слоя.

Следует отметить, что все вычислительные эксперименты по оптимизации течения проводились на воздушно-водородной смеси с показателем адиабаты $\gamma = 1.35$ на генераторе базовой конфигурации. Однако известно, что показатель адиабаты в зависимости от температуры и давления меняется довольно сильно. На рис. 2.2 представлены зависимости показателя адиабаты продуктов сгорания воздушно-водородной и кислородно-водородной смесей от температуры, полученные с помощью пакета MONSTR [112]. Они показывают, что для воздушно-водородной смеси в диапазоне температур $5 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^4$ K при давлениях до 200 атм показатель адиабаты не превышает 1.2. Для кислородно-водородной смеси при давлениях более 30 атм показатель адиабаты ниже 1.25 наблюдается только в диапазоне температур $4 \cdot 10^3 \div 1.2 \cdot 10^4$ K, тогда как при других температурах он выше.

Конфигурация канала	Детонационная секция длиной $L_{det} = 2$ м постоянного сечения $A_{det} = 2$ м с соплом на выходе $A_c = 0.5$ м; электродная секция длиной $L_{el} = 8.5$ м с раскрывом по каждому электроду $\alpha_{el} = 5°$; диффузор длиной $L_{df} = 0.5$ м с линейным увеличением выходного сечения в 1.5 раза; единичная ширина канала $A_z = 1$ м.
Параметры смеси	Начальное давление горючей смеси $P_0 = 30$ атм, продуктов сгорания — $P_0 = 10$ атм; кислородно-водородная смесь с $\gamma = 1.25$, $\mu = \mu(P, T)$, $q = 6.6$ МДж/кг
Параметры инициирования T-слоя	Энергия инициирования $E_{ini} = 8$ МДж; время вклада энергии на разогрев T-слоя $\tau_{ini} = 320$ мкс; размер области вклада энергии $\Delta_{ini} = 0.02$ м; положение фронта детонационной волны относительно критического сечения сопла в момент начала вклада энергии $\Delta x_{ini} = 0.05$ м.
МГД параметры	Величина магнитного поля на входе в электродную секцию $B_0 = 15$ Тл, далее поле линейно падает до $B = 5$ Тл (магнитный поток сохраняется); постоянное сопротивление нагрузки $R_{load} = 5 \cdot 10^{-3}$ Ом.

Таблица 3.7. Оптимальная конфигурация ДМГДГ.

С этой точки зрения использование кислородно-водородной смеси предпочтительнее. Диапазон температур $4{\cdot}10^3 \div 1.2{\cdot}10^4$ К — это диапазон температур нагрева газа на границе T-слое при его формировании. Стабилизация параметров T-слоя приводит к тому, что приращение массы T-слоя прекращается, и нагрев газа в температурном диапазоне от $3 \cdot 10^3$ К до $1.2 \cdot 10^4$ К происходит только для протекающего через T-слой газа. Вопрос переноса газа сквозь T-слой подробно рассмотрен в разделе 3.5.

Из сказанного следует, что первым вариантом оптимизированного ДМГДГ можно считать генератор с параметрами, представленными в таблице 3.7. На рис. 3.19 представлена динамика изменения энергетических характеристик оптимизированного генератора во времени. При КПД 10% энергия на нагрузке составляет $E_{load} = 49$ МДж, что при длительности работы $T = 12$ мс и ширине канала $\simeq 0.3$ м (соответствует характерному размеру T-слоя) дает

t, мс	2	5	8	10
x, м	3.5	5.5	7.2	8.5
$P(x)$, атм	170	140	110	80
$B(x)$, Тл	13.3	11.0	9.1	7.6
R_H	4.1	3.4	3.0	2.9

Таблица 3.8. Динамика изменения параметра гидромагнитного взаимодействия оптимизированного ДМГДГ.

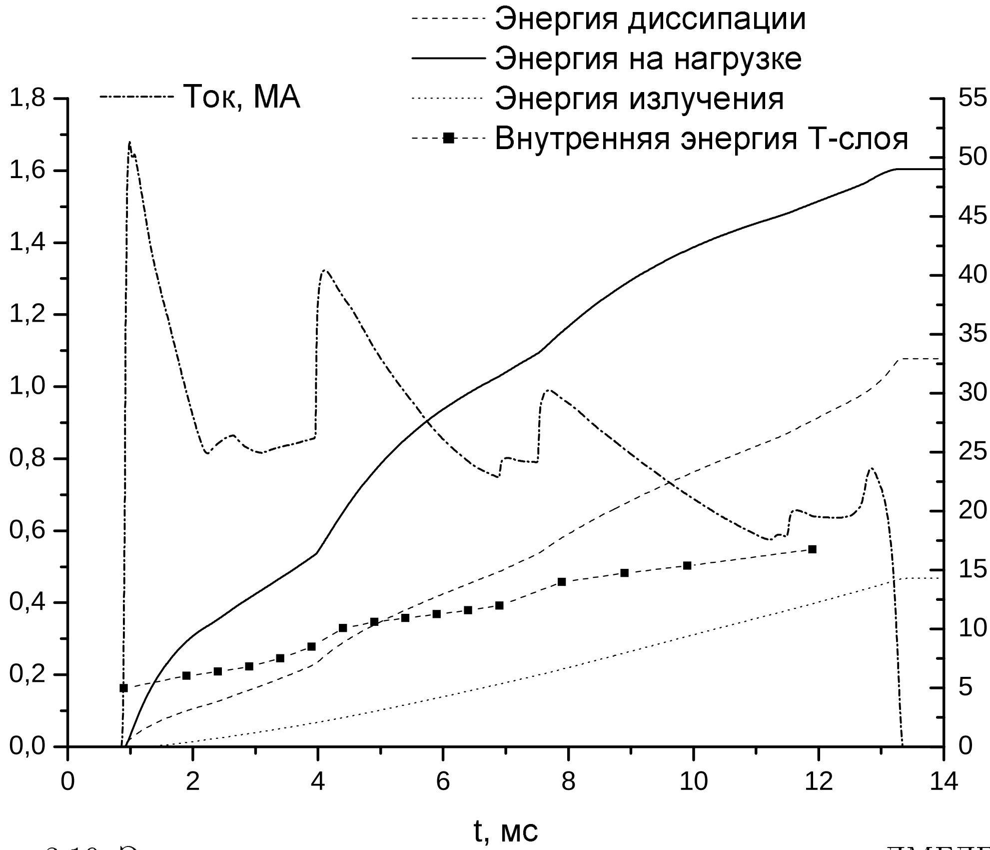


Рис. 3.19. Энергетические характеристики оптимизированного ДМГДГ.

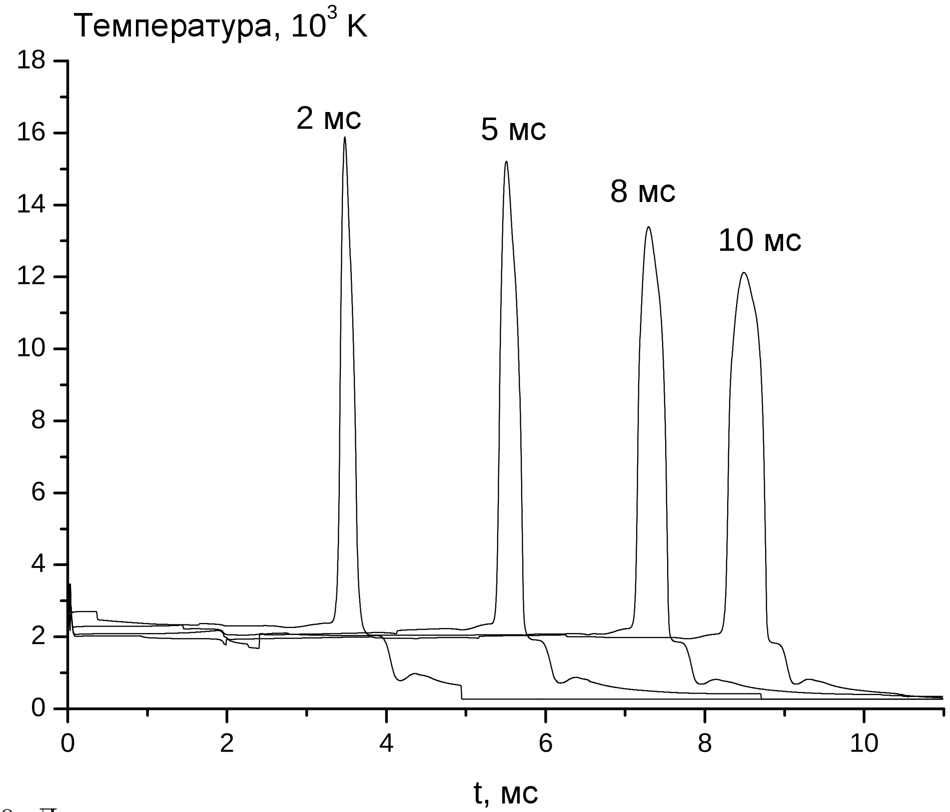


Рис. 3.20. Динамика изменения температуры в канале оптимизированного ДМГДГ.

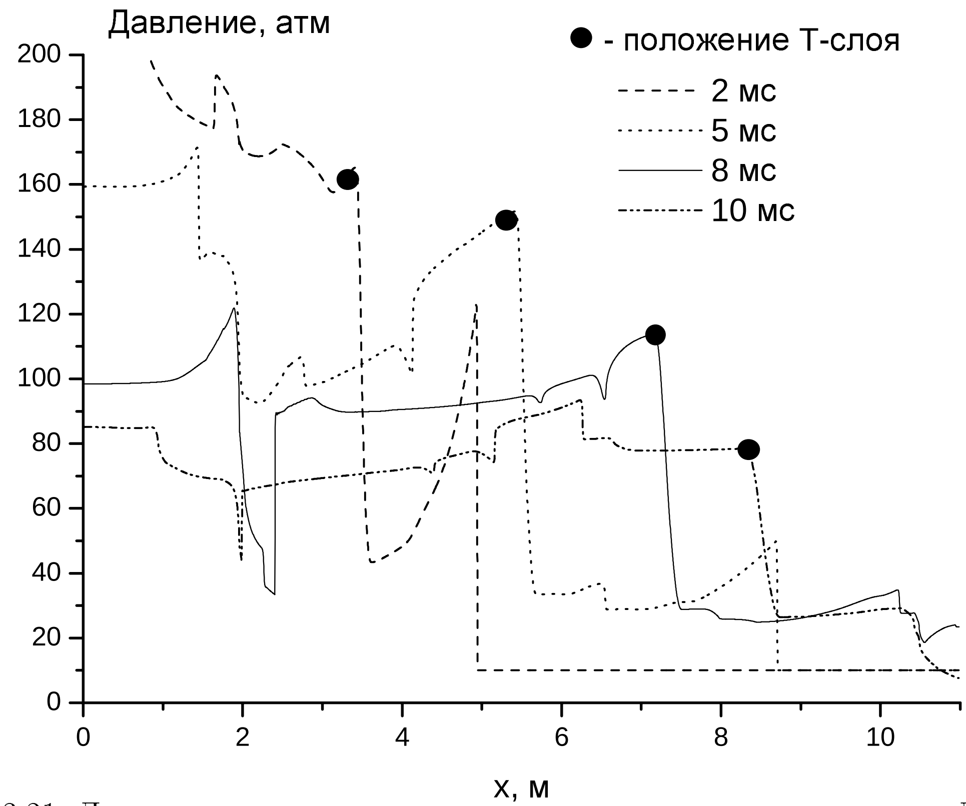


Рис. 3.21. Динамика изменения давления в канале оптимизированного ДМГДГ.

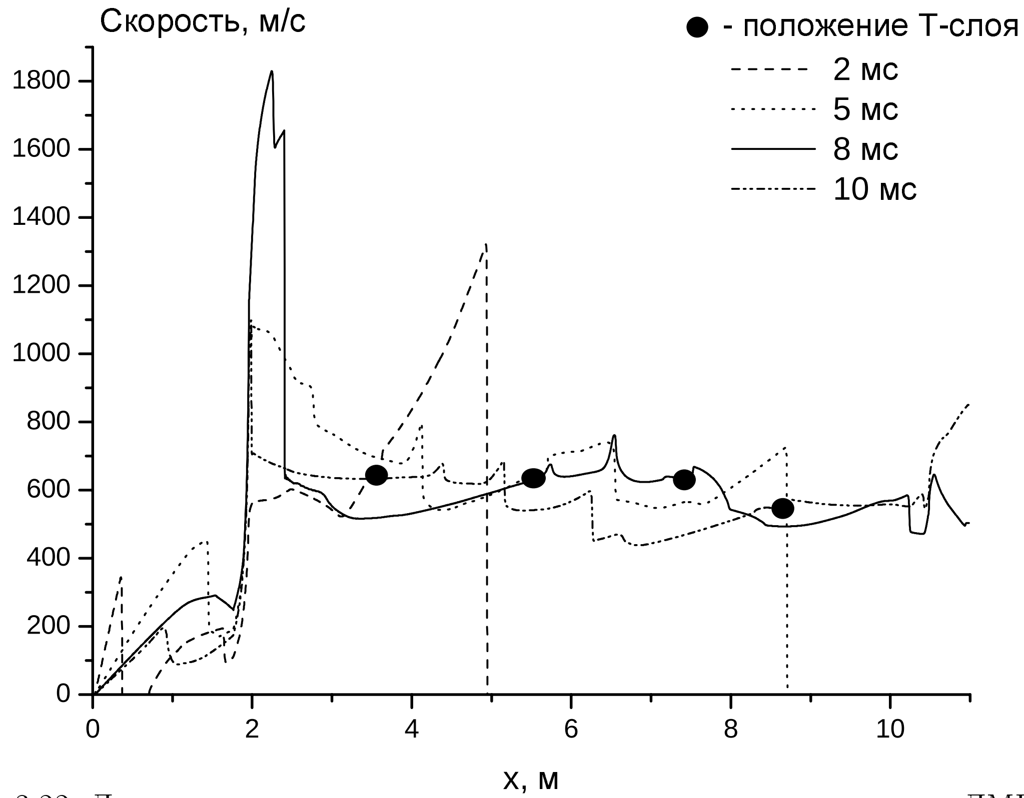


Рис. 3.22. Динамика изменения скорости в канале оптимизированного ДМГДГ.

t, мс	2	5	8	10
Re_m	0.31	0.40	0.33	0.23

Таблица 3.9. Динамика изменения магнитного числа Рейнольдса в оптимизированном ДМГДГ.

электрическую мощность 1.2 ГВт. При этом удельная мощность генератора составляет 400 МВт/м^3. Динамика изменения профиля температуры и давления в канале оптимизированного ДМГДГ представлена на рис. 3.20 – 3.21. Из графиков видно, что по мере движения по каналу ширина T-слоя растет, а температура в нем понижается с $1.6 \cdot 10^4$ до $1.2 \cdot 10^4$ К, давление толкающего газа уменьшается со 170 атм до 80 атм.

С учетом спадающего магнитного поля был рассчитан параметр гидромагнитного взаимодействия R_H, изменение которого по длине канала представлено в таблице 3.8

Уменьшающееся по длине канала магнитное поле обеспечивает почти постоянное по длине канала значение R_H, тогда как для базовой конфигурации МГД-канала с постоянным магнитным полем параметр гидромагнитного взаимодействия увеличивается на длине канала 3.5 м с 4.4 до 6. Стабилизация параметра гидромагнитного взаимодействия приводит к стабилизации скорости T-слоя. Динамика изменения скорости T-слоя отражена на рис. 3.22. Очевидно, что спадающее магнитное поле стабилизирует значение скорости T-слоя и параметра гидромагнитного взаимодействия.

Динамика изменения коэффициента нагрузки и размера T-слоя представлена на рис. 3.23. Среднее значение коэффициента нагрузки 0.6, а эффективный размер T-слоя 0.3 м.

На рис. 3.24.А представлена зависимость давления продуктов сгорания в критическом сечении сопла от времени работы генератора. Видно, что процесс истечения газа из канала завершается к 27 мс. Распределение давления по каналу в этот момент времени показано на рис. 3.24.В Очевидно, что скважность работы генератора (без учета времени наполнения канала горючей смесью) может быть $\simeq 2$.

Поскольку математическая модель создавалась в предположении малости индуцированных магнитных полей, была выполнена оценка магнитного числа Рейнольдса Re_m (2.36) для всех моментов времени, отраженных на рис. 3.20. Результаты расчета представлены в таблице 3.9. Таблица показывает, что магнитное число Рейнольдса Re_m в среднем составляет 0.3, поэтому принятое

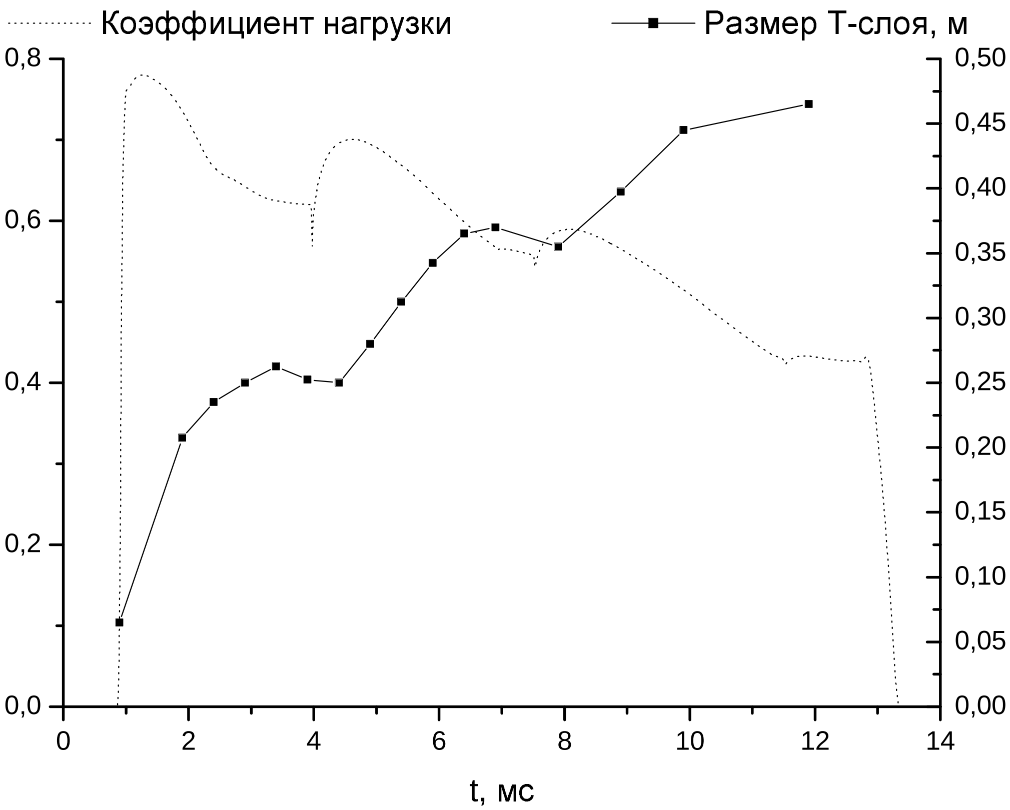


Рис. 3.23. Динамика изменения коэффициента нагрузки и ширины T-слоя в канале оптимизированного ДМГДГ.

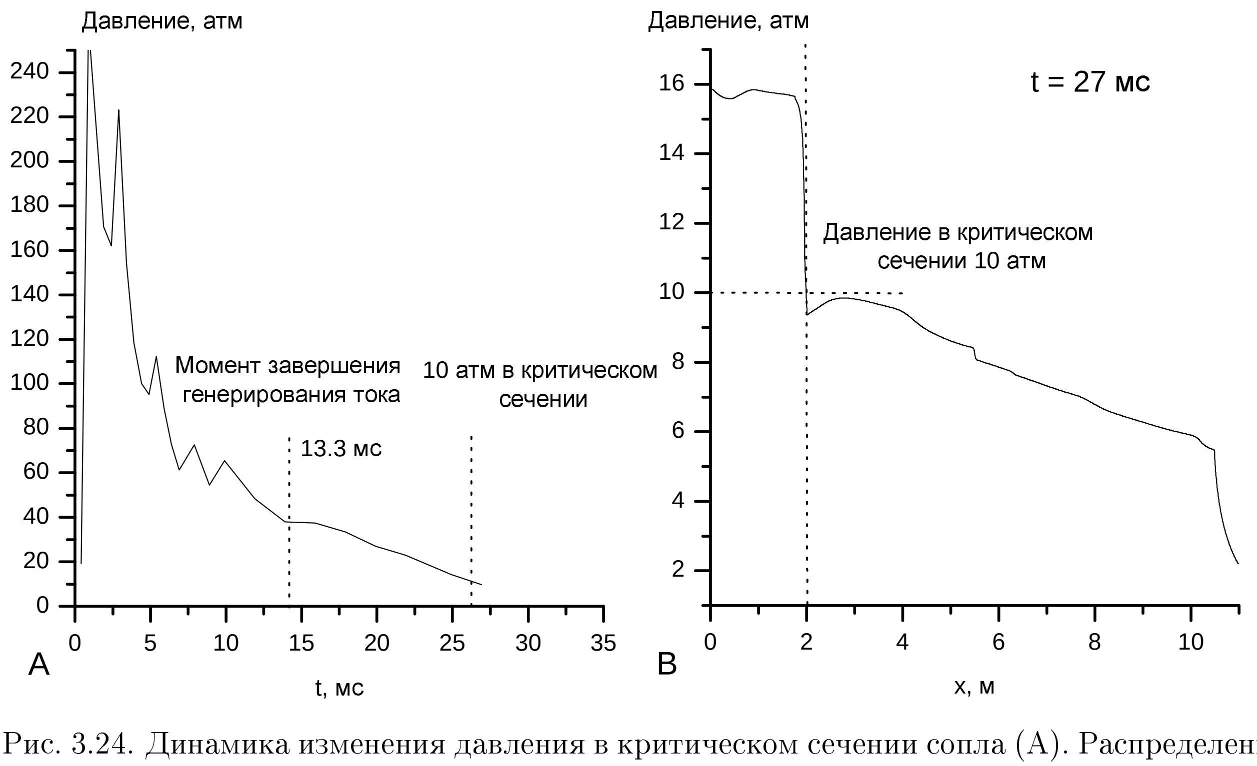


Рис. 3.24. Динамика изменения давления в критическом сечении сопла (A). Распределение давления в канале оптимизированного ДМГДГ (B).

допущение малости магнитных полей в грубом приближении можно считать оправданным.

Результаты вычислительного эксперимента для генератора оптимизированной конфигурации сведены в таблицу 3.10.

E_{rad}, МДж	17	T, мс	12
E_{load}, МДж	49	η, %	10
E_{dis}, МДж	32	$\widetilde{\delta}$, м	≈ 0.35
E_{ini}, МДж	8	W_{he}^{T}, МВтт/м^2	≈ 180
E_{det}, МДж	490	W_{el}, ГВт	≈ 1.4
V_{el}, м^3	10.5	W_V, МВт/м^3	≈ 380

Таблица 3.10. Характеристики оптимизированного ДМГДГ, полученные с использованием термического уравнения состояния политропного газа.

3.5 Оценки проницаемости T-слоя за счет теплопереноса

Ранее в [18] предполагалось, что структура T-слоя стабилизируется, когда выделение энергии за счет джоулевой диссипации компенсирует потери на излучение. Затем в [22] для генератора низкого давления было показано, что имеет место дрейф T-слоя в сторону противоположную действию электродинамической силы. В работе [4] было показано, что структура T-слоя в генераторе высокого давления резко меняется и высокая температура устанавливается в области высокого давления в T-слое.

На рис. 3.7 приведены энергетические характеристики генераторов высокого и низкого давлений. При анализе энергобаланса рассматриваемого генератора высокого давления обнаруживается явное превышение энергии джоулевой диссипации над радиационными энергопотерями. Было сделано предположение, что джоулева диссипация расходуется также на увеличение внутренней энергии T-слоя и на теплообмен с потоком газа. В области высокого давления в T-слое, где устанавливается максимальная температура, идет нагрев толкающего газа, за счет чего увеличивается внутренняя энергия T-слоя. Одновременно на правой границе T-слоя (вниз по потоку) происходит остывание газа за счет значительно большего потока излучения; при этом газ теряет электропроводность и уходит в волну разрежения. Фактически T-слой движется вверх по потоку в сторону электромагнитной силы торможения, и через него протекает часть потока толкающего газа. Для анализа этого явления было рассмотрено изменение энергий диссипации ΔE_{dis}, излучения ΔE_{rad} и внутренней энергии T-слоя ΔE_{layer} за время движения T-слоя по каналу и рассчитана энергия теплообмена за этот период времени:

$$\Delta E_{he} \; = \; \Delta E_{dis} - \Delta E_{rad} - \Delta E_{layer}, \tag{3.1}$$

где

$$\Delta E_{*} \; = \; E_{*}(t_2) - E_{*}(t_1).$$

Движение T-слоя по каналу учитывается с момента стабилизации T-слоя $(t \; = \; t_1)$ до момента достижения правой границей T-слоя конца электродной секции $(t \; = \; t_2)$. Для исключения временной зависимости удобно перейти к рассмотрению мощностей

$$W_{*} = \Delta E_{*}/\Delta t.$$

Полученные результаты приведены в таблице 3.11. Они показывают, что на излучение тратится 45%, на развитие T-слоя (на увеличение его внутренней энергии) — 33%, на теплообмен с потоком толкающего газа — 22% мощности джоулевой диссипации. Энергия джоулевой диссипации, идущая на теплообмен с потоком толкающего газа, характеризует, тем самым, проницаемость плазменного поршня. Оценка плотности тепловой мощности потока через T-слой

	E_{dis}, МДж	E_{rad}, МДж	E_{layer}, МДж	E_{he}, МДж
$t_1 = 2$ мс	1.68	0.01	9.08	
$t_2 = 15$ мс	15.06	6.05	13.55	
ΔE_{*}	13.38	6.04	4.47	2.86
W_{*}, МВт	1029	465	343.8	219
W_{*}/W_{dis}	0.1	0.45	0.33	0.21

Таблица 3.11. Распределение мощности джоулевой диссипации генератора базовой конфигурации.

$$W^{T}_{he} = W_{he}/\tilde{A}, \tag{3.2}$$

где $\tilde{A}$ — среднее сечение канала в области T-слоя за период времени Δt, дает величину 200 МВтт/м^2. В генераторе низкого давления энергия джоулевой диссипации практически совпадает с энергией излучения, а изменения внутренней энергии после инициирования практически не происходит. Обнаружить эффект теплообмена T-слоя с потоком толкающего газа, рассматривая только энергетические зависимости, не удается. По-видимому, величина теплообмена лежит за пределами точности вычислительного эксперимента.

Для более детального анализа энергии теплообмена была рассмотрена динамика изменения энергии излучения, внутренней энергии T-слоя, энергии теплообмена по отношению к энергии диссипации (рис. 3.25). Она показывает, что при движении T-слоя по каналу процентная доля внутренней энергии уменьшается, что говорит о том, что T-слой сформировался. Доля энергии диссипации, идущей на излучение, увеличивается. Доля энергии диссипации, идущей на теплообмен возрастает и достигает $\approx 20\%$ к моменту окончания работы генератора.

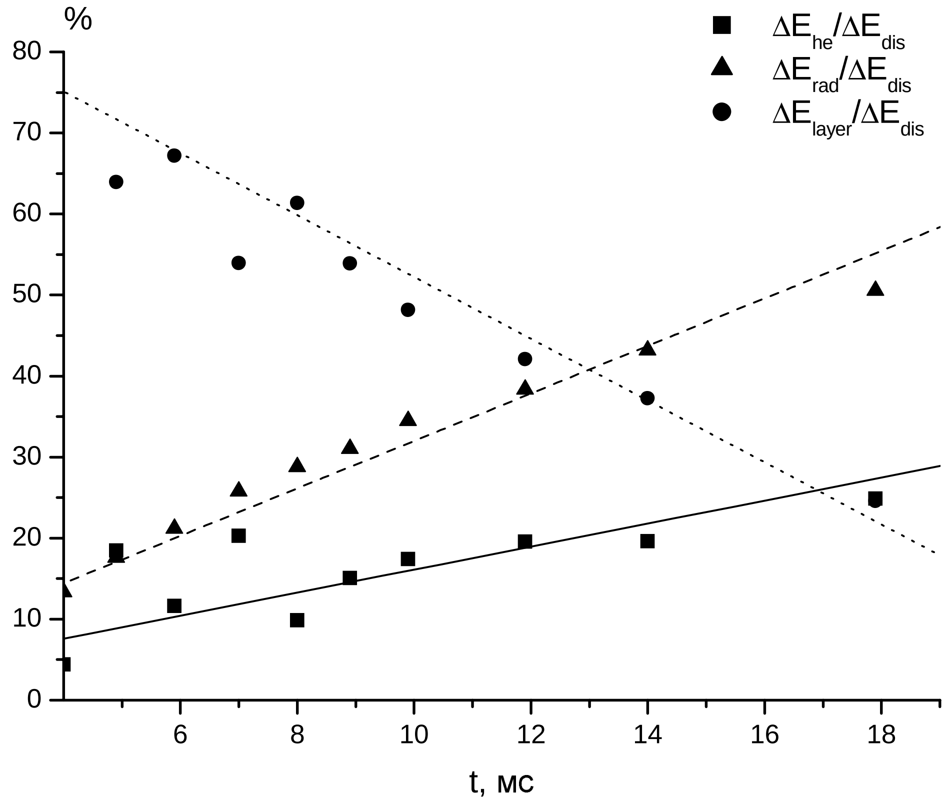


Рис. 3.25. Динамика изменения долей энергии джоулевой диссипации, идущих на изменение внутренней энергии T-слоя, излучения и теплообмена в генераторе базовой конфигурации.

Для канала оптимизированной конфигурации распределение мощности джоулевой диссипации между излучением, внутренней энергии T-слоя и мощностью теплообмена, представлено в таблице 3.12. Мощность теплообмена составляет $\approx 9\%$ от мощности диссипации. Плотность тепловой мощности потока через T-слой $W_{he}^{T} = 180$ МВтт/м^2. Уменьшение плотности мощности теплового потока можно объяснить уменьшением параметра гидромагнит-

	E_{dis}, МДж	E_{rad}, МДж	E_{layer}, МДж	E_{he}, МДж
t = 2 мс	3.09	0.37	6.01	
t = 12 мс	27.71	12.14	16.74	
ΔE	24.62	11.76	10.72	2.13
W_*, МВт	2462	1176	1072	213
W_*/W_{dis}	1	0.47	0.44	0.09

Таблица 3.12. Распределение мощности джоулевой диссипации в генераторе оптимизированной конфигурации.

ного взаимодействия за счет спадающего магнитного поля по сравнению с каналом базовой конфигурации.

3.6 Приближенные расчеты для случая реального газа

Во всех проведенных вычислительных экспериментах в качестве уравнений состояния использовались калорическое уравнение состояния реального газа и термическое уравнение политропного газа с постоянным показателем адиабаты. Переход к термическому уравнению состояния реального газа представляет определенные сложности, поскольку для этого требуются табличные зависимости температуры и давления от внутренней энергии и плотности, рассчитанные с более высокой точностью, чем это позволяет имеющееся программное обеспечение (пакет программ MONSTR).

Для получения оценки влияния зависимости теплоемкости рабочего газа от температуры на характеристики ДМГДГ было использовано приближенное термическое уравнение состояния, созданное на основе анализа термодинамических свойств реального газа (см. раздел 2.4). Такое приближение позволяет правильно отразить характерное изменение показателя адиабаты в диапазоне температур и давлений, характерных для ДМГДГ. С использованием указанного уравнения состояния был проведен вычислительный эксперимент для канала оптимизированной конфигурации (таблица 3.7). Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблице 3.13.

На рис. 3.26 представлена динамика изменения энергетических характеристик ДМГДГ для случая реального газа. Для сравнения здесь же представлены характеристики генератора с теми же параметрами для случая политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.25$. Распределение показателя адиабаты в области T-слоя показано на рис. 3.27. Для определенности здесь же приведен профиль температуры и распределение молекулярного веса.

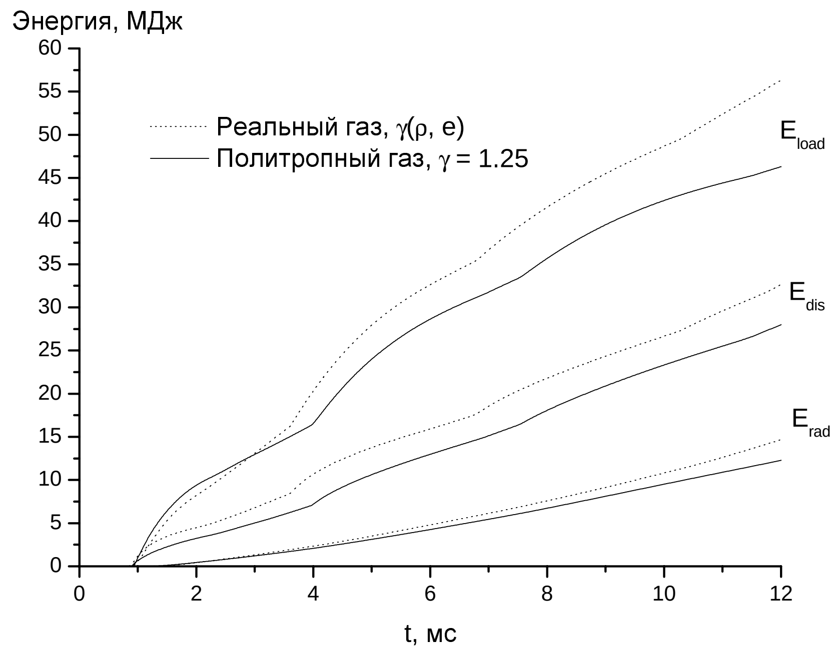


Рис. 3.26. Энергетические характеристики оптимизированного ДМГДГ для случаев реального и политропного ($\gamma = 1.25$) газов.

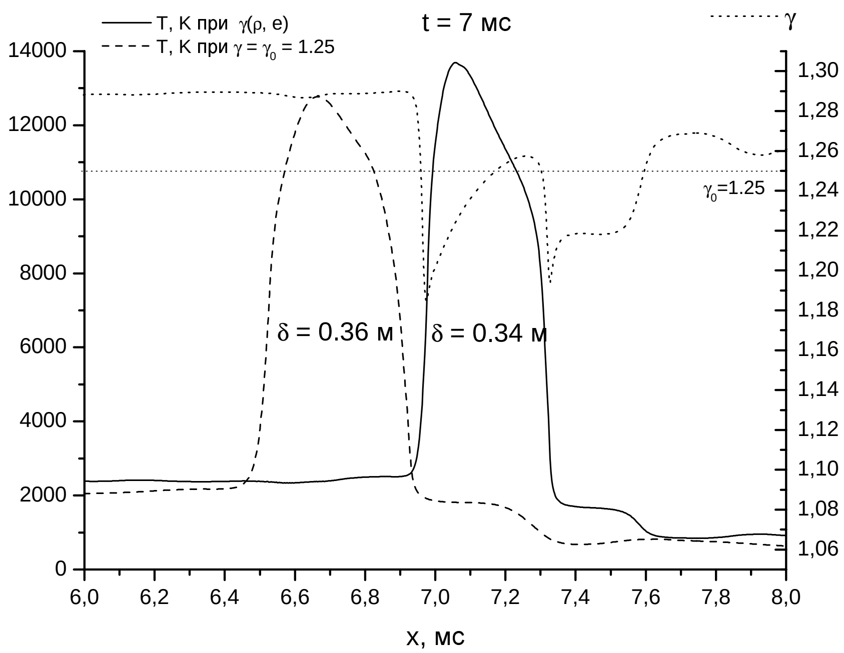


Рис. 3.27. Температурный профиль T-слоя и распределение γ T-слое в канале оптимизированного ДМГДГ для случаев реального и политропного ($\gamma_0 = 1.25$) газа.

E_{rad}, МДж	17	T, мс	12
E_{load}, МДж	57	η, %	12
E_{dis}, МДж	36	$\widetilde{\delta}$, м	≈ 0.3
E_{ini}, МДж	8	W^T_{he}, МВтт/м^2	≈ 200
E_{det}, МДж	400	W_{el}, ГВт	≈ 1.4
V_{el}, м^3	10.5	W_V, МВт/м^3	≈ 470

Таблица 3.13. Характеристики оптимизированного ДМГДГ для случая реального газа.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что сильные изменения показателя адиабаты на границах T-слоя слабо влияют на энергетические характеристики ДМГДГ. Поэтому применение в расчетах уравнения состояния политропного газа можно считать оправданным. Использованное значение показателя адиабаты $\gamma = 1.25$ в оптимизированном генераторе, как показывает сравнение энергетических характеристик, оказалось даже заниженным. В этом смысле полученные для оптимизированного генератора результаты можно считать оценкой «снизу».

3.7 ДМГДГ как источник энергии и тяги на борту ГЛА

В последние годы в России и за рубежом ведутся активные исследования по разработке перспективного гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА) [129, 130, 131]. Значительное внимание уделяется задаче активного управления обтеканием тел посредством энергетического и силового воздействия на набегающий поток, в частности, посредством подвода тепла перед телом в сверхзвуковом потоке газа. Фактически предлагается часть топлива на борту ГЛА тратить не на увеличение тяги, а на создание «теплового коридора» перед летательным аппаратом (рис. 3.28). Уменьшение плотности набегающего потока приводит к снижению лобового сопротивления и может обеспечить существенное снижение энергетических затрат.

Подробно данный вопрос рассмотрен в работе [129]. Авторами сформулированы критерии эффективности подвода энергии в сверхзвуковом потоке перед летательным аппаратом: для получения «значимого эффекта экономии топлива» на получение энергии для нагрева газа необходимо тратить $\sim 40\%$ топлива. Оценки показали[1], что для такого прогрева на борту ГЛА требуется источник энергии с непрерывной мощностью ~ 0.5 ГВт. Коэффициент преобразования энергии топлива в электрическую мощность в таком

[1]Расчеты проведены А.Ф. Латыповым, ИТПМ СО РАН.

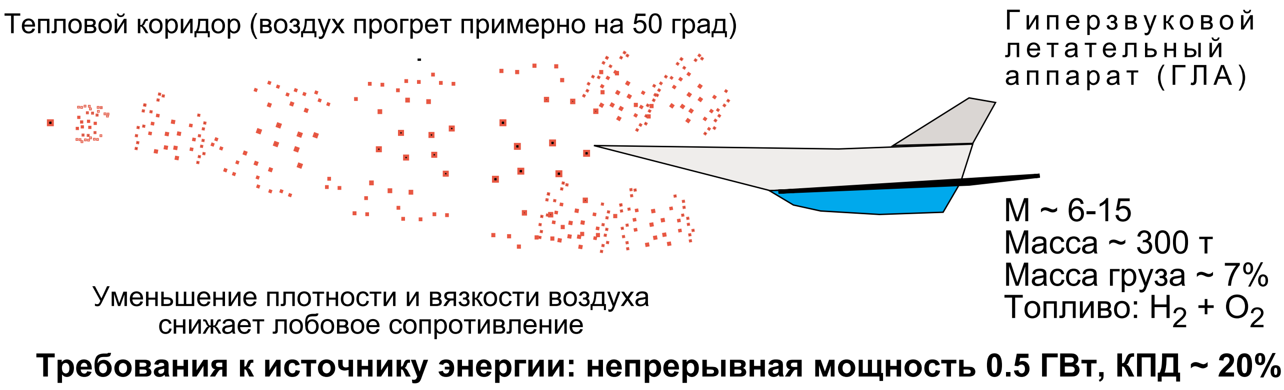


Рис. 3.28. Схема полета ГЛА.

источнике должен составлять $\sim$ 20%, т.к. «при меньших значениях такое управление обтеканием мало эффективно» [129]. Дополнительными требованиями к источнику являются малые габариты и использование в качестве топлива кислородно-водородной смеси.

Учитывая перечисленные требования к источнику энергии на борту ГЛА, имеет смысл рассматривать детонационный МГД-генератор как вариант такого источника. ДМГДГ работает на кислородно-водородной смеси, имеет сравнительно малые габариты (объем канала $\simeq$ 3 м^3). Расчетные значения мощности ДМГДГ составляют $\sim$ 1 ГВт (таблица 3.13); при скважности $\simeq$ 2 этого достаточно, чтобы обеспечить необходимые 0.5 ГВт непрерывной мощности.

Следует отметить, что в процессе работы ДМГДГ из диффузора выходит сверхзвуковой поток газа. Поэтому ДМГДГ можно рассматривать не только как источник энергии, но и как источник дополнительной тяги.

3.8 Экспериментальная проверка вычислительной модели

Экспериментальная проверка модели ДМГДГ может быть осуществлена, по крайней мере, на двух экспериментальных установках. В Институте гидродинамики СО РАН, в лаборатории М.Е. Топчияна имеется детонационная труба с МГД-каналом. Схема установки представлена на рис. 3.29. В Институте вычислительного моделирования СО РАН в лаборатории Магнитной газодинамики имеется модель МГД-генератора с T-слоем, которая может быть использована для создания модели ДМГДГ. Схема этой установки приведена на рис. 3.30.

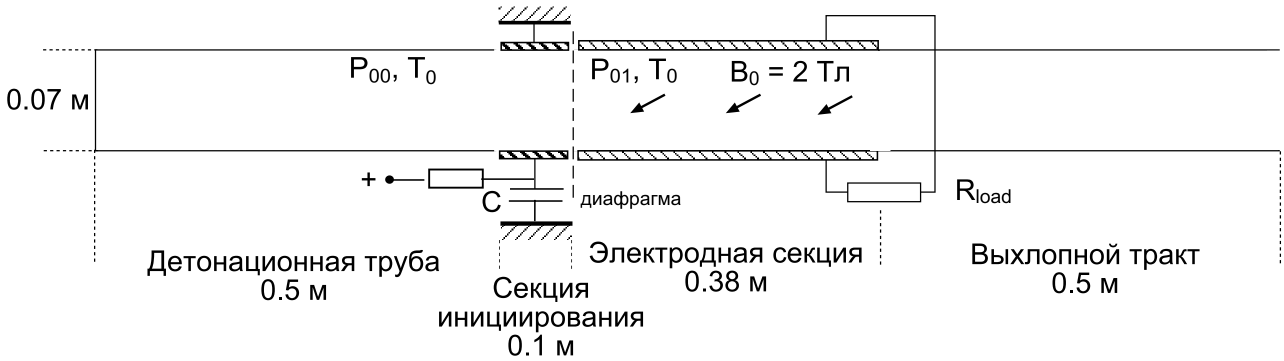


Рис. 3.29. Схема экспериментальной установки ИГ СО РАН.

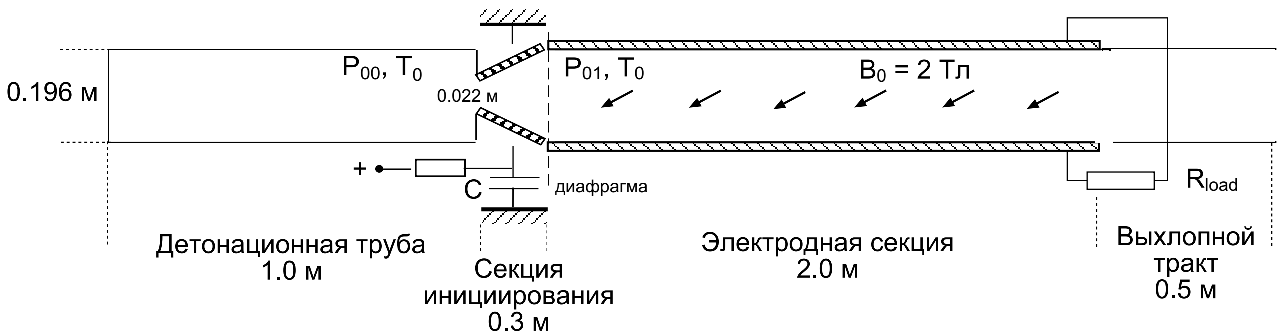


Рис. 3.30. Схема экспериментальной установки ИВМ СО РАН.

Естественно, что рассчитывать на проведение экспериментов с запиранием излучения в T-слое при высоких давлениях в канале пока не приходится. Это связано не столько с возможностью получения таких давлений и построением МГД-канала с необходимой прочностью, сколько с возможностью создания сильных магнитных полей ($\geq$ 5 Тл). В настоящее время на существующих экспериментальных установках магнитное поле не превышает 2 Тл. Поэтому проверка может быть осуществлена только при низких давлениях в потоке газа в режиме объемного излучения из T-слоя.

Для указанных экспериментальных установок были проведены вычислительные эксперименты, параметры которых представлены в таблице 3.14. Для задания разных давлений продуктов сгорания и горючей смеси в установках должна быть использована легко уничтожаемая диафрагма, разделяющая газы перед экспериментом.

	ИГ СО РАН	ИВМ СО РАН
Длина детонационной трубы, м	0.5	1
Высота детонационной трубы, м	0.07	0.196
Длина секции инициирования, м	0.1	0.3
Высота критического сечения сопла, м	0.07	0.022
Длина электродной секции, м	0.38	2.0
Длина выхлопного тракта, м	0.5	0.5
Ширина канала, м	0.035	0.04
Магнитное поле, Тл	2	2
Горючая смесь, Тл	кислородно-водородная	
Начальное давление горючей смеси P_{00}, атм	1	1
Начальное давление продуктов сгорания P_{01}, атм	0.1	0.1
Начальная температура рабочего газа T_0, К	293	293
Энергия инициирования, Дж	525	400
Время инициирования, мкс	100	100
Показатель адиабаты	1.25	1.25
Сопротивление нагрузки R_{load}, Ом	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3.14. Параметры экспериментальных установок ИГ СО РАН и ИВМ СО РАН в вычислительных экспериментах.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов приведены на рис. 3.31 – 3.32. Они показывают, что при заданных параметрах процесс взаимодействия T-слоя с магнитным полем осуществляется в обоих случаях. В экспериментах могут быть зарегистрированы:

1. величина и динамика изменения тока на нагрузке;
2. полная энергия, выделившаяся на нагрузке;
3. перепад давления в T-слое;
4. скорость движения T-слоя по каналу;
5. распределение температуры (может быть оценено косвенным образом по определению интегральной светимости T-слоя).

Сопоставление экспериментальных результатов с расчетными может свидетельствовать о точности вычислительной модели и справедливости принятых допущений.

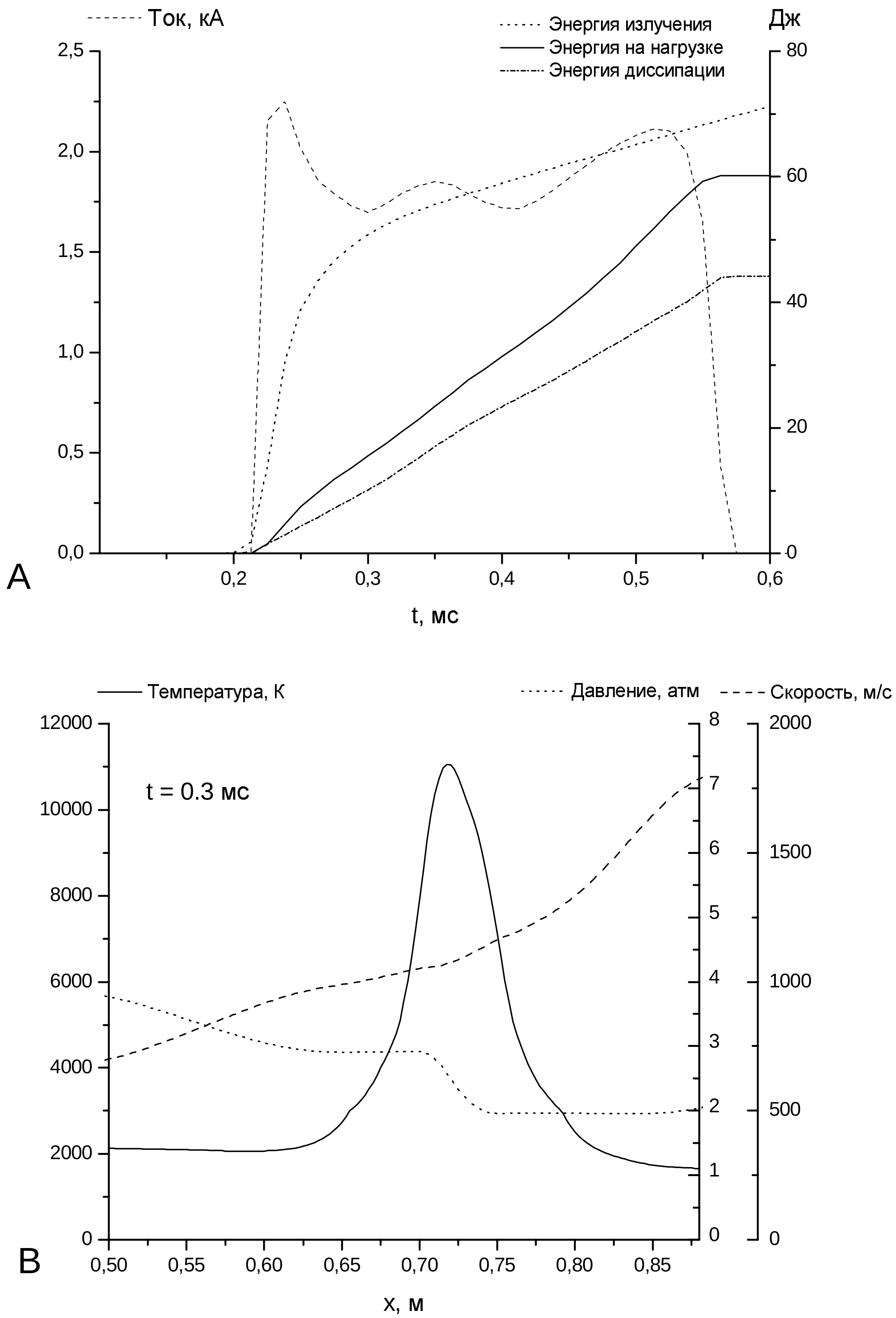


Рис. 3.31. Расчетные характеристики экспериментальной установки ИГ СО РАН.

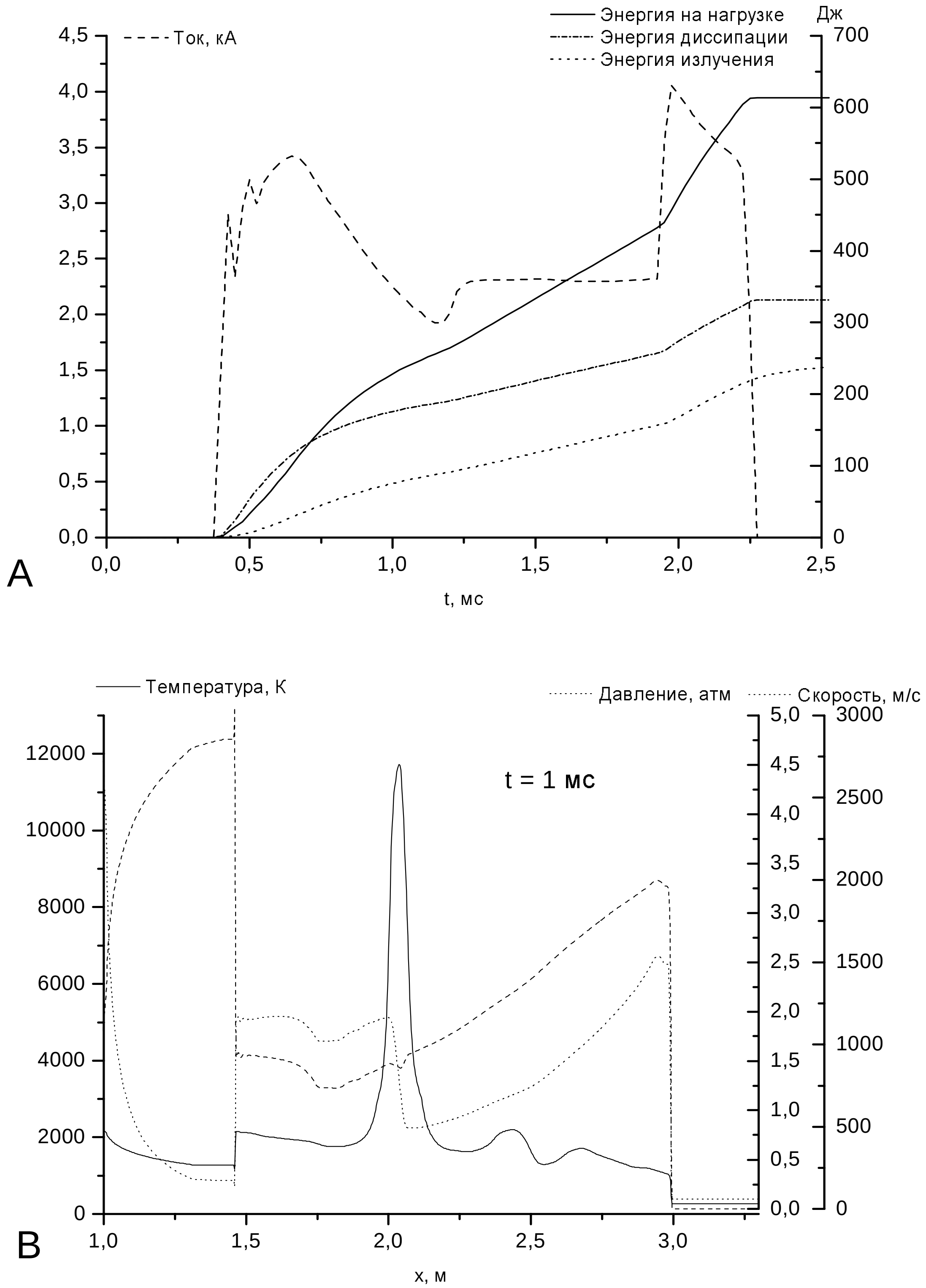


Рис. 3.32. Расчетные характеристики экспериментальной установки ИВМ СО РАН.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Разработана вычислительная модель детонационного МГД-генератора с T-слоем, в квазиодномерном приближении, в предположении локального термодинамического равновесия, без учета индуцированных магнитных полей. В основу модели положена нестационарная система уравнений газодинамики невязкого газа в канале переменного сечения с учетом детонационного горения, радиационного переноса, инициирования T-слоя, взаимодействия T-слоя с магнитным полем. Для решения системы уравнений газодинамики использовались нелинейные монотонные численные методы класса TVD и WENO второго порядка точности по времени и по пространству.

2. Разработан комплекс программ, включающий: основную расчетную программу для проведения вычислительных экспериментов на модели детонационного МГД-генератора, программу для проведения тестирования моделей радиационного переноса, программу для проведения тестирования методов газодинамики, программу обработки насчитанных в процессе вычислительного эксперимента данных, пакет программ для подготовки таблиц свойств рабочих газов, используемых в расчетах, на основе данных, полученных с помощью программы MONSTR (ИПМ РАН).

3. На основе проведенных вычислительных экспериментов показана принципиальная работоспособность схемы ДМГДГ и установлено, что повышение давления в канале приводит к существенным изменениям параметров T-слоя и к значительному возрастанию энергетических характеристик генератора. Получены следующие оценки энергетических характеристик ДМГДГ: КПД $\approx 10\%$, мощность ≈ 1.4 ГВт, удельная мощность ≈ 380 МВт/м^3.

4. Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил получить оценку величины теплообмена T-слоя с потоком толкающего газа. Показано, что на теплообмен с потоком газа тратится $\approx 10-20\%$ мощности джоулевой диссипации. Эта часть мощности фактически характеризует проницаемость плазменного поршня, от которой зависят энергетические характеристики ДМГДГ. Оценка характерной плотности тепловой мощности потока через T-слой дает величину 200 МВт/м^2.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Подстрочные индексы:

$layer$	T-слой
rad	излучение
dis	диссипация
det	детонация, детонационная секция
int	интегральный
$load$	нагрузка
ini	инициирование
out	выходящий через диффузор
he	теплообмен T-слоя с потоком толкающего газа
mix	смесь
el	электрический, электродная секция

Основные обозначения:

	Название	**Размерность**	**Формула**
ρ	плотность	кг/м^3	
u	скорость	м/с	
P	давление	Па, атм	
T	температура	К	
V	объем	м^3	
c	скорость звука	м/с	
e	внутренняя энергия	Дж/м^3	
E	полная энергия	Дж/м^3	(2.3)
h	энтальпия	Дж/кг	

	Название	**Размерность**	**Формула**
B	ненулевая компонента вектора индукции магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B)$	Тл	
$\mathcal{E}$	ненулевая компонента вектора напряженности электрического поля $\vec{\mathcal{E}} = (0, \mathcal{E}, 0)$	В/м	
j	ненулевая компонента плотности тока $\vec{j} = (0, j, 0)$	А /м^2	
S	энтропия	Дж/(кг К)	
m	момент импульса	м/с	(2.4)
Q	мощность источников и стоков энергии	Дж/(м^3 с)	
R	сопротивление	Ом	
H	энтальпия	Дж/м^3	(A.7)
M	число Маха		(A.7)
J	ток	А	
U	напряжение	В	
	Характеристики ДМГДГ		
T	полное время работы генератора	с	
$\tilde{\delta}$	характерный размер T-слоя	м	
W_{el}	электрическая мощность генератора	Вт	(2.32)
W_{he}^T	плотность мощности теплового потока сквозь T-слой	Втт/м^2	(3.2)
W_V	удельная мощность генератора	Вт/м^3	(2.33)
η	КПД генератора		(2.34)
E_{he}	энергия теплообмена T-слоя с потоком толкающего газа	Дж	(3.1)
δ	размер токового слоя	м	
	Свойства газа		
μ	молекулярный вес	кг/кмоль	
γ	показатель адиабаты		
c_v	теплоемкость при постоянном объеме		
C_v	молекулярная теплоемкость при постоянном объеме	кДж/(кг град)	

	Название	Размерность	Формула
c_p	теплоемкость при постоянном давлении		
C_p	молекулярная теплоемкость при постоянном давлении	кДж/(кг град)	
$\mathcal{R}$	газовая постоянная	Дж / кг К	
σ	электропроводность	Ом$^{-1}$·м$^{-1}$	
	Геометрические характеристики		
A	сечение канала	м^2	
A_y	высота канала	м	
A_z	ширина канала	м	
L_d	длина генератора	м	
L_{el}	длина электродной секции	м	
L_{det}	длина детонационной секции	м	
L_{df}	длина диффузора	м	
L_{noz}	длина сопла	м	
α_{el}	угол раскрыва электродной секции по одному электроду	град	
A_c	высота канала в критическом сечении	м	
A_{df}	высота на выходе из диффузора	м	
A_{det}	высота детонационной секции	м	
	Радиационные характеристики		
I	спектральная интенсивность излучения	Вт с/(м^2 ср)	
I^r	спектральная интенсивность равновесного излучения	Вт с/(м^2 ср)	(2.9)
ν	частота излучения	м$^{-1}$	
$\hat{\mu}$	косинус угла между направлением движения фотона и осью x		(2.15)
χ	коэффициент поглощения поправленный на вынужденное излучение	м$^{-1}$	
U	плотность спектральной энергии	Дж с/м^3	(2.11)
U^r	равновесная плотность спектральной энергии	Дж с/м^3	(2.7)
H	плотность спектрального потока	Дж с/м^2	(2.11)

	Название	Размерность	Формула
	Характеристики детонации		
D	скорость детонационной волны	м/с	(A.17)
q	тепловой эффект реакции на единицу массы	Дж/(кг смеси)	(2.29)
	Параметры модели инициирования T-слоя		
E_{ini}	энергия затраченная на инициирование T-слоя	Дж	(2.31)
τ_{ini}	время инициирования	с	
Δ_{ini}	размер зоны инициирования	м	
Δx_{ini}	расстояние начального положения центра зоны инициирования от начала электродной секции	м	

Константы

	Название	Значение	Размерность
c	скорость света в вакууме	$2.997925 \cdot 10^8$	м $с^{-1}$
σ_{S-B}	постоянная Стефана-Больцмана	$5.6697 \cdot 10^{-8}$	вт $м^{-2}K^{-4}$
$\mathcal{R}$,	универсальная газовая постоянная	$8.3143 \cdot 10^3$	Дж $K^{-1}кмоль^{-1}$
h	постоянная Планка	$6.6256 \cdot 10^{-34}$	дж сек
μ_0	магнитная постоянная	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Гн/м
kk	постоянная Больцмана	1.3805410^{-23}	Дж K^{-1}

Литература

[1] Импульсные МГД-преобразователи химической энергии в электрическую / Э.И. Асиновский, В.А. Зейгарник, Е.Ф. Лебедев и др.; Под ред. А.Е. Шейндлина и В.Е. Фортова. М.: Энергоатомиздат, 1997. – 272 с.

[2] Заседание, посвященное М. Фарадею. 16.09.83. //Восьмая международная конференция по МГД-преобразованию энергии. Москва, 12-18 сентября 1983 г. – М., 1984. – Т. 7. – С. 39-45.

[3] Vasilyev E.N., Derevyanko V.A., Ovchinnikov V.V. Radiation Characterisitcs and Structure of Current Layer in MHD Channel // 10th International Conference on MHD Electric Power Generation. – Dec 4-8. – 1989.

[4] Васильев Е.Н. Формирование токового слоя в условиях радиационного теплообмена при высоком давлении // Изв. СО АН СССР. – 1990. – Вып. 1. – С. 94-97.

[5] Янтовский Е.И., Толмач М.И. Магнитогидродинамические генераторы. – М.: Наука, 1972. – 423 с.

[6] Ватажин В.А., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. – М.: Наука, 1970. – 672 с.

[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // ДАН СССР, 1968. – Т. 173, – № 4.

[8] Рикато П., Зетвоог П. МГД-генератор с неоднородным потоком рабочего газа // Прикладная магнитная гидродинамика. Под ред. А.В. Губарева. – М.: Мир, 1965. – С. 93-109

[9] Фрайденрайх Н., Медин С.А., Тринг М.В. Возможности МГД-генератора со «слоевым»потоком рабочего тела // Магнитогидродинамические преобразователи энергии. Под ред. В.А. Попова. – М.: ВИНИТИ, 1966. – Ч. I. – С. 425-438

[10] Васильев Е.Н. Математическое моделирование МГД-взаимодействия самоподдерживающегося токового слоя с неэлектропроводным газовым потоком. Диссертация канд. физ-мат. наук. – Красноярск, 1986. – 160 с.

[11] Гриднев Н.П., Кацнельсон С.С., Фомичев В.П. Неоднородные МГД-течения с Т-слоем. – Новосибирск: Наука, 1984. – 176 с.

[12] Derevyanko V.A., Gavrilov V.M., Vasilyev E.N. et al. Experimental Investigations of Selfmaintained Current Layer in MHD Channel // Proc 9th International Conference on MHD Electric Power Generation. Tsukuba, Japan – Nov 17-21. – 1986. – V. 4. – P. 1685.

[13] Veefkind A., Merck W.F.H., Bajovic V.S. et al. Basic Characteristics of Hot Nonuniformities as Gaseous Conductors in MHD Generators // Proc. 32nd SEAM, Pittsburgh, – June 27-30, – 1994.

[14] Иванов В.А., Битюрин В.А., Вифкинд А., Мерк В.Г., Байович В.С. Численное исследование эволюции токонесущего сгустка на МГД-установке с ударной трубой // ТВТ, 1993. – Т. 31. – № 6. – С. 988-994.

[15] Битюрин В.А., Иванов В.А., Вифкинд А. Исследование эволюции токонесущего плазменного сгустка и особенностей течения в экспериментальном МГД-генераторе с ударной трубой // ТВТ, 1995. – Т. 33. – № 5. – С. 782-794.

[16] Поздняков Г.А. Экспериментальное исследование T-слоя в модели дискового МГД-генератора на аргоне и парах натрия. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ-мат. наук. – Новосибирск, 1997. – 16 с.

[17] Е.Н. Васильев, В.М. Гаврилов, В.А. Деревянко, В.С. Славин. Экспериментальное исследование токового слоя в МГД-канале. – Новосибирск, 1986. – 20 с. – (Препринт ИТПМ СО АН СССР, № 19-86)

[18] Васильев Е.Н., Деревянко В.А., Славин В.С. Стабилизированный токовый слой // ТВТ. – 1986. – № 5. – С. 844-851

[19] Васильев Е.Н., Деревянко В.А. Об эффективности МГД-генератора с T-слоем, использующего рабочий газ аргон. – Красноярск, 1990. – 27 с. (Препринт ВЦ СО АН СССР, № 19).

[20] Vasilyev E.N., Derevyanko V.V., Ovchinnikov V.V., Seredkina V.V. Thermophysical model of MHD-generator with T-layer // XI Inter. Confer. On MHD Elec. Power. Gener. – Beijing. – China. – 1992.

[21] Словецкий Д.И. Исследование температуры и формы поперечного сечения столба электрической дуги, движущейся в магнитном поле по параллельным электродам // ТВТ, 1967. – Т. 5. – № 3. – С. 401-409.

[22] Васильев Е.Н., Славин В.С., Ткаченко П.П. Эффект «скольжения»разряда, стабилизированного стенками магнитогазодинамического канала // ЖПМТФ. – 1988. – т.4. – С. 10-16.

[23] Божков А.Р., Зелинский Н.И., Мушаилова С.Э. Численное исследование процессов в МГД-канале с токовым слоем // ТВТ, 1989. – Т. 27. – № 6. – С. 1199-1205

[24] Veefkind A. The nonequilibrium condition in noble gas MHD generators // Physics today, 1980. – V. 22. – P 65-74.

[25] Божков А.Р., Зелинский Н.И., Славин В.С. МГД-генератор замкнутого цикла, использующий неравновесные самоподдерживающиея токовые слои // МГД-технологии в энергетике: Сб. науч. тр. Под ред. Ю.П. Корчевой; Ин-т пробл. энергосбережения. – Киев: ИПЭ, 1990. – С. 6-9.

[26] Славин В.С., Лобасова М.С. Неоднородный газоплазменный поток инертного газа в канале МГД-генератора. // ТВТ, 1998. – Т. 36. – № 4. – С. 647-654.

[27] Lin B.C., Lineberry J.T. An assessmet of T-layer MHD // AIAA Pap., 1994. – № 1933. – P. 1-22

[28] Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1975. – 180.

[29] Бакланов Д.И., Жимерин Д.Г., Киселев Ю.Н., Миронов Э.А., Попов В.А. О некоторых технических аспектах использования детонационного режима сгорания // ФГВ. – 1976. – Т. 1 – № 12. – С. 47-52.

[30] Кулиев С.Н., Миллер К.И., Славин В.С. Моделирование слоистого течения в МГД-канале // Моделирование теплофизических процессов: Межвуз. сб. КрасГУ. – Красноярск: КрасГУ, 1989. – С. 65-75.

[31] Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. – М.: Мир, 1968. – 492 с.

[32] Деревянко В.А., Славин В.С., Соколов В.С. Магнитогидродинамический генератор электроэнергии на продуктах газификации бурых углей // ПМТФ. – 1980. – № 5. – С. 129-137.

[33] Структура стабилизированного T-слоя / Овчинников В.В., Славин В.С. – В кн.: МГД-генераторы и термоэлектрическая энергетика: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983. – С. 34-40.

[34] Овчинников В.В., Славин В.С. Локальный анализ МГД-генератора с T-слоем // ПМТФ. – 1983. – № 4. – С. 26-34.

[35] Овчинников В.В., Славин В.С. Расчет структуры самоподдерживающегося токового слоя в канале МГД генератора, 1983. – (Препринт ИТПМ СО РАН СССР, № 31-83)

[36] Овчинников В.В., Славин В.С. Расчет структуры самоподдерживающегося токового слоя в канале МГД-генератора // Новосибирск, 1983. – 22 с. – (Препринт ИТПМ СО АН СССР, № 31-83)

[37] Зелинский Н.И., Сапожников В.А., Славин В.С. Моделирование периодического режима работы МГД-генератора с T-слоем на основе одномерной газодинамической модели //Теплофизиеские проблемы прямого преобразования теплоты в электроэнергию: Сб. науч. тр. Под ред. Щеголева Г.М. – Киев: Наук. думка, 1984. – 192 с.

[38] Васильев Е.Н., Деревянко В.А., Мирау А.Н. МГД-управление потоком газа в тракте ГПВРД. // 3-е совещание по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро- космических приложениях (Москва, 24-26 апр. 2001). – в печати.

[39] Boris J.P., Book D.L. Solution of the Continuity Equation by the Method of Flux-Corrected Transport // Methods in Computational Physics, 1976. – № 16, P. 85-129.

[40] Арделян Н.В., Чувашев С.Н., Янгулова Т.Н., Осташев В.Е. Эффект магнитогазодинамического шунтирования магнитотоковых структур с токовым слоем. Нелинейная стадия // ТВТ, 1996. – Т. 34. – № 3. – С. 474-479.

[41] Borghi C.A., Cristofolini A., Ribani P.L. Analysis of magneto-plasma dynamic transients n a combustion gas magnetohydrodynamic generator // Phys. Plasm. 1997. – vol. 4. – № 8. – P. 3082-3089.

[42] Borghi C.A., Ribani P.L. Analysis of real gas effects in an MHD generator with STCC nonuniformities. // IEEE Trans. Plasma Sci., 1997. – vol. 25. – № 5. – P. 1136-1143.

[43] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

[44] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука, 1966. – 688 с.

[45] Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 660 с.

[46] Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер П. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. — М.: Мир, 1990. — 728 с.

[47] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах. – М.: Мир, 1991. – 2. 552 с.

[48] Пинчуков В.И., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. – Новосибирск.: Изд. СО РАН, 2000. – 232 с.

[49] Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990. – 230 с.

[50] Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure. Appl. Math, 1960. – V. 13. – № 2. – P. 217-237.

[51] Sjogreen B. Course of lectures // http://www.nada.kth.se/ bjorns

[52] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб., 1959. – № 47. – С. 271-306.

[53] Boris J.P., Book D.L. Flux-Corrected Transport I: SHASTA, A Fluid Transport Algorithm that Works // JCP, 1973. – V. 11, P. 38-69.

[54] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. A new approach to numerical convection // JCP, 1977. – V. 23. – P. 276-298.

[55] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // JCP, 1983. – V. 49. – P. 357-393.

[56] Godunov S.K. Reminiscence about Difference Schemes // JCP, 1999. – V. 153. – P. 6-25

[57] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 668 с.

[58] Huyhn H.T. Accurate upwind methods for the Euler equations // SIAM J. Numer. Anal, 1995. – № 32. – P. 1565-1618.

[59] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme: V. A second-order sequel to Godunov's method // JCP, 1979. – V. 32. – P. 101-136.

[60] В.П. Колган. Применение приципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ, 1972. – Т. 3. – № 6. – С. 68-77.

[61] Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of twodimensional fluids flow with strong shocks // JCP, 1984. – V. 54. – № 2. – p. 115-173.

[62] Suresh A., Huynh H.T. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping // JCP, 1997. – V. 136. – P. 83-99.

[63] B. van Leer. Monotonicity and conservation combined in second order schemes // JCP, 1974. – V. 14. – № 4. – P.361-370.

[64] Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Number. Anal, 1984. – V. 21. – P. 995-1011.

[65] Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarty S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III // JCP, 1987. – V. 71. – P. 231-303.

[66] Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes, I // SIAM J. Numer. Anal., 1987. – V.24. – P. 279-309.

[67] Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes // JCP, 1994. – V. 115. – P. 200-212.

[68] Jiang G., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // JCP, 1996. – V. 126. – P. 202-208.

[69] Harten A. ENO schemes with subcell resolution // JCP, 1989. – V. 83. – P. 148-184.

[70] Yang H. An artifical compression method for ENO schemes: The slpe modification method // JCP, 1990. – V. 54. – P. 115-173.

[71] Mao D.-K. A treatment of discontinuities in shock-capturing finite difference methods // JCP, 1991. – V. 92. – P. 422-455.

[72] Balsara D.S., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // JCP, 2000. – V. 160. – P. 405-452.

[73] Engquist B., Osher S. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Math. Comp., 1981. – V. 36. – P.321-351.

[74] Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // JCP, 1981. – V. 43. – № 2. – P. 357-372.

[75] Sanders R.H., Prendergast K.H. The possible relation of the 3-kiloparsec arm to explosions, 1974. – Astropys. J., № 188. – P. 489-500.

[76] Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods // JCP, 1981. – V. 40. – P. 263-293.

[77] Roe P.L. Characteristic-base schemes for the Euler equations //Ann. Rev. Fluid Mech, 1986. – № 18. – P.337-365.

[78] Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // JCP, 1988. – V. 77. – P. 439-471.

[79] Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes // Mathematics of Computation, 1998. – V. 67. – P. 73-85.

[80] Lax P.D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure. Appl. Math, 1964. – № 17. – P. 381-398.

[81] Shen J.W., Zhong X. Semi-Implicit Range-Kutta schemes for non-autonomous differential equations in reactive flow computations // AIAA Paper, 1996. – №. 96-1969. – P. 1-11.

[82] Mottura L, Vigevano L, Zaccanti M. An evaluation of Roe's schemes generalizations for equilibrium real gas flows // JCP, 1997. – V. 138. – P. 354-399.

[83] Vinokur M., Montagne' L. Generalized flux-vector splitting and Roe average for an equilibrium real gas // JCP, 1990. – V. 89. – P. 276-301.

[84] Liou M.S., van Leer B., Shuen J.-S. Spliting of inviscid fluxes for real gas // JCP, 1990. – V. 84. – P. 1-24

[85] Cox C.F., Cinnella P. General solution procedure for flows in local chemical equilibrium // AIAA Journal, 1994. – V. 32. – № 3. – P. 519-527.

[86] Colella P., Glaz H.M. Efficient solution algorithms for the Riemann problem for real gasess // JCP, 1985. – V. 59. – P. 264-289.

[87] Montagne J.-L., Yee H.C., Vinokur M. Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas // AIAA Journal, 1989. – V. 27. – P. 1332-1346.

[88] Liu Y., Vinokur M. Nonequilibrium flow computations. I. An analysis of numerical formulations of coservation laws // JCP, 1989. – V. 83. – P. 373-397.

[89] Jenny P., Müller B, Thomann H. Correction of conservative Euler solvers for gas mixtures //JCP, 1997. – V. 132. – P. 91-107.

[90] Coquel F., Perthame B. Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics equations // SIAM J. Numer. Anal., 1998. – V. 35. – № 6. – P. 2223-2249.

[91] In A. Numerical evaluation of an energy relaxation method for inviscid real fluids // SIAM Journal on Scientific Computing, V 21. – No. 1. – P. 340-365.

[92] Montarnal P., Shu C.-W. Real gas computation using an energy relaxation method and high order WENO schemes // JCP, 1999. – V. 148. – P. 59-80.

[93] Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985. – 304 с.

[94] Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А. Динамика ионизованного излучающего газа. М.: Изд. МГУ, 1989. – 310 с.

[95] Теплообмен излучением: Справочник / А.Г. Блох, Ю.А. Журавлев, Л.Н. Рыжков. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.

[96] Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976. – С. 496.

[97] Немчинов И.В. Об осредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач // ПММ. – 1970. – Т. 34. – вып. 4. – С. 706-721.

[98] Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. Теория детонации. – М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. – 266 с.

[99] Нетлетон М. Детонация в газах. – М.: Мир, 1989. – 278 с.

[100] Солоухин Р.И. Ударные волны и детонация в газах. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 176 с.

[101] Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1971. – 856 с.

[102] Баум Ф.А. и др. Физика взрыва / Баум Ф.А., Станюкович К.П., Шехтер Б.И. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 800 с.

[103] Фомин А.П., Троцюк А.В. Приближенный расчет изэнтропы химически равновесного газа //ФГВ. – 1995. – Т. 31. – № 4. – С. 59-62.

[104] Николаев Ю.А., Зак Д.В. Согласование моделей химических реакций в газах со вторым началом термодинамики. // ФГВ. – 1988. – Т. 24. – № 4. – С. 87-90.

[105] Николаев Ю.А. Приближенное моделирование, модель кинетики и калорическое уравнение состояния химически реагирующих газовых смесей при высоких температурах // ФГВ. – 2001. – Т. 37. – № 1. – С. 7-15.

[106] Николаев Ю.А., Топчиян М.Е. Расчет равновесных течений в детонационных волнах в газах // ФГВ. – 1977. – Т. 13. – № 3. – С. 393-404.

[107] Оптические свойства горячего воздуха/И.В. Авилова, Л.М. Биберман, В.С. Воробьев, В.М. Замалин, Г.А. Кобзев, А.Н. Лагарьков, А.Х. Мнацаканян, Г.Э. Норман. – М.: Наука, 1970. – 320 с.

[108] Соколова И.А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент//Физическая кинетика: Труды ИТПМ СО АН СССР. – Новосибирск, 1974. – Вып.4. – С. 39-104

[109] Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: Справочное издание / Отв. ред. В.П.Глушко. -— М.: Наука, 1971–1980. – Т. 1–10.

[110] Термодинамические свойства индивидуальных веществ, – 3-е изд.: Справочное издание / Отв. ред. В.П.Глушко. —- М.: Наука, 1978. – Т. 1. – кн. 2 – 328 с.; 1979. – Т. 2. – кн. 2. – 344 с.; 1981. – Т. 3. – кн. 2. – 400 с.; 1982. – Т. 4. – кн. 2. – 560 с.

[111] Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967. – 567 с.

[112] Суржиков С.Т. Автоматизированная система исследования радиационных и динамических процессов в низкотемпературной плазме.М. – 1988. – 40 с. (ПРЕПРИНТ № 313 Института проблем механики АН СССР).

[113] Воронов Г.И., Каплунов М.И., Кленова Н.И., Легоньков В.И., Леонова Н.И., Мурашкина В.И., Сапожников А.Т., Соколов В.П., Сураева З.В. Единая унифицированная система расчета термодинамических функций уравнений состояния // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. – Вып. 1. – С. 44-47.

[114] Антонова Л.В., Вербицкая О.В., Дядина Н.С., Легоньков В.И., Мурашкина В.А., Соколов В.П. Огранизация и функционирование пакета программ уравнений состояния в локальной компьютерной сети. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов, 1997. – Вып. 1.

[115] Божков А.Р., Зелинский Н.И., Сапожников В.А. Одномерные таблицы для расчета термодинамических свойств воздуха. – Красноярск, 1985. – 28 С. (Препринт ВЦ СО АН СССР № 17).

[116] Buffard T., Gallouet T, Hérard J.-M. A sequel to a rough Godunov scheme: application to real gas // Computers and Fluids, 2001. – V. 29. – № 7. – P. 813-847.

[117] Моделирование периодического режима работы МГД-генератора с T-слоем / Зелинский Н.И., Сапожников В.А. – В кн.: МГД-генераторы и термоэлектрическая энергетика: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983. – С. 28-33.

[118] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.

[119] Водород. Свойства, получение, хранение, транспортирование, применение: Справ. изд. / Д.Ю. Гамбург, В.П. Семенов, Н.Ф. Дубовкин, Л.Н. Смирнова; Под ред. Д.Ю. Гамбурга, Н.Ф. Дубовкина. – М.: Химия, 1989. – 672 с.

[120] Страуструп Б. Язык программирования C++. – 3-е изд. – М.: Изд-во «Бином», СПб.: «Невский диалект», 1999. – 991 с.

[121] Буч Г. Объектно-ориентированное анализ и проектирование с примерами приложений на C++. – 2-е изд. – М.: Изд-во «Бином», СПб.: «Невский диалект», 1999. – 560 с.

[122] Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math., 1954. – V. 7. – P. 159-193.

[123] Sod G.A. A survey of several finite difference methods of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // JCP, 1978. – V. 27. – P. 1-31.

[124] Деревянко В.В. Исследование проницаемости T-слоя в детонационном МГД-генераторе высокого давления // Вычислительные технологии, 2001. – Т. 6. – Ч. 2. – Спец. выпуск. – С. 265-270.

[125] Деревянко В.В. Детонационный МГД-генератор как источник электрической энергии и тяги на борту ГЛА // Труды Международной конференции «Математические модели и методы их исследования», (Красноярск, 16-21 авг. 2001). – Красноярск, 2001 – Т. 1. – С. 220-222.

[126] Leveque J.R. Finite difference methods for differential equations. – DRAFT VERSION for use in the courses AMath 585-6 – University of Washington, 1997. – 194 p.

[127] Деревянко В.А, Деревянко В.В. Модель детонационного МГД-генератора с T-слоем // ТВТ, 2000 – № 6. – С. 985-990.

[128] Радиационные свойства газов при высоких температурах / В.А. Каменщиков, Ю.А. Пластинин, В.М. Николаев, Л.А. Новицкий. – М.: Машиностроение, 1971. – 493 с.

[129] Латыпов А.Ф., Фомин В.М. Оценка энергетической эффективности подвода тепла перед телом в сверхзвуковом потоке газа // ПМТФ, в печати.

[130] Wideman J.K., Kunze J.F., Miles J.B. et al. Feasibility analysis of aircraft MHD // In. 26th Symp. engineering aspects of magnetohydrodynamics. – Nashville, Tennessee, USA, 1988. – P. 8.2.1-8.2.9.

[131] Weiland C. A Key Technology for the development of new Transportation (Reusable Space) Systems // Вычислительные технологии, 2001. – Т. 6. – Ч. 2. – Спец. выпуск. – С. 11-21.

Приложение A

A.1 Разностная схема для решения уравнения переноса излучения в многогрупповом приближении

Для решения уравнений вида (2.15) применялась схема второго порядка точности, описанная в [93], которая в случае одногруппового уравнения имеет вид

$$\hat{\mu}_m \frac{I_{i,m} - I_{i-1,m}}{x_i - x_{i-1}} + \chi_{i-1/2} \frac{I_{i-1,m} + I_{i,m}}{2} = \chi_{i-1/2} 2\sigma T^4_{i-1/2}, \tag{A.1}$$
$$\hat{\mu}_m \geq 0, \quad i = 2, \ldots, N_i, \quad I_{1,m} = I^*_m,$$
$$\hat{\mu}_m \frac{I_{i,m} - I_{i+1,m}}{x_i - x_{i+1}} + \chi_{i+1/2} \frac{I_{i+1,m} + I_{i,m}}{2} = \chi_{i+1/2} 2\sigma T^4_{i+1/2}, \tag{A.2}$$
$$\hat{\mu}_m < 0, \quad i = 1 \ldots N_i - 1, \quad I_{N_i,m} = I^{**}_m,$$

где N_i — количество вычислительных ячеек, I^*_m и I^{**}_m — значения интенсивности энергии излучения, вытекающие из граничных условий для уравнения переноса, характеризующие падающее слева и справа на слой газа излучение. Для граничных условий (2.10) $I^*_m = 0$, $I^{**}_m = 0$.

A.2 Метод логарифмической интерполяции

Метод логарифмической интерполяции применялся в модели ДМГДГ при интерполяции табличных данных $\sigma(P,T)$, $\mu(P,T)$, $\chi(P,T)$. Метод состоит в следующем. Пусть имеется двумерная таблица $F(A_n, B_k)$ в которой при фиксированных базисных значениях величин A_n $(1 \leq N_n)$ и B_k $(1 \leq N_k)$ заданы значения коэффициентов F_{nk}. Метод логарифмической интерполяции [93] позволяет определить величину $F(A,B)$, гарантируя при этом ее положительность, следующим образом.

Наряду с исходной таблицей $F(A_n, B_k)$ определяются таблицы

$$Z_{nk} = \ln F_{nk}, \quad X_n = \ln A_n, \quad Y_k = \ln B_k.$$

Для того, чтобы определить искомое значение $F(A, B)$ сначала определяются интервалы, в которых лежат значения логарифмов A и B:

$$X_n \le \ln A = X \le X_{n+1}, \quad Y_k \le \ln B = Y \le Y_{k+1}.$$

Затем с помощью линейной интерполяции определяется величина

$$Z = (1-\xi)(1-\eta)Z_{nk} + (1-\xi)\eta Z_{n,k+1} + \xi(1-\eta)Z_{n+1,k} + \xi\eta Z_{n+1,k+1},$$

где

$$\xi = (X - X_n)/(X_{n+1} - X_n), \quad \eta = (Y - Y_k)/(Y_{k+1} - Y_k),$$

и рассчитывается искомое решение

$$F = e^Z.$$

А.3 Формы записи уравнений газодинамики

Уравнения Эйлера изначально записываются в консервативной форме в виде законов сохранения массы, момента импульса и энергии. Такая форма записи обеспечивает выполнение условий Ренкина-Гюгонио на разрывах. Численные методы, применяемые в модели ДМГДГ для решения системы уравнений Эйлера, используют также запись уравнений Эйлера в простых и в локальных характеристических переменных (в частности, при расчете потоков физических величин через границы ячеек). Ниже приведены якобианы, собственные числа и векторы, используемые при переходе от одних переменных к другим.

А.3.1 Консервативная форма записи

Уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ (m^2/\rho) + P \\ (E+P)m/\rho \end{pmatrix},$$

$$P = (\gamma - 1)(E - m^2/(2\rho)),$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_c \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = (\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial m}, \frac{\partial F}{\partial E}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma u E/\rho & -1.5(\gamma - 1)u^2 + \gamma E/\rho & \gamma u \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Собственные числа:

$$\Lambda = (u - c, u, u + c). \tag{A.4}$$

Правые собственные векторы:

$$\mathbf{R}_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & 0.5u^2 & H + uc \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Левые собственные векторы:

$$\mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} 0.5M^2 + 0.25(\gamma - 1)M^2 & (-1 - (\gamma - 1)M)/(2c) & (\gamma - 1)/(2c) \\ 1 - 0.5(\gamma - 1)M^2 & (\gamma - 1)M/c & -(\gamma - 1)/c^2 \\ -0.5M^2 + 0.25(\gamma - 1)M^2 & (1 - (\gamma - 1)M)/(2c) & (\gamma - 1)/(2c) \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

где

$$c = \sqrt{\gamma P/\rho}, \quad H = \frac{E + P}{\rho}, \quad M = u/c. \tag{A.7}$$

Характеристические переменные для фиксированного состояния $\hat{U}$

$$\mathbf{W}_c = \hat{\mathbf{L}_c}\mathbf{U}. \tag{A.8}$$

A.3.2 Форма записи в простых переменных

Простые переменные

$$\mathbf{V} = (\rho, u, P)^T,$$

где индекс «T» означает транспонирование.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \;=\; 0,$$

Уравнения имеют вид

$$A_p \;=\; \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma P & u \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Собственные числа:

$$\Lambda \;=\; (u-c, u, u+c). \tag{A.10}$$

Правые собственные векторы:

$$\mathbf{R}_p \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -c/\rho & 0 & c/\rho \\ c^2 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Левые собственные векторы:

$$\mathbf{L}_p \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\rho/(2c) & 1/(2c^2) \\ 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \rho/(2c) & 1/(2c^2) \end{pmatrix}. \tag{A.12}$$

Характеристические переменные для фиксированного состояния $\hat{V}$

$$\mathbf{W}_p \;=\; \hat{\mathbf{L}_p}\mathbf{V} \;=\; \begin{pmatrix} [-\hat{\rho}/(2\hat{c})]u + [1/(2\hat{c}^2)]P \\ \rho - [1/(\hat{c}^2)]P \\ [\hat{\rho}/(2\hat{c})]u + [1/(2\hat{c}^2)]P \end{pmatrix}. \tag{A.13}$$

А.4 Метод решения системы уравнений Эйлера в приближении политропного газа

В данном разделе изложен алгоритм численного метода для решения системы уравнений газодинамики, предложенного в [58] и обозначенного в настоящей работе как «MP2».

Предполагается, что значения консервативных переменных U_j^n соответствуют средним значениям по j-ой ячейке

$$U_j^n \;=\; \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(x,t^n)dx.$$

Дискретизация исходной системы уравнений (2.2) проводится на основе полностью дискретной разностной схемы

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2}) \ = \ 0.$$

Задача заключается в определении потоков всех $\mathbf{F}_{j+1/2}$ по известным значениям $\mathbf{U}_j$. На первом шаге для каждого j определяются значения простых переменных $\mathbf{V}_j$. В каждой j-ой ячейки для временного промежутка $t^n \le t \le t^{n+1}$ значения $\mathbf{V}(x,t)$ аппроксимируются линейной функцией

$$\mathbf{R}_j(x,t) \ = \ \mathbf{V}_j + (x - x_j)\mathbf{S}_j + (t - t^n)\mathbf{T}_j,$$

где $\mathbf{S}_j$ и $\mathbf{T}_j$ аппроксимируют соответственно $\mathbf{V}_x(x_j,t^n)$ и $\mathbf{V}_t(x_j,t^n)$. Для каждой j-ой ячейки рассчитываются значения функции $\mathbf{R}$ на границах ячейки в момент времени $t^{j+1/2}$:

$$\mathbf{R}_j(x_{j-1/2}, t^{n+1/2}) \ = \ \mathbf{V}_j - 0.5\Delta x\mathbf{S}_j + 0.5\Delta t\mathbf{T}_j,$$

$$\mathbf{R}_j(x_{j+1/2}, t^{n+1/2}) \ = \ \mathbf{V}_j + 0.5\Delta x\mathbf{S}_j + 0.5\Delta t\mathbf{T}_j;$$

и оценивается «гладкость» решения в ячейках k_j:

$$k_j \ = \ \begin{cases} 1, & \text{в j-ой ячейке решение «гладкое»,} \\ 0, & \text{в j-ой ячейке решение не является «гладким».} \end{cases}$$

Алгоритм аппроксимации $\mathbf{V}_x$, позволяющий одновременно рассчитать k_j, описан в А.4.1.

Аппроксимацию производной по времени можно получить, используя матрицу A_p (А.9):

$$\mathbf{T}_j \ = \ -(A_p)_j\mathbf{S}_j.$$

В результате, на каждой $j+1/2$ грани между ячейками определены две величины: $\mathbf{R}_j(x_{j+1/2}, t^{n+1/2})$ и $\mathbf{R}_{j+1}(x_{j-1/2}, t^{n+1/2})$.

Потоки через грани ячейки $j + 1/2$ полагаются равными потокам в направлении конвекции F_U

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{t+1/2} \ = \ F_U,$$

для вычисления которых на грани между j-ой и $j+1$-ой ячейками решается задача Римана с начальными условиями при $t = 0$:

$$\mathbf{V} \ = \ \begin{cases} \mathbf{V}_L \ = \ \mathbf{R}_j(x_{j+1/2}, t^{n+1/2}), & x \le 0, \\ \mathbf{V}_R \ = \ \mathbf{R}_{j+1}(x_{j-1/2}, t^{n+1/2}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Способ решения задачи Римана зависит от «гладкости» грани. Если выполняется

$$k_{j+1/2} \;=\; k_j + k_{j+1} \;=\; 2,$$

то грань считается «гладкой». В этом случае для расчета потоков используется простой и экономичный метод расщепления простых переменных А.5.1. На «негладких» границах для расчета потоков используется более медленный и дорогой с точки зрения эффективности вычислений метод Рое, дополненный условиями допустимости А.5.2.

А.4.1 Аппроксимация производных простых переменных по координате

Ниже представлен алгоритм аппроксимации производных $V_x(x_j, t^n)$ по сеточным значениям простых переменных V_j [58]. По известному распределению простых переменных $\{\mathbf{V}_j\}$ строится аппроксимация их производных по координате $\mathbf{S}_j \;=\; \mathbf{V}_x(x_j, t^n)$. В гладких областях решения используются точные квадратичные формулы. Возле разрывов, во избежание появления нефизических осцилляций, применяются монотонные ограничители. Одновременно насчитывается распределение коэффициентов k_j, которое может служить мерой гладкости решения (значения $k_j \;=\; 1$ соответствуют «гладким» ячейкам, $k_j < 1$ — «негладким»).

На первом шаге алгоритма для всех ячеек (индекс j) насчитывается распределение величин $\{\Delta_j^2\rho\}$:

$$\Delta_j^2\rho \;=\; \rho_{j-1} - 2\rho_j + \rho_{j+1}. \qquad \text{(А.14)}$$

Далее для каждой j-ой ячейки выполняются следующие действия.

1. Определяются коэффициенты a_j, b_j и степень гладкости решения k_j:

$$a_j \;=\; (\frac{4}{5}\Delta_j^2\rho - \Delta_{j-1}^2\rho)(\frac{5}{4}\Delta_j^2\rho - \Delta_{j-1}^2\rho),$$

$$b_j \;=\; (\frac{4}{5}\Delta_j^2\rho - \Delta_{j+1}^2\rho)(\frac{5}{4}\Delta_j^2\rho - \Delta_{j+1}^2\rho),$$

$$k_j \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если } \max(a_j, b_j) \le \varepsilon\rho_j, \\ 0, & \text{иначе }, \end{cases}$$

где ε — малое число, типичные значения которого $10^{-5} \div 10^{-4}$.

2. Если $k_j = 1$, то ячейка соответствует «гладкой» области решения. Поэтому аппроксимации производных $\mathbf{S}_j$ ищутся по высокоточной квадратичной формуле
$$\mathbf{S}_j = (\mathbf{V}_{j-2} - 8\mathbf{V}_{j-1} + 8\mathbf{V}_{j+1} - \mathbf{V}_{j+2})/(12\Delta x).$$

3. Если $k_j = 0$, то выполняются следующие шаги. Для $-2 \le \ell \le 2$ определяются значения локальных характеристических переменных $\mathbf{W}_{p,j+\ell}$ согласно (A.13). Для каждой i-ой компоненты, $1 \le i \le 3$ рассчитывается $\sigma^{(i)}$:
$$\sigma^{(i)} = |W_2^{(i)} - W_0^{(i)}| + |W_0^{(i)} - W_{-2}^{(i)}|.$$
Если соблюдается условие доминирования линейной характеристики
$$\sigma^{(2)} > 2(\sigma^{(1)} + \sigma^{(3)}),$$
то полагается $k_j = -2$. Далее вычисляются q_f^i, $1 \le i \le 3$:
$$s_+ = (W_1 - W_0)/\Delta x, \quad s_- = (W_0 - W_{-1})/\Delta x,$$
$$p_- = (W_{-2} - 4W_{-1} + 3W_0)/(2\Delta x),$$
$$p_0 = (W_1 - W_{-1})/(2\Delta x),$$
$$p_+ = (-W_2 + 4W_1 - 3W_0)/(2\Delta x),$$
$$q_+ = \mathrm{median}(s_+, p_+, p_0), \quad q_- = \mathrm{median}(s_-, p_-, p_0), \quad q_* = \mathrm{xm}(q_+, q_-),$$
$$q^* = \mathrm{median}(q_*, 2s_-, 2s_+), \quad q_5 = (W_{-2} - 8W_{-1} + 8W_1 - W_2)/(12\Delta x),$$
$$p_m = \mathrm{median}(p_-, p_+, p_0), \quad q_6 = \mathrm{median}(q_5, p_m, p_0),$$
$$q_f = \mathrm{median}(q_6, q_*, q^*).$$
Аппроксимации производных рассчитываются как
$$\mathbf{S}_j = \mathbf{R}_{c,j}(q_f^{(1)}, q_f^{(2)}, q_f^{(3)})^T,$$
где $\mathbf{R}_c$ определяется согласно (A.5).

Используемые функции median и xm определяются через функцию minmod:
$$\mathrm{minmod}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x)\min(|x|, |y|), & xy > 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$
$$\mathrm{median}(x, y, z) = x + \mathrm{minmod}(y - x, z - x), \quad \mathrm{xm}(x, y) = \mathrm{median}(x, y, x - y).$$

A.5 Методы расчета потоков в направлении конвекции

Представленные ниже методы позволяют найти приближенное решение задачи Римана с начальными условиями при $t = 0$

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}_L, & x \leq 0, \\ \mathbf{V}_R, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и рассчитать поток в направлении конвекции[1] $\mathbf{F}_U$ через границу $x = 0$.

A.5.1 Метод расщепления простых переменных

Рассчитываются значения характеристических переменных $\mathbf{W}_p$ (A.13) для фиксированного состояния $\hat{\mathbf{V}} = 0.5(\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R)$

$$\mathbf{W}_{p,L} = \hat{\mathbf{L}_p}\mathbf{V}_L, \quad \mathbf{W}_{p,R} = \hat{\mathbf{L}_p}\mathbf{V}_R,$$

и полагается

$$\Delta\mathbf{W}_p = \mathbf{W}_{p,R} - \mathbf{W}_{p,L} = \hat{\mathbf{L}_p}\Delta\mathbf{V}.$$

Далее определяются значения простых переменных $\mathbf{V}_U$ с учетом направления конвекции

$$\begin{array}{llll} & \text{если} & \hat{u} - \hat{c} \geq 0 & \text{то} \quad \mathbf{V}_U = \mathbf{V}_L, \\ \text{иначе} & \text{если} & \hat{u} \geq 0 & \text{то} \quad \mathbf{V}_U = \mathbf{V}_L + \Delta W_p^{(1)}\hat{\mathbf{R}}_p^{(1)}, \\ \text{иначе} & \text{если} & \hat{u} + \hat{c} \geq 0 & \text{то} \quad \mathbf{V}_U = \mathbf{V}_R - \Delta W_p^{(3)}\hat{\mathbf{R}}_p^{(3)}, \\ \text{иначе} & & & \qquad \mathbf{V}_U = \mathbf{V}_R, \end{array}$$

и рассчитываются потоки в направлении конвекции

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{F}(\mathbf{V}_U).$$

A.5.2 Метод Рое с условиями допустимости

Определяются усредненные значения плотности, энтальпии, скорости и скорости звука:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \widetilde{H} = \beta_L H_L + \beta_R H_R,$$

$$\tilde{u} = \beta_L u_L + \beta_R u_R, \quad \tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1)(\widetilde{H} - 0.5\tilde{u}^2)},$$

[1] в англоязычной литературе называемый «upwind flux».

где

$$\beta_L \ = \ \frac{\rho_L}{\rho_L + \sqrt{\rho_L \rho_R}}, \quad \beta_R \ = \ 1 - \beta_L.$$

С использованием выражений для $\mathbf{R}_c$ (A.5), $\mathbf{\Lambda}$ (A.4) и $\mathbf{L}_p$ (A.12) рассчитываются потоки в направлении конвекции:

$$\mathbf{F}_U \ = \ \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{V}_L) + (\min((\tilde{u} - \tilde{c}), 0) - 0.5\eta^{(1)})\Delta W^{(1)}\widetilde{\mathbf{R}}_c^{(1)}, & \tilde{u} \geq 0, \\ \mathbf{F}(\mathbf{V}_R) - (\max((\tilde{u} + \tilde{c}), 0) + 0.5\eta^{(3)})\Delta W^{(3)}\widetilde{\mathbf{R}}_c^{(3)}, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где

$$\Delta\mathbf{W} \ = \ \tilde{\mathbf{L}}_p \Delta\mathbf{V},$$

$$\Delta\lambda^{(1)} \ = \ -\frac{(\gamma+1)\tilde{c}\Delta W^{(1)}}{2\tilde{\rho}}, \quad \Delta\lambda^{(3)} \ = \ \frac{(\gamma+1)\tilde{c}\Delta W^{(3)}}{2\tilde{\rho}},$$

$$\eta^{(i)} \ = \ \max((-|\tilde{\lambda}^{(i)}| + 0.5\Delta\lambda^{(i)}), 0), \quad i \ = \ 1, 3.$$

A.6 Решение скалярного уравнения переноса

Разностная аппроксимация для одномерного уравнение переноса

$$\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f_x(\vartheta(x,t))}{\partial x} = 0$$

может быть записана в виде схемы конечных объемов

$$\frac{\partial\vartheta_j(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+1/2} - h_{j-1/2}),$$

где ϑ_j — средние по ячейкам

$$\vartheta_j(t) = \int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \vartheta(\zeta, t) d\zeta.$$

Функция $h_{j+1/2}$ является монотонным потоком, вычисляемым на основе полученных в результате реконструкции значений $\vartheta^R_{j+1/2}$, $\vartheta^L_{j+1/2}$:

$$h_{j+1/2} = h(\vartheta^R_{j+1/2}, \vartheta^L_{j+1/2}).$$

Функция монотонного потока удовлетворяет следующим условиям:

- $h(a,b)$ — Липшиц-непрерывная функция по обоим аргументам;

- $h(a,b)$ — неубывающая функция по аргументу a и невозрастающая функция по аргументу b;
- $h(a,b)$ согласована с физическим потоком f, т.е. $h(a,a) = f(a)$.

К наиболее известным и применяемым на практике монотонным потокам относятся [51, 48] поток Годунова

$$h(a,b) = \begin{cases} \min_{a \le \vartheta \le b} f(\vartheta) & \text{если } a \le b, \\ \max_{b \le \vartheta \le a} f(\vartheta) & \text{если } a > b, \end{cases}$$

и поток Лакса-Фридрихса

$$h(a,b) = 0.5(f(a) + f(b) - \alpha(b-a)),$$

где $\alpha = \max_{\vartheta} |f'(\vartheta)|$ — константа, максимум которой вычисляется по области изменения ϑ. В расчетах удобно применять $\alpha = \dfrac{\Delta x}{2\Delta t}$ [51].

Поток Годунова выгодно использовать при реконструкции невысоких (первого или второго) порядков. Поток Лакса-Фридрихса является сильно диссипативным, однако прост в реализации, экономичен и позволяет получать хорошие результаты в случае реконструкции высокого порядка точности.

A.7 Реконструкция WENO

Алгоритмы реконструкции позволяют по известному распределению средних по ячейкам величин ϑ_i от функции $\vartheta(x)$ получить два несимметричных приближения порядка $(2k-1)$ к функции $\vartheta(x)$ на границах ячейки $\vartheta^+_{i+1/2}$ и $\vartheta^-_{i-1/2}$. Алгоритм реконструкции WENO являются дальнейшим развитием алгоритма ENO, обеспечивающего равномерно высокий порядок точности вплоть до скачков, что достигается за счет адаптивного выбора шаблона реконструкции. В алгоритмах WENO вместо одного шаблона реконструкции они используют комбинацию всех возможных шаблонов, что позволяет увеличить точность в гладких областях, снимает проблему «свободной адаптации» шаблонов, обеспечивает более эффективную реализацию алгоритма на векторных компьютерах [48].

Алгоритм реконструкции WENO может быть записан следующим образом [48].

1. Получаем реконструированные величины ϑ^r k-порядка точности для $r = 0,\dots k-1$

$$\vartheta^{(r)}_{i+1/2} = \sum_{s=0}^{k-1} c_{rs}\vartheta_{i-r+s}, \quad \vartheta^{(r)}_{i-1/2} = \sum_{s=0}^{k-1} c_{rs}\vartheta_{i-1-r+s},$$

$$c_{rs} = \sum_{m=s+1}^{k} \frac{\sum\limits_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq m}}^{k} \prod\limits_{\substack{q=0\\ q\neq m,\ell}}^{k} (r-q+1)}{\prod\limits_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq m}}^{k} (m-\ell)},$$

$$-1 \le r \le k-1, \qquad 0 \le j \le k-1.$$

2. Определяем индикаторы гладкости β_r для $r = 0,\dots k-1$: При $k = 2$:

$$\beta_0 = (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)^2, \qquad \beta_1 = (\vartheta_i - \vartheta_{i-1})^2.$$

При $k = 3$:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 13/12(\vartheta_i - 2\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i+2})^2 + 0.25(3\vartheta_i - 4\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i+2})^2, \\ \beta_1 &= 13/12(\vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i + \vartheta_{i+1})^2 + 0.25(\vartheta_{i-1} - \vartheta_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= 13/12(\vartheta_{i-2} - 2\vartheta_{i-1} + \vartheta_i)^2 + 0.25(\vartheta_{i-2} - 4\vartheta_{i-1} + 3\vartheta_i)^2. \end{aligned}$$

3. Формируем веса w^+ и w^-

$$w_r^{\pm} = \frac{\alpha_r^{\pm}}{\sum\limits_{s=0}^{k-1}\alpha_s^{\pm}}, \qquad \alpha_r^{\pm} = \frac{d_r^{\pm}}{(\epsilon + \beta_r)^2},$$

$$\begin{aligned} &\text{При } k = 2: \ d_0^- = 2/3 \quad d_1^- = 1/3 \ , \\ &\text{При } k = 3: \ d_0^- = 3/10 \quad d_1^- = 3/5 \quad d_2^- = 1/10, \end{aligned}$$

$$d_r^+ = d_{k-1-r}^-,$$

Здесь $\epsilon > 0$ — малая величина, позволяющая избежать зануления знаменателя. Во всех расчетах полагалось $\epsilon = 10^{-6}$.

4. Определяем реконструкцию порядка $(2k-1)$

$$\vartheta^{\pm}_{i\mp 1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} w_r^{\pm}\vartheta^{(r)}_{i\mp 1/2}.$$

Методика определения β, $d^{\pm}$, c_{rj} для более высоких порядков точности k приведена в [72].

А.8 Оптимальный TVD-метод Рунге-Кутты

Класс TVD-методов Рунге-Кутты высоких порядков точности развит в работах [78, 79]. Эти методы используются для решения задачи с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\vartheta_t = L(\vartheta),$$

полученного в результате пространственной аппроксимации уравнений типа

$$\vartheta_t = \ L(\vartheta).$$

Оптимальные TVD-методы Рунге-Кутты высокого порядка являются устойчивыми по времени в любой норме, в которой устойчив метод Эйлера первого порядка, причем при одинаковых ограничениях на шаг по времени и в гиперболических задачах дают более надежные результаты, чем методы Рунге-Кутты без свойства TVD. Обоснование и детали реализации таких методов приведены в работе [48].

Оптимальный TVD-метод Рунге-Кутты второго порядка записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\vartheta^{(1)} &= \vartheta^n + \tau L(\vartheta^n), \\
\vartheta^{n+1} &= 0.5\vartheta^n + 0.5\vartheta^{(1)} + 0.5\tau L(\vartheta^{(1)}),
\end{aligned}$$

оптимальный TVD-метод Рунге-Кутты третьего порядка:

$$\begin{aligned}
\vartheta^{(1)} &= \vartheta^n + \tau L(\vartheta^n), \\
\vartheta^{(2)} &= 0.75\vartheta^n + 0.25\vartheta^{(1)} + 0.25\tau L(\vartheta^{(1)}), \\
\vartheta^{n+1} &= \frac{1}{3}\vartheta^n + \frac{2}{3}\vartheta^{(2)} + \frac{2}{3}\tau L(\vartheta^{(2)}).
\end{aligned}$$

А.9 Метод релаксации энергии

Метод релаксации энергии, предложенный в работе [90], используется для обобщения численных методов газодинамики, развитых для политропного газа с $\gamma = \mathrm{const}$ на случай обобщенных уравнений состояния, записанных в виде (2.5). Вычислительная процедура решения системы уравнений Эйлера в рамках данного подхода приведена в работах [92, 48] и является двухшаговой. На шаге релаксации внутренняя энергия раскладывается на две части:

$$\varepsilon_1(x, t^n) = \frac{P(\rho(x,t^n), \varepsilon(x,t^n))}{(\gamma_1 - 1)\rho(x,t^n)},$$

$$\varepsilon_2(x,t^n) = \varepsilon(x,t^n) - \varepsilon_1(x,t^n).$$

Внутренняя энергия ε_1 соответствует простому политропному закону для давления с $\gamma = \gamma_1$. Внутренняя энергия ε_2 отвечает за нелинейную часть давления и предполагается переносимой потоком как результат конвекции. На шаге эволюции во времени в интервале $t^n \le t \le t^{n+1}$ решается задача Коши для релаксационной системы [92] с нулевой правой частью

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \qquad t \ge 0, \\ \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u u + P_1(\rho,\varepsilon_1))}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial t} + \dfrac{\partial((E_1 + P_1)u)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho\varepsilon_2 u)}{\partial x} = 0, \\ E_1 = 0.5\rho|u|^2 + \rho\varepsilon_1, \end{cases} \tag{A.15}$$

и начальными данными

$$\rho(x,t^n), \quad u(x,t^n), \quad \varepsilon_1(x,t^n), \quad \varepsilon_2(x,t^n).$$

На основе полученного решения

$$\rho(x,t^{n+1}), \quad u(x,t^{n+1}), \quad \varepsilon_1(x,t^{n+1}), \quad \varepsilon_2(x,t^{n+1})$$

вычисляется равновесное решение в момент времени t^{n+1}

$$\rho(x,t^{n+1}), \quad u(x,t^{n+1}), \quad \varepsilon(x,t^{n+1}) = \varepsilon_1(x,t^{n+1}) + \varepsilon_2(x,t^{n+1}). \tag{A.16}$$

В методе WENO3 указанная процедура применялась следующим образом.

1. Рассчитывались правые части системы уравнений (2.2).
2. Осуществлялся шаг релаксации: внутренняя энергия раскладывалась на две составляющие.
3. Система уравнений Эйлера, составленная из первых трех уравнений релаксационной системы (А.15), интегрировалась с применением WENO-реконструкции, метода Рое и метода Рунге-Кутты 2-ого порядка точности.
4. Четвертое уравнение системы (А.15) рассчитывалось с помощью WENO-реконструкции с применением скалярного метода Рое.

5. Рассчитывалось искомое равновесное решение в (A.16) с учетом правых частей.

Следует отметить, что в модели был также реализован вариант указанного выше алгоритма, в котором процедура релаксации и расчет правых частей проводились на каждом промежуточном шаге метода Рунге-Кутты. Результаты тестовых расчетов показали его неэффективность по сравнению с первым вариантом.

Согласно [92] параметр γ_1 должен удовлетворять следующим критериям:

$$\gamma_1 > \sup_{\rho,\varepsilon} \Gamma(\rho,\varepsilon), \quad \Gamma(\rho,\varepsilon) = 1 + P_{,\,\varepsilon},$$

$$\gamma_1 > \sup_{\rho,\varepsilon} \gamma(\rho,\varepsilon), \quad \gamma(\rho,\varepsilon) = (\rho/P)P_{,\,\varepsilon} + P_{,\,\varepsilon}/\rho$$

Бóльшие значения γ_1 соответствуют большей численной диссипации, поэтому «следует выбирать самые маленькие возможные γ_1, удовлетворяющие требованиям устойчивости» [92]. Эксперименты показали, что при использовании уравнения приближенного термического уравнения реального газа (2.43) в модели ДМГДГ для обеспечения устойчивости решения достаточно положить $\gamma_1 \approx 5$.

A.10 Точное решение задачи о распространении детонационной волны

Рассматривается задача о распространении плоской детонационной волны в прямой трубе в приближении Чепмена-Жуге. Ее точное решение приведено в работах [99, 102]. Параметры за фронтом детонационной волны зависят только от координаты x и времени t. В общем случае результирующее течение в трубе с координатами $x_0 < x_1$ разделяется на область

$$\begin{array}{ll} x_f \le x_1 & \text{исходная горючая смесь,} \\ x_f & \text{фронт детонационной волны,} \\ x_r \le x_f & \text{волна разрежения,} \\ x_0 \le x_r & \text{область покоя.} \end{array}$$

Параметры на фронте детонационной волны могут быть приблизительно (в предположении $M_f \ge 4$) рассчитаны аналитически [99]:

$$P_f \approx 2q(\gamma^2 - 1)/u_1, \quad \rho_1/\rho_f \;=\; \gamma/(\gamma+1),$$

$$u_f \;=\; \sqrt{2q(\gamma-1)/(\gamma+1)}, \quad D \approx \sqrt{2(\gamma^2-1)q}, \tag{A.17}$$
$$x_f \;=\; x_0 + Dt.$$

Положение фронта детонационной волны определяется ее скоростью D, которая в свою очередь задается величиной теплового эффекта реакции q. За плоскостью Чепмена-Жуге располагается волна разрежения Тейлора [102]. Обозначив

$$\hat{C} \;=\; u_f - 2c_f/(\gamma-1),$$

можно записать распределение параметров в волне разрежения в следующем виде:

$$P(x) \;=\; P_f(c(x)/c_f)^{2\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho(x) \;=\; \rho_f(c(x)/c_f)^{2/(\gamma-1)}, \tag{A.18}$$
$$u(x) \;=\; \frac{x-x_f}{t} - c(x), \quad c(x) \;=\; (\frac{x-x_f}{t} - \hat{C})(\gamma-1)/(\gamma+1).$$

Волна разрежения заканчивается в точке с координатой

$$x_r \;=\; x_0 - \frac{1}{2}\hat{C}(\gamma-1)t.$$

В области покоя за волной разрежения газ неподвижен, давление и плотность не зависят от координаты и описываются формулами (А.18) при

$$c \;=\; \frac{1}{2}\hat{C}(\gamma-1),$$

что следует из теории волн разрежения [57].